

ОТЗЫВ

официального оппонента доктора физико-математических наук Исаева А.П. на диссертацию Зенкевича Егора Андреевича «Спектральная дуальность в калибровочных теориях, конформных теориях поля и интегрируемых системах», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика.

Важнейшей проблемой современной квантовой теории поля является описание ее моделей в режиме сильной связи. В этом случае стандартные методы теории возмущений оказываются неприменимы. Сравнительно недавно возникли определенные надежды на то, что данная проблема может быть решена в рамках так называемых дуальностей между различными квантовыми моделями теории поля. Дуальности устанавливают нетривиальные соответствия между теориями, когда одна из них находится в режиме сильной связи, а вторая оказывается слабо-связанной. Таким образом, отобразив степени свободы слабо-связанной теории на сильно-связанную, можно существенно продвинуться в исследовании динамики последней.

В диссертации Е. А. Зенкевича рассмотрен пример дуальности, которая называется спектральной дуальностью. Эта дуальность имеет естественную интерпретацию с точки зрения интегрируемых систем, ассоциированных (согласно решению, полученному Зайбергом и Виттеном) с калибровочными теориями поля. Указанная дуальность формулируется как симметрия спектральных кривых интегрируемых систем и применяется также к исследованию различных моделей конформных теорий поля и теории топологических струн. Учитывая все вышесказанное, тема данной диссертации представляется несомненно важной и актуальной.

Диссертация состоит из Введения, шести глав основного содержания, Заключения, приложений и списка литературы. Во Введении кратко описывается решение Зайберга-Виттена $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных калибровочных теорий, а также его связь с классическими интегрируемыми системами. Затем вводится статсумма Некрасова и обсуждается ее связь с квантованием интегрируемых систем. Кратко описывается дуальность Алдая-Гайотто-Тачикавы (АГТ) и показывается, что на двух сторонах соответствия естественным образом возникают две различные интегрируемые системы. Также кратко описывается подход к АГТ соответствию, применяемому к двумерным конформным теориям поля с произвольными центральными зарядами, в котором доказательство дуальности сводится к проблеме поиска выделенного базиса в Гильбертовом пространстве конформной теории поля. Поясняется роль спектральной дуальности в конформной теории поля и ее связь с теорией топологических струн.

В Главе 1 подробно исследуется связь функции Некрасова калибровочных теорий и решения уравнения Бакстера для квантовой спиновой цепочки. Сначала находится решение уравнения Бакстера в первых порядках квазиклассического разложения. Затем

вводятся пертурбативная и инстантонная части функции Некрасова и проводится сравнение этой функции и монодромии (или квантовых периодов) решения уравнения Бакстера. Отдельно, оказывается возможным провести сравнение полной (во всех порядках по постоянной Планка) пертурбативной части функции Некрасова и монодромии уравнения Бакстера в пределе большого параметра «твиста» (что как раз соответствующего отсутствию инстантонных поправок). Такое сравнение проведено последовательно для случаев 0, 1, 2, 3, 4 фундаментальных гипермультиплетов.

В Главе 2 изучается частный случай спектральной дуальности между $GL(2)$ цепочкой Гейзенберга и четырехточечной редуцированной моделью Годена. В этом случае дуальность возникает как следствие АГТ дуальности между $SU(2)$ калибровочной теорией и четырех точечным конформным блоком алгебры Вирасоро в пределе Некрасова-Шаташвили. Показано, что одна из систем является интегрируемой системой Зайберга-Виттена, соответствующей калибровочной теории. Другая система при этом возникает на стороне конформной теории как уравнение на вырожденный вектор в модуле Верма алгебры Вирасоро. Продемонстрирована связь между параметрами систем, а также определен рецепт квантования (вывод уравнения Бакстера) для редуцированной системы Годена.

В Главе 3 результаты предыдущей главы обобщаются на случай цепочек высших рангов и редуцированных систем Годена с большим числом отмеченных точек. В этой главе последовательно вводится модель Годена на сфере с отмеченными точками и ее гамильтонова редукция по глобальным калибровочным преобразованиям из группы $GL(N)$. Выписывается спектральная кривая и демонстрируется АНН (Adams-Harnad-N Hurtubise) дуальность между двумя нередуцированными системами Годена. Затем вводится ХХХ спиновая цепочка Гейзенберга, а также ее обобщение на случай спинов высших рангов. Доказывается спектральная дуальность между классической спиновой цепочкой и редуцированной системой Годена и явно выписывается отображение Пуассона для динамических переменных. При этом ключевым моментом является то, что для редуцированной системы Годена используются редуцированные скобки (скобки Дирака). Также доказывается квантовая дуальность для тех же систем, записанных в разделенных переменных, то есть для их уравнений Бакстера.

В Главе 4 показывается спектральная дуальность между двумя ХХЗ спиновыми цепочками со спинами высших рангов. Эту дуальность также можно рассматривать как следствие пятимерного обобщения дуальности АГТ: одна из цепочек связана с пятимерной калибровочной теорией, в то время как другая — с q -деформированным конформным блоком. Сначала вводится квантовая ХХЗ спиновая цепочка, квантовая обертывающая алгебра $U_q(\mathfrak{gl}_K)$ и рассматриваются простейшие представления этой алгебры. Затем выписывается явное соответствие между производящим оператором квантовых интегралов движения (гамильтонианов) для двух квантовых цепочек. Это соответствие доказывается в классическом пределе. Также проводится доказательство в пределе, в котором одна из ХХЗ цепочек переходит в ХХХ цепочку, а другая — в тригонометрическую систему Годена. Явно доказывается эквивалентность тригонометрической и

редуцированной модели Годена на классическом уровне — они оказываются связаны калибровочным преобразованием.

В Главе 5 обсуждается АГТ соответствие для калибровочной теории с группой $SU(3)$ для произвольных центральных зарядов и исследуется специальный базис в конформной теории, в котором это соответствие между инстантонной статсуммой и конформным блоком становится явным. Чтобы получить этот базис вводится дифференциальный оператор, один из бесконечного семейства коммутирующих квантовых интегралов на Гильбертовом пространстве конформной теории, и находятся его собственные функции — обобщенные полиномы Джека. Эти полиномы и образуют искомый базис. Чтобы убедиться в этом, используется представление Доценко-Фатеева для конформных блоков. В этом представлении матричные элементы примарных полей в специальном базисе даются интегралами типа Сельберга. В Приложении А выводятся рекуррентные соотношения (петлевые уравнения) для интегралов Сельберга. Затем, с помощью них находятся матричные элементы примарных полей в базисе обобщенных полиномов Джека и показывается, что они даются функциями Некрасова.

В Главе 6 рассматривается АГТ соответствие для пятимерных калибровочных теорий и q -деформированных конформных блоков для произвольных центральных зарядов. По аналогии с предыдущей главой вводится базис обобщенных полиномов Макдональда, являющихся собственными функциями гамильтониана типа Рудженаарса. Выводятся петлевые уравнения для q -деформированных интегралов типа Сельберга и находятся явные выражения для матричных элементов в базисе обобщенных полиномов Макдональда. Показывается, что они даются пятимерным обобщением функций Некрасова. Затем показывается, что интегральное представление Доценко-Фатеева для q -деформированного конформного блока (без разложения по базису обобщенных полиномов Макдональда) также эквивалентно разложению типа Некрасова. Это интерпретируется как спектральная дуальность между двумя некрасовскими разложениями одного и того же конформного блока. Показывается что такую дуальность можно естественно объяснить, если воспринять калибровочную теорию как компактификацию M -теории на шестимерное торическое многообразие Калаби-Яу. При этом, Некрасовская статсумма равна статсумме топологических струн на соответствующем шестимерном многообразии. Показано, что два спектрально дуальных разложения соответствуют двум эквивалентным способам вычисления статсуммы топологических струн.

В Заключение перечислены основные результаты исследований, представленных в диссертации.

Из всего сказанного выше следует, что представленная диссертация является актуальным и интересным исследованием в современной теоретической физике. В диссертации изучены важные примеры дуальности, связывающей на первый взгляд существенно разные квантовые теории поля. В частности удается вывести новые нетривиальные соотношения между физическими наблюдаемыми в различных теориях поля, а также между интегрируемыми системами. В последних главах диссертации прослежены связи

между специальным базисом в конформной теории поля, инстантонным разложением в калибровочной теории и топологическими струнами.

В качестве недостатка отметим, что в диссертации не рассмотрен интересный вопрос об обобщении представленных в Главах 2, 3 и 4 калибровочных моделей на случай шестимерных теорий, компактифицированных на тор. В этом случае калибровочные теории должны соответствовать XYZ анизотропной цепочке спинов, для которой реализация спектральной дуальности неочевидна. Несмотря на указанный недостаток, диссертация Е. А. Зенкевича заслуживает высокой оценки. Результаты диссертации своевременно опубликованы в ведущих научных журналах, неоднократно докладывались на представительных российских и международных конференциях, хорошо известны специалистам и активно цитируются.

Автореферат правильно и полностью отражает содержание диссертации. Диссертация Е. А. Зенкевича отвечает всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. №842, предъявляемого к кандидатским диссертациям, а ее автор Е. А. Зенкевич бесспорно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 — «Теоретическая физика».

Отзыв составил,
доктор физико-математических наук, профессор,
зам. директора ЛТФ им. Н.Н. Боголюбова, ОИЯИ,
г. Дубна, Московской обл.,
тел.: +749621 63024
e-mail: isaevap@theor.jinr.ru

А.П. Исаев

Подпись А.П. Исаева заверяю.
Ученый секретарь
ЛТФ им. Н.Н. Боголюбова, ОИЯИ,
кандидат физико-математических наук

С.Н.Неделько

02 декабря 2015 г.

Исаев Алексей Петрович

доктор физико–математических наук, профессор, зам. директора Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Основные работы по теме защиты:

1. A.P. Isaev, A.N. Kirillov, V.O. Tarasov, Bethe subalgebras in affine Birman–Murakami–Wenzl algebras and flat connections for q -KZ equations // arXiv:1510.05374
2. C. Burdik, J. Fuksa, A.P. Isaev, S.O. Krivonos, O. Navratil, Remarks towards the spectrum of the Heisenberg spin chain type models // Phys. Part. Nucl. 46 (2015) 3, 277–309
3. D. Chicherin, S. Derkachov, A. P. Isaev, The spinorial R -matrix // J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 485201
4. A. P. Isaev, A. N. Kirillov, Bethe subalgebras in Hecke algebra and Gaudin models // Lett. Math. Phys. 104 (2014) 2, 179–193
5. D. Chicherin, S. Derkachov, A. P. Isaev, Conformal algebra: R -matrix and star-triangle relation // JHEP 04 (2013) 020
6. A. P. Isaev, A. I. Molev, O. V. Ogievetsky, Idempotents for Birman–Murakami–Wenzl algebras and reflection equation // arXiv:1111.2502
7. A. P. Isaev, A. I. Molev, O. V. Ogievetsky, A new fusion procedure for the Brauer algebra and evaluation homomorphisms // IMRN (2012), 2571–2606