

На правах рукописи

Слепцов Алексей Васильевич

**Симметрии квантовых инвариантов узлов и квантовых
 \mathfrak{b}_j -символов**

01.04.02 — «Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении "Институт теоретической и экспериментальной физики имени А.И. Алиханова Национального исследовательского центра "Курчатовский институт".

Официальные оппоненты: **Решетихин Николай Юрьевич**,
доктор физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Санкт-Петербургский государственный университет", г. Санкт-Петербург,
кафедра квантовой механики физического факультета, главный научный сотрудник

Славнов Никита Андреевич,
доктор физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва,
отдел теоретической физики, заведующий

Спиридонов Вячеслав Павлович,
доктор физико-математических наук,
Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, лаборатория теоретической физики ОИЯИ, начальник сектора

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук, г. Москва

Защита состоится «30» июня 2022 г. в 11:00 часов на заседании диссертационного совета Д 002.119.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте ядерных исследований Российской академии наук (ИЯИ РАН), расположенном по адресу: 117312 Москва, проспект 60-летия Октября, д.7а.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИЯИ РАН и на сайте <https://www.inr.ru/rus/referat/dis-zasch.html#sle>.

Автореферат разослан «___» _____ 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.119.01,
канд. физ.-мат. наук

Демидов Сергей Владимирович

Общая характеристика работы

Работа посвящена исследованию свойств, в первую очередь, симметрией квантовых инвариантов узлов и квантовых \mathfrak{b}_j -символов. С одной стороны, квантовые инварианты узлов — это набор полиномиальных инвариантов, который предположительно является полным набором инвариантов узлов и зацеплений в трехмерном евклидовом пространстве, то есть способен отличить один узел от другого. Задача различения узлов с помощью инвариантов восходит к К.Гауссу и тесно связана с классическим вопросом математики о классификации узлов и зацеплений, который до сих пор остается нерешенным. С другой стороны, квантовые инварианты узлов — это вакуумные средние значения калибровочно инвариантных операторов петель Вильсона в неабелевой квантовой теории поля с действием Черна-Саймонса. Квантовые инварианты узлов допускают описание на языке различных моделей и теорий: конформной теории поля Весса-Зумино-Новикова-Виттена, интеграла Концевича, представлений квантовых групп, теории топологических струн. Благодаря этому существует огромное множество методов исследования квантовых инвариантов узлов, которые устанавливают дуальности и соотношения между этими теориями. Эти дуальности имеют хорошо определенные математические интерпретации, относящиеся к гомологической зеркальной симметрии, числам пересечений Громова-Виттена, инвариантам конечного типа Васильева, топологической рекурсии, матричным моделям и другим. Всё это привело к тому, что теория квантовых инвариантов узлов стала одной из наиболее быстро развивающихся теорий на стыке математики и теоретической физики.

С точки зрения теории представлений квантовые инварианты узлов были определены в серии работ Н.Ю.Решетихина и В.Г.Тураева во второй половине 1980 г. Ключевая идея их подхода состоит в построении инвариантов с помощью квантовых R -матриц, которые с физической точки зрения отвечают за интегрируемость соответствующей динамической квантовой системы. В приложении к теории узлов разные R -матрицы связаны друг с другом с помощью квантовых \mathfrak{b}_j -символов, которые также известны под названием коэффициенты Рака-Вигнера. Они отвечают за смену базиса s -канала на базис t -канала. Их исходное физическое применение было в теории углового момента в квантовой механике [22; 23], и они широко используются в задачах спектроскопии. На сегодняшний день \mathfrak{b}_j -символы — это классический сюжет из теории представлений алгебр Ли, однако их полное описание известно только для алгебры $\mathfrak{sl}(2)$. В алгебрах старших рангов появляются кратности и теория \mathfrak{b}_j -символов там не построена. С точки зрения калибровочных теорий поля большой интерес представляют \mathfrak{b}_j -символы для высших представлений калибровочных групп. Они используются, например, для изучения конфайнмента в КХД, который можно описать петлями Вильсона в присоединенном представ-

лении. Квантовые \mathfrak{b}_j -символы применяются в таких областях науки, как (см. ссылки во введении в работе [4]): конформные теории поля [24; 25], топологическая квантовая теория поля Черна-Саймонса, решеточные калибровочные теории [26], 3-мерная квантовая гравитация [27], квантовые вычисления [28], квантовые R-матрицы [29], интегрируемые системы [30], инварианты Тураева-Виро трехмерных многообразий [31; 32], ассоциатор Дринфельда и интеграл Концевича [33; 34], ортогональные многочлены [35; 36; 1], теория конденсированного состояния вещества [37] и др. Важно обратить внимание, что во многих ситуациях, например, в квантовой гравитации или в статистических моделях рассматриваются статистические суммы, которые содержат сумму по всем возможным \mathfrak{b}_j -символам данной калибровочной группы. В таких задачах было бы очень полезно использовать симметрии между разными \mathfrak{b}_j -символами, чтобы уменьшить сумму и упростить вычисления.

Актуальность темы исследования

Трехмерная квантовая теория поля с действием Черна-Саймонса является замечательным примером точно решаемой неабелевой калибровочной теории. Все ее состояния определяются вильсоновскими линиями, а поскольку теория топологическая, то коррелятор петли Вильсона принимает различные значения только на топологически различных контурах. Топологически неэквивалентные контуры в трехмерном пространстве есть не что иное, как узлы и зацепления, которые изучает специальная область математики, называемая маломерной топологией. Получается, что в теории Черна-Саймонса все корреляторы являются инвариантами узлов. Это дает нам физический подход к построению таких инвариантов.

Идея рассмотреть трехмерную $(2+1)$ квантовую теорию поля Черна-Саймонса с неабелевой калибровочной группой G для изучения топологических инвариантов появилась в работах [38; 39]. Действие Черна-Саймонса для векторного поля $A_\mu = A_\mu^a T^a$

$$S(A) = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{M}^3} d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \text{Tr} \left(A_\mu \partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right) \quad (1)$$

построено без использования метрики на трехмерном многообразии \mathcal{M}^3 , поэтому можно ожидать, что наблюдаемые в такой теории не будут зависеть от метрики. Пусть $\mathcal{M}^3 = S^3$ и $G = SU(N)$, тогда T^a являются генераторами алгебры $su(N)$. След в действии берется по фундаментальному представлению, а κ - это константа связи или уровень теории. В качестве наблюдаемых рассматриваются калибровочные инварианты - корреляционные функции операторов Вильсона, которые для случая неабелевой тео-

рии с контуром C определяются как

$$W_R(C, A) = \text{Tr}_R \left(\text{Pexp } i \oint_C A_\mu dx^\mu \right), \quad (2)$$

где R – это неприводимое представление рассматриваемой алгебры Ли $su(N)$, а Pexp – это упорядоченная по пути экспонента:

$$\begin{aligned} \text{Pexp } \oint_C A_\mu dx^\mu &= 1 + \oint_C A_i^a(x) T^a dx^i + \\ &+ \oint_C A_{i_1}^{a_1}(x_1) dx_1^{i_1} \int_0^{x_1} A_{i_2}^{a_2}(x_2) T^{a_1} T^{a_2} dx_2^{i_2} + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Коррелятор петли Вильсона

$$\langle W_R(\mathcal{K}) \rangle = \int \mathcal{D}A e^{iS(A)} W_R(C, A) \quad (4)$$

зависит от топологического класса эквивалентности \mathcal{K} контура C , по которому идет интегрирование. Поэтому такой коррелятор $\langle W_R(\mathcal{K}) \rangle$ определяет топологический инвариант узла.

Далее идеи М.Атья и А.Шварца нашли свое развитие в работах Э.Виттена [40], где было показано, что физические состояния теории Черна-Саймонса описывают конформные блоки 2-мерной конформной теории Весс-Зумино-Новикова-Виттена. Позже в работах [41–43] было показано, что теория перенормируема и не содержит расходимостей, т.е. конечна. Таким образом, было установлено соответствие между $2d$ конформной теорией поля и $3d$ калибровочной теорией поля. Используя это соответствие, Э.Виттен с помощью непертурбативных методов вычислил вильсоновские корреляторы для фундаментального представления группы $SU(2)$ и получил знаменитые полиномы Джонса [44; 45], открытие которых было отмечено Филдсовской премией В.Джонсу в 1990 г. Для фундаментального представления группы $SU(N)$ ответ дается многочленом по переменным

$$q = \exp(\hbar) \text{ и } A = \exp(N\hbar), \quad (5)$$

где введено обозначение

$$\hbar = \frac{2\pi i}{\kappa + N}. \quad (6)$$

Эти же самые многочлены так же являются инвариантами узлов и известны как полиномы ХОМФЛИИ-ПТ (аббревиатура по первым буквам фамилий первооткрывателей), которые впервые появились в работах [46; 47] исходя из совершенно других соображений. Также было установлено, что для

произвольных представлений R группы $SU(N)$ ответы совпадают с квантовыми sl_N инвариантами узлов, которые были введены Н.Решетихиным и В.Тураевым в серии работ [29; 48–51] с помощью квантовых групп и R -матриц. Если ввести новую переменную $A = q^N$, то получится аналитическое продолжение квантовых инвариантов узлов, которое в литературе называется цветным многочленом ХОМФЛИ-ПТ от двух переменных q и A . Специализируя переменную A , можно получить полиномы Александра $A = 1$, полиномы Джонса $A = q^2$, квантовые sl_N инварианты $A = q^N$. Кроме того, в супералгебрах $sl(M|N)$ есть такой сектор конечномерных представлений, для которых квантовые инварианты получаются из цветных многочленов ХОМФЛИ-ПТ при специализации $A = q^{M-N}$. В течение следующих 20 лет было написано огромное множество работ на эту тему и было открыто множество связей квантовых инвариантов узлов с различными разделами теоретической и математической физики. Вот лишь некоторые из них:

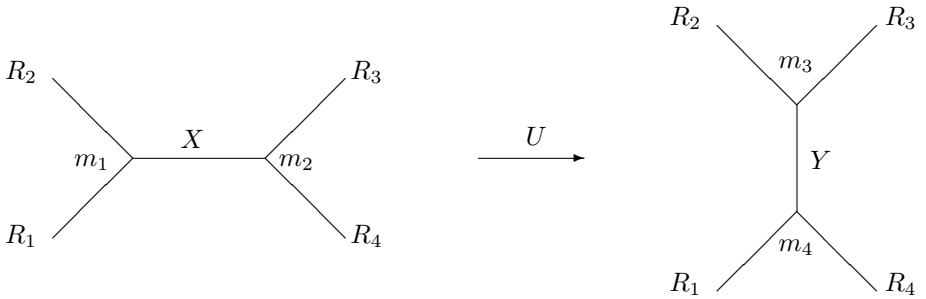
1. интеграл Концевича и инварианты Васильева [34; 52; 53];
2. гиперболическая геометрия и объем трехмерных многообразий [54; 55];
3. теория топологических струн и число БПС (Богомольный-Прасад-Соммерфельд) состояний [56–62];
4. симплектическая геометрия и инварианты Громова-Виттена [63–65];
5. топологические накрытия и числа Гурвица [66–68];
6. матричные модели и тау-функции [64; 69–72];
7. квантовые вычисления и анионы [73–75].

Таким образом, интерес к квантовым инвариантам узлов проистекает не столько из-за их способности хорошо различать топологию узлов, сколько из-за их основополагающей роли в описании различных разделов фундаментальной математики и теоретической физики.

Хотя и континуальный интеграл Черна-Саймонса, и теория представлений квантовых групп *в принципе* позволяют вычислить любой желаемый полином раскрашенного узла, на практике конечномерные представления, отвечающие диаграммам Юнга вида $[2,1]$ или $[3,1]$, оставались вне досягаемости до недавнего времени. Неизбежно, независимо от выбранного подхода, приходится иметь дело с так называемыми квантовыми $6j$ -символами, также известными как квантовые коэффициенты Рака-Вигнера.

$$U_{R_1, R_2, R_3}^{R_4} : \left\{ (R_1 \otimes R_2) \otimes R_3 \longrightarrow R_4 \right\} \longrightarrow \left\{ R_1 \otimes (R_2 \otimes R_3) \longrightarrow R_4 \right\} \quad (7)$$

или графически



где левая и правая стороны представляют собой два различных базиса в пространстве переплетений (инвариантных тензоров квантовой группы) $R_1 \otimes R_2 \otimes R_3 \rightarrow R_4$. Каждый базис представляет собой набор конечного числа векторов, раскрашенных выбором цвета внутреннего канала (X и Y на рисунке выше) и выбором переплетения в каждой из четырех трехвалентных вершин. Матрица Рака представляет собой изменение базиса с левой стороны на правую.

Коэффициенты Рака-Вигнера или $6j$ -символы играют важную роль в науке, поскольку они возникают во множестве различных задач. Основная проблема – это возникновение кратностей m_i , которые появляются, когда ранг алгебры становится довольно большим, например, для алгебры $sl(N)$ при $N > 2$. Тем не менее, даже для представлений без кратностей аналитические формулы $6j$ -символов известны далеко не для всех классов представлений. С физической точки зрения $6j$ -символы отвечают за смену базиса s -канала на базис t -канала и находят самое разнообразное применение от моделей квантовой гравитации до теории конденсированного состояния вещества. Более подробный обзор применения $6j$ -символов для описания физических систем приведен ниже.

Впервые $6j$ -символы появились в работе Е.Вигнера в 1940 году [76], где использовались как инструмент для исследования неприводимых представлений $SO(3)$ и $SU(2)$. В 1942 году при изучении атомных спектров Г.Рака [77] ввел понятие коэффициентов обратной связи (recoupling coefficients по-английски) для описания угловых моментов. С тех пор во всех учебниках по квантовой механике есть обязательно главы, посвященные $6j$ -символам, например, в классическом труде Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица [22]. Подробнее про применение $6j$ -символов в обобщенной теории углового момента для описания сложных систем (атомов, ядер, молекул, адронов, излучения) можно прочитать, например, в книге [23]. Отличие между определениями Вигнера и Рака состоит в нормировке, которая в случае $6j$ -символов Вигнера делает симметрию тетраэдра более явной.

В теории представлений исследование $6j$ -символов сконцентрировано, в основном, вокруг представлений алгебры $sl(N)$ и ее различных деформаций. Поскольку в теории углового момента важны конечномерные

неприводимые представления группы $SU(2)$, то в первую очередь исследования были сосредоточены вокруг этих представлений. Подытоживая эти работы, хочется обратить внимание на три самых интересных момента в этой истории. Во-первых, была открыта полная группа симметрий $6j$ -символов, которая содержит 144 элемента: группа вращения тетраэдра S_4 была обнаружена еще Е. Вигнером, а дополнительная группа симметрий S_3 была обнаружена Т. Редже в 1959 году [78]. Первые называются симметриями тетраэдра, а вторые называются симметриями Редже. Во-вторых, была получена явная аналитическая формула для всех таких $6j$ -символов в терминах гипергеометрической функции ${}_4F_3$ [79], которая оказалась связанной с системой дискретных ортогональных многочленов Рака [35]. Это открывает связь $6j$ -символов с теорией специальных функций, которая в дальнейшем оказалась очень плодотворной. В-третьих, у $6j$ -символов оказался очень интересный квазиклассический предел, когда все представления становятся большими [80]. Он, с одной стороны, осциллирует, а с другой стороны, связан с объемом соответствующего тетраэдра. Появление таких интересных свойств даже для самых простых представлений $SU(N)$ побудило большое количество исследователей по всему миру заняться изучением $6j$ -символов.

Все дальнейшие исследования $6j$ -символов можно условно разделить на три направления:

1. конечномерные представления для старших рангов $sl(N)$;
2. бесконечномерные представления $sl(2)$;
3. обобщения на всевозможные другие алгебры, например, $so(N)$, $sp(N)$, $U_q(sl_N)$, $su(1|1)$, $osp(1|2)$ и др.

Конечномерные представления $sl(N)$. Естественным продолжением работ по $6j$ -символам стал переход от группы $SU(2)$ к группе $SU(3)$, поскольку Стандартная модель включает эту группу и для описания процессов рассеяния потребуются $s-t$, $s-u$ и $t-u$ кроссинг-матрицы [81]. Группа $SU(3)$ уже достаточно общая и расширения на произвольный ранг прямолинейны, поэтому удобно работать сразу в общем случае. Случаем общего положения для представлений алгебр старшего ранга является наличие нетривиальных кратностей $m_i > 1$. Насколько известно автору, никаких замкнутых аналитических формул в этом случае пока не найдено. Тем не менее, существуют методы вычислений конкретных коэффициентов для фиксированных представлений, см. например [82]. Однако если рассмотреть случай, когда все кратности тривиальны $m_i = 1, \forall i$, то работать станет проще. И хотя, насколько нам известно, общий случай произвольных $6j$ -символов без кратностей для $sl(N)$ пока еще остается неизученным, но ряд интересных результатов был получен. Если положить представления R_1 и R_3 полностью (анти)симметричными, то вне зависимости от того, чему равны оставшиеся четыре представления, такой $6j$ -символ будет без

кратностей. Общая формула была получена в [83] и независимо в [84], см. также работу [85]. При этом в работе [84] были определены ортогональные многочлены гипергеометрического типа от многих переменных, которые обобщают полиномы Рака, и ответ был выражен через них.

В физических приложениях $6j$ -символы для конечномерных представлений старших рангов имеют широкое применение. Как уже было сказано, они описывают $s-t$, $s-u$ и $t-u$ кроссинг-матрицы [81]. Например, $6j$ -символы с кратностями группы $SU(3)$ используются для описания эффекта Ландау-Померанчука-Мигдала в кварк-глюонной плазме, см. в качестве примера недавнюю работу [86] и ссылки в ней.

Случай $6j$ -символов с полностью антисимметричными представлениями применим для задач ядерной спектроскопии в системах идентичных фермионов, особенно использующих методы спектральных распределений, разработанные в [87]. Для симметрических представлений можно также рассмотреть систему идентичных нуклонов, охватывающую большую часть модельного пространства ядерных оболочек, где соответствующая унитарная группа $SU(N)$, с $N = (2j_1 + 1) + (2j_2 + 1) + \dots$, может включать большие значения N , где j_1, j_2, \dots — это угловые моменты нуклонов [83].

Список физических приложений огромен, для примера приведем еще несколько работ по самой разнообразной тематике: в решеточной калибровочной теории поля [26]; в теории конденсированного состояния вещества $6j$ -символы появляются в задачах, связанных с квантовыми состояниями ультрахолодных щелочноземельных атомов, которые преобразуются по представлениям $SU(N)$ [37]; в теории полупроводников для построения кубитов [28].

Бесконечномерные представления $sl(2)$. Хотя в данной диссертации изучаются только конечномерными представлениями, вкратце стоит упомянуть про бесконечномерные представления, потому что конечномерные представления вкладываются в бесконечномерные как частные случаи. Однако методы работы с бесконечномерными представлениями зачастую сильно отличаются от методов для конечномерных случаев, поэтому разумно их выделить в отдельный класс. Для таких представлений $6j$ -символы были впервые получены в работах [88; 89]. Впоследствии с помощью диаграммной техники Фейнмана они были получены в [90] в виде бесконечной суммы интегралов типа Меллина-Барнса, что снова отсылает полученные результаты к теории специальных функций гипергеометрического типа. В продолжении этих работ недавно [91] было получено, что эти $6j$ -символы являются частным случаем эллиптической гипергеометрической V -функции (определения можно найти в [92]), которая также описывает эллиптические $6j$ -символы [93]. Таким образом, на сегодняшний день для алгебр ранга 1 эллиптическая V -функция описывает самые общие $6j$ -символы.

В физических приложениях бесконечномерные представления $sl(2, \mathbb{C})$ появляются в высокоэнергетическом режиме квантовой хромодинамике [94], при этом рассеяние глюонов описывается одномерной решеточной моделью [95], которая полностью интегрируема [96].

Обобщения на другие алгебры. Среди всех алгебр для нас выделенным примером является квантовая версия $U_q(sl_N)$ алгебры $sl(N)$, поскольку настоящая работа посвящена исследованием $6j$ -символов именно такой алгебры. За определениями мы отсылаем к книге [97] и ссылкам на первоисточники внутри. С одной стороны, эта алгебра сложнее своей классической версии и в ней больше структур. С другой стороны, все полученные ответы легко редуцируются к классическим ответам, если положить $q = 1$.

Первым важным результатом для квантовых $6j$ -символов является формула Кириллова-Решетихина [98] для конечномерных представлений $U_q(sl_2)$, которая обобщает все классические результаты. Ответ выражен через q -гипергеометрическую функцию, которая редуцируется к ортогональным полиномам q -Рака (см. также [99–103]). Некоторые общие свойства для алгебры произвольного ранга $U_q(sl_N)$ были получены в [104]. Некоторые методы вычисления произвольных квантовых $6j$ -символов с простыми примерами обсуждаются в [104; 105].

Обобщение специального случая без кратностей [83; 84], который упоминался выше для классических алгебр, был получен в работе [106], которая осталась совершенно незамеченной. Ответ получен в виде многократной суммы гипергеометрического типа. Поскольку эта работа оставалась долгое время никому неизвестной, то ряд ее частных случаев был переоткрыт совсем недавно [107], в том числе в работах автора [2], правда, совершенно другими методами.

Ответы для конечномерных представлений с кратностями до работ автора были получены только в работе [25], если не считать совсем простых примеров из [105]. Там изучен случай представления $[2,1]$ для так называемых эксклюзивных матриц Рака-Вигнера. Подробнее о них чуть ниже.

Свое применение квантовые $6j$ -символы находят в рациональных конформных теориях поля, где они играют роль матриц слияния [108], о конкретной модели ВЗНВ уже упоминалось выше. Они применяются при вычислении инвариантов Тураева-Виро трехмерных многообразий [31; 32]. Также они играют ключевую роль в некоторых моделях 3-мерной квантовой гравитации, см. для примера [27; 109–111]. Они также важны в моделях топологического квантового компьютера [74; 75].

Квантовые $6j$ -символы для бесконечномерных представлений алгебры $U_q(sl(2, \mathbb{R}))$ были вычислены в [112]. Там же обсуждается связь с квантовой теорией Лиувилля и со специальными функциями – квантовыми дигамма-функциями Фаддеева. Развитие этого сюжета продолжено в работе [113],

где получены 6j-символы для $U_q(\mathfrak{osp}(1|2))$ в рамках исследования суперсимметричной теории Лиувилля. Результаты для 6j-символов бесконечномерных представлений $U_q(\mathfrak{su}(1|1))$ получены в [114], где обсуждается связь с полиномами Аски-Вильсона, которые являются аналитическим продолжением полиномов q-Рака.

Другой пласт работ посвящен исследованиям 6j-символам алгебры $so(N)$ или ее квантовой деформации $U_q(so(N))$. Результаты для конечномерных симметрических представлений классической $so(N)$ были получены в [115], обобщения на квантовый случай для простейших представлений [116]. В физических приложениях такие 6j-символы возникают при описании эффекта Яна-Теллера, см. для примера [117; 118], а также в высокотемпературном режиме решеточных $SO(N)$ -моделей [119].

В зависимости от того, какую проблему в теории узлов необходимо решить, могут потребоваться различные типы матриц Рака. Если в исходном формализме Решетихина-Тураева требовались все они, то некоторые упрощения могут быть достигнуты за счет использования его современных модификаций. Нас особенно интересуют следующие два класса матриц Рака:

$$\text{инклюзивные : } \mathcal{U}_Q \text{ с } R_1 = R_2 = R_3 = R, \quad R_4 = Q \in R^{\otimes 3} \quad (8)$$

и

$$\begin{aligned} \text{экссклюзивные : } S \text{ с } R_1 = R_2 = R_4 = R, \quad R_3 = \bar{R} \\ \bar{S} \text{ с } R_1 = R_3 = R_4 = R, \quad R_2 = \bar{R} \end{aligned} \quad (9)$$

Эти два класса матриц Рака позволяют вычислить полиномы ХОМФЛИПТ для двух больших классов узлов. Инклюзивные (термин относится к произвольности конечного представления $Q \in R^{\otimes 3}$) матрицы \mathcal{U}_Q позволяют вычислить полиномы ХОМФЛИ, раскрашенные представлением R , для произвольной трехнитевой косы $\mathcal{L} = (m_1, n_1 | m_2, n_2 | \dots)$ через [120],

$$H_R^{(m_1, n_1 | m_2, n_2 | \dots)}(A, q) = \sum_{Q \in R^{\otimes 3}} \frac{d_Q}{d_R} \cdot \text{Tr}_Q \left(\mathcal{R}_Q^{m_1} \mathcal{U}_Q \mathcal{R}_Q^{n_1} \mathcal{U}_Q^\dagger \mathcal{R}_Q^{m_2} \mathcal{U}_Q \mathcal{R}_Q^{n_2} \mathcal{U}_Q^\dagger \dots \right) \quad (10)$$

где d_R — квантовая размерность представления R алгебры Ли sl_N , выраженная через переменную $A = q^N$, а \mathcal{R}_Q — диагональная матрица с элементами

$$\lambda_Y = \epsilon_Y q^{z_Y}, \quad Y \in R^{\otimes 2} \quad (11)$$

где $\varkappa_Y = \sum_{(i,j) \in Y} (ij)$ — значение оператора Казимира в представлении Y , а $\epsilon_Y = \pm 1$ в зависимости от того, принадлежит ли Y к симметричному или антисимметричному квадрату R . Для других простых алгебр Ли существуют аналогичные формулы, см. краткий обзор [121].

Эксклюзивные матрицы S и \bar{S} , где в "конечном состоянии" произведения $R \otimes R \otimes \bar{R}$ подбирается только R , определяют [122; 123] строительные блоки, которые позволяют вычислить ХОМФЛИ в R -цвете для произвольных древовидных узлов [124; 125] $\mathcal{K} = \{F^{I,k_I}\}$:

$$H_R^{\{F_I\}} = \sum_{X_I \in R \otimes R \text{ или } R \otimes \bar{R}} \prod_{I,J} P_{X_I, X_J} \prod_{k_I} F_{X_I}^{\{I, k_I\}}, \quad (12)$$

где пропагаторы $P_{X'X''}$, соединяющие вершины I , являются просто матрицами $S_{\bar{X}'X''}$ или $\bar{S}_{\bar{X}'X''}$ (верхние черточки относятся к двойным линиям с антипараллельной ориентацией, две параллельные вершины никогда не соединяются), а пальцы, прикрепленные к вершинам, являются произвольными матричными элементами типа

$$F_X = \left(\dots S \bar{\mathcal{R}}^{l_3} S \mathcal{R}^{l_2} S^\dagger \bar{\mathcal{R}}^{l_1} \bar{S} \right)_{\emptyset X}, \quad X \in R \otimes R \text{ или } R \otimes \bar{R}. \quad (13)$$

Несмотря на ограниченность, эти два класса узлов достаточно богаты и уже достаточно информативны: в частности, второй класс содержит нетривиальные пары узлов-мутантов. Вычисление инклюзивных и эксклюзивных матриц Рака может пролить свет на свойства этих двух классов узлов.

Различение мутантных узлов — очень сложная топологическая задача. Известно [126], что многочлены ХОМФЛИ, раскрашенные бескратными представлениями, не могут различать мутантов, а представления с кратностями, по крайней мере во всех известных нам случаях, могут (см. недавние работы [127—129] по этой теме). Представления без кратностей нумеруются всеми прямоугольными диаграммами Юнга, поэтому представление [3,3] также относится к этому типу. Однако квантовые 6j-символы по-прежнему представляют большой интерес для таких представлений. В первую очередь нас интересуют их аналитические свойства. Например, известно, что любой 6j-символ в $SU(2)$ (а кратностей для $SU(2)$ вообще нет) можно описать с помощью ортогонального полинома Рака [35], который выражается через гипергеометрическую функцию ${}_4F_3$. Из этого выражения, например, легко найти все их $S_4 \times S_3$ симметрии: тетраэдрическую и Редже. Также из явного выражения легко получить известную асимптотическую формулу Понцано-Редже [80] через объем соответствующего тетраэдра.

Кроме того, согласно [122; 130], комбинируя 3-нитевую косу и древесные косы, можно построить большой класс узлов и зацеплений, которые

мы называем *1-петлевыми* зацепления. Этот класс определенно включает в себя все древовидные зацепления и зацепления, которые имеют реализацию косы из 3 нитей. Необходимо обратить внимание, что эти 3-нитевые и древовидные классы не покрывают всю таблицу Рольфсена, в то время как 1-петлевой класс содержит всю таблицу Рольфсена, все 3-нитевые зацепления, все древовидные зацепления и, например, все мутантные узлы с 11 пересечениями.

Целью работы является построение методов вычисления квантовых инвариантов узлов и квантовых б \bar{j} -символов, а также описание и исследование их различных свойств, в первую очередь, симметрий.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. разработать методы вычисления квантовых б \bar{j} -символов для произвольных конечномерных представлений алгебры $U_q(sl_N)$ для произвольных N и при общих значениях параметра квантовой деформации q ;
2. разработать методы построения симметрий квантовых б \bar{j} -символов для произвольных конечномерных представлений алгебры $U_q(sl_N)$;
3. на основе полученных результатов для квантовых б \bar{j} -символов разработать методы вычисления квантовые инварианты узлов и зацеплений, раскрашенные произвольными конечномерными представлениями алгебры $U_q(sl_N)$; получить явные аналитические формулы для квантовых инвариантов различных представительных классов узлов и зацеплений;
4. исследовать полученные формулы для квантовых инвариантов узлов и зацеплений на предмет скрытых симметрий;
5. описать зависимость от $U_q(sl_N)$ -представления групповых структур квантовых инвариантов узлов, возникающих в пертурбативном разложении вильсоновских средних в теории Черна-Саймонса, и исследовать их свойства.

Научная новизна: Полученные в диссертационной работе результаты являются оригинальными и новыми разработками автора диссертации. Результаты опубликованы в ведущих российских и зарубежных журналах, докладывались на международных конференциях. Работы известны в научном сообществе и цитируются в работах других авторов.

Результаты работы имеют большую теоретическую значимость для исследований трехмерной квантовой теории поля с действием Черна-Саймонса, двумерной конформной теории поля Весса-Зумино-Новикова-Виттена, теории открытых топологических струн, моделей трехмерной гравитации, топологического квантового компьютера, открытых инвариантов Громова-Виттена. Полученные результаты открывают новые возможности для исследования различных математических объектов физическими метода-

ми. Большой прогресс в установлении тесных связей между современными подходами теоретической физики и фундаментальной математики, достигнутый в последнее время различными исследовательскими группами по всему миру, оказывается исключительно плодотворным как для физических теорий, так и для математических. Разработанные автором методы и полученные результаты регулярно используются отечественными и зарубежными научными группами.

Методология и методы диссертационного исследования. Результаты, представленные в диссертации, получены с помощью аналитических и численных вычислений. Для описания квантовых инвариантов узлов использовались методы теории интегрируемых систем, основанные на R -матричном подходе к описанию представлений группы kos . Для получения аналитических формул для инвариантов семейства узлов или зацеплений использовался метод эволюции собственных значений R -матриц. Для вычисления квантовых $6j$ -символов использовался метод векторов старшего веса, а также гипотеза о собственных значениях. Для исследования вильсоновских корреляторов использовались методы квантовой и конформной теории поля, например, разложение при больших N и операторное разложение. Для исследования спектров состояний Богомольного-Прасада-Зоммерфельда (далее БПС состояния) использовались методы калибровочно-струнной дуальности. Для исследования пертурбативного петлевого разложения вильсоновских операторов использовались методы теории групп, топологические методы и методы теории интегрируемых иерархий нелинейных дифференциальных уравнений.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработан алгоритм (метод старшего веса) вычисления квантовых $6j$ -символов произвольных конечномерных представлений алгебры $U_q(sl_N)$ для произвольного N и при общих значениях параметра квантовой деформации q . Алгоритм опирается на развитый автором подход с использованием пространств кратностей представлений и построением специальных ортонормированных базисов в этих пространствах. Применение алгоритма позволило впервые вычислить квантовые матрицы $6j$ -символов для ряда представительных примеров несимметрических представлений с кратностями.
2. Предложенный алгоритмический метод старшего веса использован для явного вычисления квантовых инвариантов узлов и зацеплений в частном, но представительном классе, для которого эти инварианты ранее не были известны (3-нитевые узлы и зацепления, раскрашенные несимметрическими представлениями алгебры $U_q(sl_N)$ для любых N , отвечающими диаграммам Юнга с двумя крюками и не более чем шестью клетками). Результаты согласуются с несколькими известными, но остающимися недоказанными, гипотезами.

тезами о квантовых инвариантах 3-нитевых узлов, раскрашенных несимметрическими представлениями: гипотеза факторизации, гипотеза универсальности, дифференциальное разложение и разложение эт Хофта.

3. Предложен метод, позволяющий установить наличие бесконечного числа симметрий 6j-символов для конечномерных представлений $U_q(sl_N)$ при $N \geq 3$.
 - 3.1. Для представлений без кратностей показано, что найденные симметрии содержат нетривиальные обобщения конечной группы симметрий, известной для $U_q(sl_2)$ (симметрии тетраэдра и Редже, продолжение которых на общий случай $U_q(sl_N)$ ранее не ожидалось).
 - 3.2. Для представлений с кратностями выдвинута гипотеза о существовании симметрий 6j-символов, которые индуцируются двухпараметрическим семейством перестроек диаграмм Юнга, определяющих представления $U_q(sl_N)$. Эти перестройки, названные тьяни-крюк в соответствии с их диаграммной реализацией, порождают отображения между шестерками представлений, оставляющие 6j-символы инвариантными. Для семейства перестроек тьяни-крюк найдены явные формулы.
4. Установлено, что квантовые 6j-символы для симметрических и сопряженных к ним $U_q(sl_N)$ -представлений при произвольном N пропорциональны квантовым 6j-символам для представлений алгебры $U_q(sl_2)$, определяемых перестройками диаграмм Юнга, которые отвечают исходным $U_q(sl_N)$ -представлениям. Коэффициенты пропорциональности, вообще говоря, нетривиальны и зависят от q , от N и от представлений; установлено, тем не менее, что указанные 6j-символы при произвольном N обладают тем же набором свойств, что и в случае $N = 2$. В частности, они являются ортогональными многочленами q-Рака и обладают асимптотикой Понцано-Редже, что открывает возможности приложения полученных в диссертации результатов к теории специальных функций и трехмерной квантовой гравитации.
5. Для обширного класса g -параметрических крендельных узлов найдена конструкция их квантовых инвариантов в виде сверток универсальных R -матриц, которые реализуют представление 2-нитевых узлов на косах специального вида (ширины 4). В сочетании с полученными в диссертации результатами для 6j-символов отсюда получены явные аналитические формулы квантовых инвариантов всех крендельных узлов и зацеплений, раскрашенных симметрическими представлениями алгебры $U_q(sl_N)$.

6. Показано, что симметрии \mathfrak{b}_j -символов тьяни-крюк индуцируют класс симметрий квантовых инвариантов узлов и зацеплений, раскрашенных $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ -представлениями. Установлено происхождение этих симметрий в пертурбативном и непертурбативном построении вильсоновских средних в теориях Черна-Саймонса соответственно с калибровочной группой $SU(N)$ и супергруппой $SU(N + M|M)$. Это дает прямое описание открытых нами новых симметрий квантовых инвариантов через известные симметрии в соответствующих теориях Черна-Саймонса, а также дополнительное свидетельство в поддержку сформулированной нами гипотезы о \mathfrak{b}_j -символах.
7. Построенные симметрии квантовых инвариантов типа тьяни-крюк позволили установить взаимно однозначное соответствие между групповыми структурами квантовых инвариантов узлов в конкретной специализации и подмножеством дисперсионных соотношений для солитонных решений в интегрируемой иерархии Кадомцева-Петвиашвили. С использованием методов теории интегрируемых систем отсюда получены явные аналитические выражения для всех групповых структур в теории Черна-Саймонса в специализации, отвечающей цветным полиномам Александра. Это, в частности, дает аналитическую зависимость групповых структур от представлений $SU(N)$, что существенно облегчает вычисления важных классов инвариантов узлов и зацеплений (инвариантов Васильева).

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается обоснованностью применяемых методов исследования и их сравнением с другими подходами, а также публикациями в престижных международных журналах со строгой рецензионной политикой. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, были доложены на научных семинарах в МИАН, ФИАН, НМУ, Сколтех, МФТИ, ИТЭФ, ЧелГУ, ИЯИ, в институте Кортвега-де Фриза (Амстердам, Нидерланды), в технологическом институте Бомбея (Мумбаи, Индия), в международном институте физики (Натал, Бразилия), в техническом университете (Гебзе, Турция). Полученные результаты также обсуждались на международных конференциях:

1. II International Conference "Quantum Topology" (Санкт-Петербург, 2015),
2. Workshop and School "Quantum Geometry, Duality and Matrix Models" (Москва, 2015),
3. "Duality, Integrability and Matrix Model" (Ицу, Япония, 2016),
4. "5th Workshop on Combinatorics of Moduli Spaces, Hurwitz Spaces and Cohomological Field Theories" (Москва, 2016),

5. The XXVth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries (Прага, Чехия, 2016),
6. III International Conference "Quantum Topology" (Москва, 2016),
7. Workshop and School "Quantum Geometry, Duality and Matrix Models" (Москва, 2016),
8. "New Trends in Integrable Models" (Натал, Бразилия, 2016),
9. "Physics and knot homologies" (Кембридж, Великобритания, 2017),
10. "Topological field/string theory, Frobenius algebras and integrable system" (Москва, 2017),
11. "Topological Field Theories, String Theory and Matrix Models" (Москва, 2017),
12. "Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics" (Баку, Азербайджан, 2018),
13. "Topological Field Theories, String theory and Matrix Models - 2018" (Москва, 2018),
14. "Actual Problems of Knot theory" (Стамбул, Турция, 2018),
15. International Russian-Japanese Conference on Interaction Between Algebraic Geometry and QFT (Москва, 2019),
16. International online conference "Integrability" dedicated to the 75th anniversary of A.K. Pogrebkov (2021).

Личный вклад. Все результаты, включенные в диссертацию, получены лично соискателем или при его прямом участии. Соискатель принимал непосредственное участие в выполнении всех работ и написании текстов всех публикаций. Имена соавторов указаны в соответствующих публикациях.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 21 печатном издании, индексируемых Web of Science и Scopus [1—21].

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, дается обзор современного состояния исследования и очерчивается круг задач, которым посвящена работа. Кратко излагаются основные положения топологической квантовой теории поля Черна-Саймонса, теории узлов и квантовых $6j$ -символов Рака-Вигнера.

В **главе 1** представлен R -матричный формализм для вычисления квантовых инвариантов узлов, представлены новые симметрии этих инвариантов и показано, как их можно вывести в рамках данного формализма из гипотезы о собственных значениях.

В **разделе 1.1** мы определяем инварианты зацепления с помощью квантовых \mathcal{R} -матриц, обсуждаем их конечномерные представления $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ и их связи с квантовыми коэффициентами Рака. Также мы формулируем гипотезу о собственных значениях, которая утверждает, что мат-

рица Рака полностью определяется набором нормированных собственных значений \mathcal{R} -матрицы.

В разделе 1.2 мы рассматриваем трехнитевые косы, раскрашенные симметричными представлениями, и уточняем конструкцию и гипотезу о собственных значениях из предыдущего раздела для этого частного случая. Это дает нам доказательство (в предположении, что гипотеза о собственных значениях верна), что все матрицы Рака, возникающие при построении, на самом деле являются матрицами Рака алгебры $U_q(sl_2)$. Доказательство этого факта состоит из следующих шагов:

1. Мы находим все представления X , которые возникают из тензорного произведения двух базовых представлений и могут дать представление Q после умножения на третье представление. Это делается в разделе 1.2.1.
2. Мы показываем, что набор нормированных собственных значений для представления $Q = [l, m, n]$, $l + m + n = r_1 + r_2 + r_3$ совпадает с набором нормированных собственных значений для $Q' = [l - 1, m - 1, n - 1]$. Это делается в разделе 1.2.2.
3. Путем рекурсии показывается, что матрица Рака для представления $Q = [l, m, n]$ совпадает с матрицей Рака для представления $Q_0 = [ln, mn]$, где диаграмма Юнга $[ln, mn]$ является разбиением числа $(r_1 - n + r_2 - n + r_3 - n)$.

В разделе 1.3 мы явно выписываем соответствующие коэффициенты Рака для неприводимых представлений алгебры $U_q(sl_2)$.

В разделе 1.4 мы рассматриваем зацепление L_{7a_3} , чтобы продемонстрировать, как наши результаты позволяют вычислять симметричный многочлен ХОМФЛИ.

В разделе 1.5 найдена новая симметрия цветных полиномов ХОМФЛИ, которая связывает пары полиномов, раскрашенных разными представлениями при определенных значениях N .

В разделе 1.6 показано на качественном уровне, как такая симметрия возникает из супералгебр. В разделе 1.6.1 основное внимание сосредоточено на ограничениях, которые такое свойство накладывает на общую теоретико-групповую структуру, а именно на весовую систему $sl(N)$, возникающую в пертурбативном разложении инварианта узла.

В разделе 1.7 раскрывается связь с гипотезой о собственных значениях. Главным образом показано, как проверить эту симметрию в предположении, что гипотеза о собственных значениях верна.

В главе 2 с помощью метода эволюции по дискретным значениям количества пересечений нитей в косе мы вычисляем полиномы ХОМФЛИ, раскрашенные произвольными симметрическими представлениями алгебры $sl(N)$, для большого семейства крендельных узлов и зацеплений, которые состоят из $g + 1$ двухнитевых кос с сонаправленной и противонаправленной ориентациями и зависящих от $g + 1$ целочисленных параметров.

В **разделе 2.1** разобраны простые подготовительные примеры: в **разделе 2.1.1** рассмотрен пример рода 1 (торические узлы) в фундаментальном представлении; в **разделе 2.1.2** рассмотрен пример рода 1, торические зацепления, одна компонента которых раскрашена фундаментальным представлением, а вторая сопряженным к фундаментальному; в **разделе 2.1.3** рассмотрен пример произвольного рода, но только в фундаментальном представлении.

В **разделе 2.2** представлен основной результат – формула для полиномов ХОМФЛИ произвольных крендельных узлов и зацеплений, раскрашенных симметрическими и сопряженными к ним представлениями. Формула состоит из 3 основных ингредиентов: квантовых размерностей, собственных значений операторов эволюции и матриц слияния.

В **разделе 2.3** даны краткие комментарии к основному результату, касающиеся общих замечаний про семейство кренделей.

В **разделе 2.4** показано, что матрицы слияния с точностью до коэффициента пропорциональности равны матрицам квантовых $6j$ -символов Рака-Вигнера для квантовой алгебры $U_q(sl_N)$.

В **разделе 2.5** с помощью полученных инвариантов дана классификация крендельных узлов с минимальным числом пересечений не более 10.

В **главе 3** изучаются теоретико-групповые структуры раскрашенных полиномов ХОМФЛИ в специальном пределе $A \rightarrow 1$, который называется цветным полиномом Александра. Устанавливается соответствие между дисперсионными соотношениями солитонных тау-функций иерархии Кадомцева-Петвиашвили (КП) и групповыми факторами Александра. Таким образом, цветной полином Александра вкладывается в действие производящей функции КП на солитонную тау-функцию. Используя данное соответствие, представлено достаточно простое комбинаторное описание групповых факторов в терминах диаграмм Юнга вместо хордовых диаграмм, для которых простое описание неизвестно.

В **разделе 3.1** представлено краткое введение в эту главу.

В **разделе 3.2** представлены основные результаты, полученные в этой главе. Там же обсуждаются качественные аспекты полученных утверждений, их важность и физические следствия.

Раздел 3.3 посвящен определениям цветного полинома Александра, который представлен как обобщение обыкновенного топологически определенного полинома Александра.

В **разделе 3.4** изучается пертурбативное разложение полинома и определяется система уравнений Александра. Далее изучается пространство решений этой системы, выводятся свойства этих решений и размерность пространства решений. Обсуждается интересная связь с суперсимметричными полиномами.

Раздел 3.5 посвящен общим свойствам уравнений КП и тау-функциям, необходимым для формулировки утверждения.

В **разделе 3.6** представлено доказательство основной теоремы, которая устанавливает соответствие между решениями уравнений Александра, солитонными дисперсионными соотношениями и комбинаторным описанием пертурбативных групповых факторов.

В **главе 4** приведен пример вычислений в рамках гипотезы о топологической струнной дуальности, которая связывает теорию Черна-Саймонса с топологической теорией струн на разрешенном конифолде – некомпактном многообразии Калаби-Яу. Этот пример иллюстрирует, как с помощью раскрашенных квантовых инвариантов узлов проверять струнные гипотезы о целочисленности чисел БПС состояний, которые определяют амплитуды ориентированной топологической струны.

В **разделе 4.1** дано краткое описание гипотез Гопакумара-Вафы и Оогури-Вафы о топологической струнной дуальности.

В **разделе 4.2** приведена точная формулировка гипотез о целочисленности: в **разделе 4.2.1** для группы $SU(N)$, в **разделе 4.2.2** для группы $SO(N)$. В **разделе 4.2.3** обсуждаются источники формул для проверки гипотез и кратко резюмируется недавний прогресс в вычислении полиномиальных инвариантов узлов.

В **разделе 4.3** подробно представлены проверки гипотезы о целочисленности для конкретного узла: в **разделе 4.3.1** для группы $SU(N)$, в **разделе 4.3.2** для группы $SO(N)$, а в **разделе 4.3.3** для зацепления. В **разделе 4.3.4** выписаны инклюзивные матрицы Рака, которые необходимы для вычисления полиномов для двухкомпонентных зацеплений из предыдущего раздела и проверки гипотезы о целочисленности.

Раздел 4.4 посвящен первому применению полученных результатов: наблюдению гауссовского распределения инвариантов Лабастиды-Мариньо-Оогури-Вафы (ЛМОВ). Представлена точная формулировка и свидетельства в поддержку этого нового загадочного наблюдения о старых не до конца понятых величинах. Это, вероятно, подразумевает, что БПС состояния, подсчитываемые числами ЛМОВ, на самом деле могут быть составными частями, сделанными из еще более элементарных объектов.

В **разделе 4.5** обсуждаются возможные теоретические объяснения наблюдаемого феномена. Сначала в **разделе 4.5.1** обсуждаются общие вопросы, связанные с подсчетом состояний, в **разделе 4.5.2** определяются плетистические экспоненты и обсуждаются их свойства. В **разделе 4.5.3** для полноты картины делается обзор работ по интерпретации чисел ЛМОВ с точки зрения подсчета отображений римановых поверхностей с границами. В **разделе 4.5.4** кратко приводятся основные формулы для различных распределений.

В **разделе 4.6** приводятся еще несколько гауссовских и биномиальных графиков, чтобы лучше проиллюстрировать явление. Также обсуж-

даются различные связанные проблемы, в частности, зависимости чисел ЛМОВ не только от рода римановой поверхности, но также от заряда и узла, последнее для естественных серий 2-нитевых и 3-нитевых торических узлов и скрученных узлов и для различных представлений.

В разделе 4.7 обсуждается вопрос насколько часто встречаются гауссовские распределения коэффициентов, действительно ли это экзотика среди «реалистичных» больших многочленов с положительными коэффициентами. В качестве примера разбираются квантовые числа и их отношения.

В главе 5 представлены новые симметрии и соотношения квантовых б j -символов. Приведено доказательство гипотезы о собственных значениях для квантовой алгебры sl_2 .

В разделе 5.1 дается краткое введение в историю вопроса о симметриях б j -символов.

В разделе 5.2 приводятся определения коэффициентов Рака и б j -символов для $U_q(sl_N)$. Рассматриваются б j -символы, которые содержат только симметрические и сопряженные симметрическим представления. Все эти б j -символы могут быть преобразованы с помощью симметрии тетраэдра в два типа эксклюзивных б j -символов, которые уже фигурировали в главе 2. Для типа I единственным сопряженным симметрическому представлением является второе, для типа II - третье. Каждый тип можно рассматривать как естественное обобщение б j -символов $U_q(sl_2)$, потому что каждое разложение тензорного произведения для этого случая не имеет кратностей и может быть занумеровано целым числом, а не всей диаграммой Юнга.

В разделе 5.3 рассматривается выражение для обоих типов. Сначала доказывается, что выражение можно упростить, после чего ряд становится намного больше похож на ряд $U_q(sl_2)$. Это делается для обоих типов независимо, и, похоже, они могут быть представлены как одно универсальное выражение для обоих типов. Затем оно выражается через q -гипергеометрическую функцию ${}_4F_3$ с некоторым множителем. Доказывается, что это выражение не имеет ограничений на свои аргументы. В результате выражение становится более удобным для изучения симметрий.

В разделе 5.4 анализируется полученное гипергеометрическое выражение. Найдено преобразование между рассматриваемыми б j -символами алгебры $U_q(sl_N)$ и б j -символами для $U_q(sl_2)$. Этот результат дает множество возможностей для обобщения хорошо известных свойств б j -символа $U_q(sl_2)$ на рассматриваемый случай.

В качестве непосредственного следствия такого соотношения в разделе 5.5 выводится классическая ($q = 1$) асимптотику б j -символов, используя известные результаты для $U(sl_2)$. Изначально этот результат был написан в терминах ассоциированного тетраэдра. Обобщение на $U(sl_N)$

модифицирует выражение так, что тетраэдр теперь зависит от N и деформируется по-разному для двух типов бj-символов.

В разделе 5.6 исследуются симметрии полученного выражения для бj-символов. Полученный ряд ${}_4\Phi_3$ имеет две известные симметрии: перестановка аргументов в каждой строке и преобразование Сирса. Полное число гипергеометрических симметрий обоих типов равно 23040. Тем не менее, только 24 из них образуют группу симметрий бj-символа типа I и 12 – типа II. Некоторые из них тетраэдральные, другие могут быть описаны как обобщение симметрий Редже для $N \geq 2$.

Также рассматриваются дополнительные симметрии, которые связывают бj-символы $U_q(sl_N)$ и $U_q(sl_M)$ в разделе 5.6.4 и разделе 5.6.5. Они получены в терминах симметрий между гипергеометрическими рядами, поэтому необходимо подобрать нормировку, соответствующую бj-символам. Найдены нетривиальные выражения для обоих типов и приведены примеры. Основными результатами этих подразделов являются симметрии, которые обобщают перестановки отличным от тетраэдрального способом. Они переходят в обычные хорошо известными симметрии при $N = 2$, а при $N > 2$ явно зависят от N .

В разделе 5.7 гипотеза о собственных значениях переформулируется таким образом, чтобы с ней было удобно работать в данной главе. Все начинается с общей формулировки гипотезы, а затем ограничивается конкретным классом матриц Рака.

В разделе 5.8 рассматриваются 3 симметрических входящих представления и произвольное выходящее. Это позволяет свести гипотезу к системе линейных уравнений. В результате все предсказанные симметрии перечислены как решения системы.

В разделе 5.9 приводится доказательство гипотезы о собственных значениях для случая $U_q(sl_2)$. Хорошо известно, что существует 144 симметрии для $U_q(sl_2)$ бj-символов, но в терминах матриц Рака эти отношения приравнивают некоторые конкретные матричные элементы, а не обязательно матрицы целиком. Если рассматривать только матричные симметрии бj-символов, то остается 8 эквивалентных матриц. Все эти соотношения получены с помощью гипотезы о собственных значениях для случая $U_q(sl_2)$. Также верно, что условия гипотезы о собственных значениях выполняются для матриц Рака в $U_q(sl_2)$, которые равны из-за симметрии. Это означает, что в случае $U_q(sl_2)$ гипотеза о собственных значениях доказана.

В разделе 5.10 такая же процедура применяется для представлений $U_q(sl_{N>2})$, где возникает такое же количество соотношений – получается 8 симметрий. Есть несколько ключевых особенностей, которые отличают $N > 2$ от $N = 2$. Во-первых, эти симметрии не являются симметриями бj-символов при условии, что коэффициенты нормировки могут быть различными после применения симметрии. Также интересной особенностью обнаруженных симметрий является наличие в этих соотношениях свобод-

ного параметра. Этот параметр может принимать произвольные неотрицательные целые значения, и он позволяет нам приравнять бесконечный набор матриц Рака. Поскольку вывод очень похож для $N = 2$ и $N > 2$, можно видеть соответствие между симметриями в этих двух случаях и называть $U_q(sl_N)$ симметрии по аналогии с симметриями $U_q(sl_2)$. В частности, симметрия Редже может быть легко обобщена для этого класса матриц Рака. Также известно, что $U_q(sl_N)$ 6j-символы имеют симметрии тетраэдра, но полученные симметрии совпадают с ними только при $N = 2$.

Симметрии тетраэдра для $U_q(sl_N)$ связывают матрицы Рака, чей класс отличается от предыдущего раздела, этот класс включает эксклюзивные матрицы Рака. Фактически, в **разделе 5.11** исследуется эксклюзивный класс матриц Рака с двумя симметрическими входящими и выходящими представлениями, и получаются только симметрии тетраэдра. Затем рассматривается более сложный случай, чтобы продемонстрировать гибкость метода гипотезы о собственных значениях. Получаются 4 новые симметрии, которые нельзя выразить через симметрии тетраэдра.

В **заключении** приведены основные результаты диссертации.

В **приложении А** изложены необходимые элементы теории узлов.

Публикации автора по теме диссертации

1. Orthogonal Polynomials in Mathematical Physics / C.-T. Chan [и др.] // *Reviews in Mathematical Physics*. — 2018. — Т. 30, № 06. — С. 1840005.
2. *Mironov A., Morozov A., Sleptsov A.* Colored HOMFLY polynomials for the pretzel knots and links // *Journal of High Energy Physics*. — 2015. — Т. 2015, № 7. — С. 1—35.
3. *Lanina E., Sleptsov A., Tselousov N.* Chern-Simons perturbative series revisited // *Physics Letters B*. — 2021. — Т. 823. — С. 136727.
4. *Mishnyakov V., Sleptsov A., Tselousov N.* A Novel Symmetry of Colored HOMFLY Polynomials Coming from $\mathfrak{sl}(N|M)$ Superalgebras // *Communications in Mathematical Physics*. — 2021. — Т. 384, № 2. — С. 955—969.
5. *Mishnyakov V., Sleptsov A., Tselousov N.* A new symmetry of the colored Alexander polynomial // *Annales Henri Poincaré*. Т. 22. — Springer. 2021. — С. 1235—1265.
6. *Mishnyakov V., Sleptsov A.* Perturbative analysis of the colored Alexander polynomial and KP soliton τ -functions // *Nuclear Physics B*. — 2021. — Т. 965. — С. 115334.
7. Colored knot polynomials for arbitrary pretzel knots and links / D. Galakhov [и др.] // *Physics Letters B*. — 2015. — Т. 743. — С. 71—74.

8. Colored knot polynomials: HOMFLY in representation [2,1] / A. Mironov [и др.] // International Journal of Modern Physics A. — 2015. — Т. 30, № 26. — С. 1550169.
9. Racah matrices and hidden integrability in evolution of knots / A. Mironov [и др.] // Physics Letters B. — 2016. — Т. 760. — С. 45–58.
10. Checks of integrality properties in topological strings / A. Mironov [и др.] // Journal of High Energy Physics. — 2017. — Т. 2017, № 8. — С. 1–42.
11. Multi-colored links from 3-strand braids carrying arbitrary symmetric representations / S. Dhara [и др.] // Annales Henri Poincaré. Т. 20. — Springer. 2019. — С. 4033–4054.
12. HOMFLY polynomials in representation [3,1] for 3-strand braids / A. Mironov [и др.] // Journal of High Energy Physics. — 2016. — Т. 2016, № 9. — С. 1–35.
13. Quantum Racah matrices and 3-strand braids in irreps R with $|R| = 4$ / A. Mironov [и др.] // JETP letters. — 2016. — Т. 104, № 1. — С. 56–61.
14. Coloured Alexander polynomials and KP hierarchy / A. Mironov [и др.] // Physics Letters B. — 2018. — Т. 783. — С. 268–273.
15. *Sleptsov A.* Vassiliev invariants for pretzel knots // International Journal of Modern Physics A. — 2016. — Т. 31, № 27. — С. 1650156.
16. Gaussian distribution of LMOV numbers / A. Mironov [и др.] // Nuclear Physics B. — 2017. — Т. 924. — С. 1–32.
17. *Morozov A., Sleptsov A.* New Symmetries for the $U_q(sl_N)$ 6-j Symbols from the Eigenvalue Conjecture // JETP Letters. — 2018. — Т. 108, № 10. — С. 697–704.
18. *Mironov A., Morozov A., Sleptsov A.* On 6j-symbols for symmetric representations of $U_q(su_N)$ // JETP Letters. — 2017. — Т. 106, № 10. — С. 630–636.
19. *Alekseev V., Morozov A., Sleptsov A.* Interplay between symmetries of quantum 6j-symbols and the eigenvalue hypothesis // Letters in Mathematical Physics. — 2021. — Т. 111, № 2. — С. 1–29.
20. *Shakirov S., Sleptsov A.* Quantum Racah matrices and 3-strand braids in representation [3,3] // Journal of Geometry and Physics. — 2021. — Т. 166. — С. 104273.
21. *Alekseev V., Morozov A., Sleptsov A.* Multiplicity-free $U_q(sl_N)$ 6-j symbols: Relations, asymptotics, symmetries // Nuclear Physics B. — 2020. — Т. 960. — С. 115164.

Список литературы

22. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Курс теоретической физики. — М. : Наука, 1976. — 768 с. — Т. 3: Квантовая механика. Нерелятивистская теория.
23. *Cowan R.* The theory of atomic structure and spectra / Los Alamos Series in Basic and Applied Sciences. — Berkeley, Los Angeles, London : University of California Press, 1981. — 650 с.
24. *Govindarajan T., Kaul R., Ramadevi P.* Three Dimensional Chern-Simons Theory as a Theory of Knots and Links III : Compact Semi-simple Group // Nuclear Physics B. — 1993. — Т. 402. — С. 548–566. — arXiv: [hep-th/9212110](https://arxiv.org/abs/hep-th/9212110) [[hep-th](#)].
25. *Gu J., Jockers H.* A Note on Colored HOMFLY Polynomials for Hyperbolic Knots from WZW Models // Communications in Mathematical Physics. — 2015. — Т. 338, № 1. — С. 393–456.
26. *Aroca J. M., Fort H., Gambini R.* On the Path Integral Loop Representation of (2+1) Lattice Non-Abelian Theory // Physical Review D. — 1998. — Т. 58, вып. 4. — С. 045007. — arXiv: [1407.5643](https://arxiv.org/abs/1407.5643) [[hep-th](#)].
27. *Livine E.* 3d Quantum Gravity: Coarse-Graining and q-Deformation // Ann. Henri Poincare. — 2017. — Т. 18. — С. 1465–1491. — arXiv: [1610.02716](https://arxiv.org/abs/1610.02716) [[hep-th](#)].
28. *Durst A., Yang-Mejia G., Bhatt R.* Quadrupolar interactions between acceptor pairs in p-doped semiconductors // Physical Review B. — 2020. — Т. 101, № 3. — С. 035202.
29. *Reshetikhin N., Turaev V.* Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups // Inventiones mathematicae. — 1991. — Т. 103, № 1. — С. 547–597.
30. *O. Babelon D. B.* A Quasi-Hopf algebra interpretation of quantum 3-j and 6-j symbols and difference equations // Physics Letters B. — 1996. — Т. 375. — С. 89–97. — arXiv: [q-alg/9511019](https://arxiv.org/abs/q-alg/9511019) [[math.QA](#)].
31. *Turaev V., Viro O.* State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols // Topology. — 1992. — Т. 31, вып. 4. — С. 865–902.
32. *Turaev V.* Quantum invariants of knots and 3-manifolds // de Gruyter Studies in Mathematics. — 1994. — Т. 18.
33. *Petr Dunin-Barkowski Alexey Sleptsov A. S.* Explicit computation of Drinfeld associator in the case of the fundamental representation of $gl(N)$ // J.Phys. A. — 2012. — Т. 45. — С. 385204. — arXiv: [1201.0025](https://arxiv.org/abs/1201.0025) [[hep-th](#)].
34. *Kontsevich M.* Vassiliev's knot invariants // Advances in Soviet Mathematics. — 1993. — Т. 16, № 2. — С. 137–150.

35. *Askey R., Wilson J.* A set of orthogonal polynomials that generalize the Racah coefficients or 6-j symbols // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 1979. — Т. 10, № 5. — С. 1008—1016.
36. *Kachurik I., Klimyk A.* On Racah coefficients of the quantum algebra $U_q(su_2)$ // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1990. — Т. 23, № 13. — С. 2717.
37. Two-orbital $SU(N)$ magnetism with ultracold alkaline-earth atoms / A. Gorshkov [и др.] // Nature physics. — 2010. — Т. 6, № 4. — С. 289—295.
38. *Schwarz A.* The partition function of a degenerate functional // Communications in Mathematical Physics. — 1979. — Т. 67, № 1. — С. 1—16.
39. *Atiyah M.* Topological quantum field theories // Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Scientifiques. — 1988. — Т. 68, № 1. — С. 175—186.
40. *Witten E.* Quantum field theory and the Jones polynomial // Communications in Mathematical Physics. — 1989. — Т. 121, № 3. — С. 351—399.
41. *Guadagnini E., Martellini M., Mintchev M.* Perturbative aspects of the Chern-Simons field theory // Physics Letters B. — 1989. — Т. 227, № 1. — С. 111—117.
42. *Guadagnini E., Martellini M., Mintchev M.* Wilson lines in Chern-Simons theory and link invariants // Nuclear Physics B. — 1990. — Т. 330, № 2—3. — С. 575—607.
43. Quantum field theory and link invariants / P. Cotta-Ramusino [и др.] // Nuclear Physics B. — 1990. — Т. 330, № 2—3. — С. 557—574.
44. *Jones V.* A polynomial invariant for knots via Von Neumann algebras // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1985. — Т. 12, № 1. — С. 103—111.
45. *Jones V.* Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials // Annals of Mathematics. — 1987. — Т. 126, № 2. — С. 335—388.
46. A new polynomial invariant of knots and links / P. Freyd [и др.] // Bull. Am. Math. Soc. — 1985. — Т. 12. — С. 239—246.
47. *Przytycki J., Traczyk P.* Invariants of links of Conway type // J. Knot Theor. — 1987. — Т. 4. — С. 115—139. — arXiv: [1610.06679](https://arxiv.org/abs/1610.06679) [[math.GT](https://arxiv.org/archive/math)].
48. *Reshetikhin N., Turaev V.* Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups // Communications in Mathematical Physics. — 1990. — Т. 127, № 1. — С. 1—26.

49. *Reshetikhin N.* Quantized universal enveloping algebras, the Yang-Baxter equation and invariants of links I, II // LOMI-preprint. — 1988. — Т. Е4/87, Е17/87.
50. *Решетихин Н. Ю.* Квазитреугольные алгебры Хопфа и инварианты связок // Алгебра и анализ. — 1989. — Т. 1, № 2. — С. 169–188.
51. *Turaev V.* The Yang-Baxter equation and invariants of links // *Inventiones Mathematicae*. — 1988. — Т. 92, № 3. — С. 527–553.
52. *Vassiliev V.* Cohomology of knot spaces // *Theory of Singularities and Its Applications*. — 1990. — Т. 1. — С. 23–69.
53. *Bar-Natan D.* On the Vassiliev knot invariants // *Topology*. — 1995. — Т. 34, № 2. — С. 423–472.
54. *Kashaev R.* A link invariant from quantum dilogarithm // *Modern Physics Letters A*. — 1995. — Т. 10, № 19. — С. 1409–1418.
55. *Kashaev R.* The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm // *Letters in mathematical physics*. — 1997. — Т. 39, № 3. — С. 269–275.
56. *Gopakumar R., Vafa C.* On the Gauge Theory/Geometry Correspondence // *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*. — 1999. — Т. 3. — С. 1415–1443.
57. *Ooguri H., Vafa C.* Knot invariants and topological strings // *Nuclear Physics B*. — 2000. — Т. 577, № 3. — С. 419–438.
58. *Labastida J., Mariño M.* Polynomial invariants for torus knots and topological strings // *Communications in Mathematical Physics*. — 2001. — Т. 217, № 2. — С. 423–449.
59. *Ramadevi P., Sarkar T.* On link invariants and topological string amplitudes // *Nuclear Physics B*. — 2001. — Т. 600, № 3. — С. 487–511.
60. *Labastida J., Mariño M., Vafa C.* Knots, links and branes at large N // *Journal of High Energy Physics*. — 2000. — Т. 4, № 11. — С. 007.
61. *Labastida J. M., Marino M.* A new point of view in the theory of knot and link invariants // *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*. — 2002. — Т. 11, № 02. — С. 173–197.
62. *Mariño M., Vafa C.* Framed knots at large N // *Contemporary Mathematics*. — 2002. — Т. 310. — С. 185–204.
63. *Marino M.* Enumerative geometry and knot invariants // *Infinite Dimensional Groups and Manifolds*. — De Gruyter, 2008. — С. 27–92.
64. *Brini A., Mariño M., Eynard B.* Torus knots and mirror symmetry // *Annales Henri Poincaré*. Т. 13. — Springer. 2012. — С. 1873–1910.

65. *Diaconescu D.-E., Shende V., Vafa C.* Large N duality, lagrangian cycles, and algebraic knots // Communications in Mathematical Physics. — 2013. — T. 319, № 3. — C. 813–863.
66. *Okounkov A., Pandharipande R.* Hodge integrals and invariants of the unknot // Geometry & Topology. — 2004. — T. 8, № 2. — C. 675–699.
67. *Sleptsov A.* Hidden structures of knot invariants // Int.J.Mod.Phys. A. — 2014. — T. 29. — C. 1430063.
68. Combinatorial structure of colored HOMFLY-PT polynomials for torus knots / P. Dunin-Barkowski [и др.] // Communications in Number Theory and Physics. — 2019. — T. 13, № 4. — C. 763–826.
69. *Mironov A., Morozov A., Sleptsov A.* On genus expansion of knot polynomials and hidden structure of Hurwitz tau-functions // The European Physical Journal C. — 2013. — T. 73, № 7. — C. 1–7.
70. *Alexandrov A., Mironov A., Morozov A.* Towards matrix model representation of HOMFLY polynomials // JETP letters. — 2014. — T. 100, № 4. — C. 271–278.
71. *Alexandrov A., Melnikov D.* Matrix integral expansion of colored Jones polynomials for figure-eight knot // JETP Letters. — 2015. — T. 101, № 1. — C. 51–56.
72. *Borot G., Eynard B.* All order asymptotics of hyperbolic knot invariants from non-perturbative topological recursion of A-polynomials // Quantum Topology. — 2015. — T. 6, № 1. — C. 39–138.
73. *Kitaev A.* Quantum computations: Algorithms and error correction // Russian Mathematical Surveys. — 1997. — T. 52, № 6. — C. 1191–1249.
74. From topological to quantum entanglement / D. Melnikov [и др.] // Journal of High Energy Physics. — 2019. — T. 2019, № 5. — C. 1–12.
75. Towards topological quantum computer / D. Melnikov [и др.] // Nuclear Physics B. — 2018. — T. 926. — C. 491–508.
76. *Wigner E.* On the matrices which reduce the Kronecker products of representations of SR groups: manuscript 1940 // Quantum Theory of Angular Momentum: A Collection of Reprints and Original Papers. — N.Y.: Academic Press, 1965. — C. 332.
77. *Racah G.* Theory of complex spectra. II // Physical Review. — 1942. — T. 62, № 9–10. — C. 438–462.
78. *Regge T.* Symmetry properties of Racah's coefficients // Nuovo Cim. — 1959. — T. 11. — C. 116–117.
79. *Jahn H., Howell K., Mott N.* New (Regge) symmetry relations for the Wigner 6j-symbol // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. T. 55. — Cambridge University Press. 1959. — C. 338–340.

80. *Ponzano G., Regge T.* Semiclassical limit of Racah coefficients // Spectroscopic and group theoretical methods in physics: Racah memorial volume. — Amsterdam: North-Holland, 1968. — C. 1–58.
81. *Rebbi C., Slansky R.* Crossing Matrices for $SU(2)$ and $SU(3)$ // Reviews of Modern Physics. — 1970. — T. 42, № 1. — C. 68.
82. *Butler P., Wybourne B.* Calculation of j and jm symbols for arbitrary compact groups. I. Methodology // International Journal of Quantum Chemistry. — 1976. — T. 10, № 4. — C. 581–598.
83. *Hecht K.* A simple class of $U(N)$ Racah coefficients and their application // Communications in Mathematical Physics. — 1975. — T. 41, № 2. — C. 135–156.
84. *Gustafson R.* A Whipple's Transformation for Hypergeometric Series in $U(n)$ and Multivariable Hypergeometric Orthogonal Polynomials // SIAM journal on mathematical analysis. — 1987. — T. 18, № 2. — C. 495–530.
85. *Wong M.* On the multiplicity-free Wigner and Racah coefficients of $U(n)$ // Journal of Mathematical Physics. — 1979. — T. 20, № 12. — C. 2391–2397.
86. *Arnold P.* Landau-Pomeranchuk-Migdal effect in sequential bremsstrahlung: From large- N QCD to $N = 3$ via the $SU(N)$ analog of Wigner $6j$ symbols // Physical Review D. — 2019. — T. 100, № 3. — C. 034030.
87. *Chang F., French J., Thio T.* Distribution methods for nuclear energies, level densities, and excitation strengths // Annals of Physics. — 1971. — T. 66, № 1. — C. 137–188.
88. *Ismagilov R.* On Racah operators // Functional Analysis and Its Applications. — 2006. — T. 40, № 3. — C. 222–224.
89. *Ismagilov R.* Racah operators for principal series of representations of the group // Sbornik: Mathematics. — 2007. — T. 198, № 3. — C. 369.
90. *Derkachov S., Spiridonov V.* The $6j$ -Symbols for the $SL(2, \mathbb{C})$ Group // Theoretical and Mathematical Physics. — 2019. — T. 198, № 1. — C. 29–47.
91. *Derkachov S., Sarkissian G., Spiridonov V.* The elliptic hypergeometric function and $6j$ -symbols for $SL(2, \mathbb{C})$ group // arXiv preprint arXiv:2111.06873. — 2021.
92. *Spiridonov V.* Essays on the theory of elliptic hypergeometric functions // Russian Mathematical Surveys. — 2008. — T. 63, № 3. — C. 405.

93. *Frenkel I., Turaev V.* Elliptic solutions of the Yang-Baxter equation and modular hypergeometric functions // The Arnold-Gelfand Mathematical Seminars. — Springer. 1997. — C. 171—204.
94. *Lipatov L.* High energy asymptotics of multi-colour QCD and two-dimensional conformal field theories // Physics Letters B. — 1993. — T. 309, № 3—4. — C. 394—396.
95. *Lipatov L.* Asymptotic behavior of multicolor QCD at high energies in connection with exactly solvable spin models // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. — 1994. — T. 59. — C. 596.
96. *Faddeev L., Korchemsky G.* High energy QCD as a completely integrable model // Physics Letters B. — 1995. — T. 342, № 1—4. — C. 311—322.
97. *Klimyk A., Schmudgen K.* Quantum groups and their representations. — Springer, 1997.
98. *Kirillov A. N., Reshetikhin N. Y.* Representations of the algebra $U_q(sl(2))$, q -orthogonal polynomials and invariants of links // New Developments in the Theory of Knots. Advanced Series in Mathematical Physics. T. 11. — 1990. — C. 202—256.
99. *Kachurik I., Klimyk A.* On Racah coefficients of the quantum algebra $U_q(su_2)$ // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1990. — T. 23, № 13. — C. 2717.
100. *Hou B., Hou B., Ma Z.* Clebsch-Gordan Coefficients, Racah Coefficients and Braiding Fusion of Quantum $sl(2)$ Enveloping Algebra (I) // Communications in Theoretical Physics. — 1990. — T. 13, № 2. — C. 181.
101. *Nomura M.* A Jordan-Schwinger representation of quadratic relations for $SU_q(2)$ operators and of the q -analog Wigner-Eckart theorem // Journal of the Physical Society of Japan. — 1990. — T. 59, № 7. — C. 2345—2354.
102. *Rajeswari V., Rao K. S.* Generalized basic hypergeometric functions and the q -analogues of 3- j and 6- j coefficients // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1991. — T. 24, № 16. — C. 3761.
103. *Smirnov Y., Tolstoj V., Kharitonov Y.* Projection operator method and q analog of angular momentum quantum theory. Racah coefficients, 3- j , 6- j -symbols and their symmetry properties. Metod proektsionnykh operatorov i q -analog kvantovoj teorii uglovogo momenta. Koehffitsienty Raka, 3- j , 6- j -simvoly i ikh svojstva simmetrii // Yadernaya Fizika;(USSR). — 1991. — T. 53, № 6.
104. *Lienert C., Butler P.* Racah-Wigner algebra for q -deformed algebras // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1992. — T. 25, № 5. — C. 1223.

105. *Pan F.* Racah coefficients of quantum group $U_q(n)$ // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1993. — T. 26, № 18. — C. 4621.
106. *Alisauskas S.* Biorthogonal coupling coefficients of $U_q(n)$ // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1995. — T. 28, № 4. — C. 985.
107. *Nawata S., Ramadevi P., Zodinmawia* Multiplicity-free quantum 6j-symbols for $U_q(sl_N)$ // Lett. Math. Phys. — 2013. — T. 103. — C. 1389–1398. — arXiv: [1302.5143](https://arxiv.org/abs/1302.5143) [[hep-th](#)].
108. *Moore G., Seiberg N.* Classical and quantum conformal field theory // Communications in Mathematical Physics. — 1989. — T. 123, № 2. — C. 177–254.
109. *O’Loughlin M.* Boundary actions in Ponzano–Regge discretization, quantum groups and AdS_3 // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. — 2002. — T. 6, № 5. — C. 795–826.
110. *Freidel L., Louapre D.* Ponzano–Regge model revisited: I. Gauge fixing, observables and interacting spinning particles // Classical and Quantum Gravity. — 2004. — T. 21, № 24. — C. 5685.
111. *Freidel L., Krasnov K.* Discrete spacetime volume for three-dimensional BF theory and quantum gravity // Classical and Quantum Gravity. — 1999. — T. 16, № 2. — C. 351.
112. *Ponsot B., Teschner J.* Clebsch–Gordan and Racah–Wigner Coefficients for a Continuous Series of Representations of $U_q(sl(2, \mathbb{R}))$ // Communications in Mathematical Physics. — 2001. — T. 224, № 3. — C. 613–655.
113. *Pawelkiewicz M., Schomerus V., Suchanek P.* The universal Racah–Wigner symbol for $U_q(osp(1|2))$ // Journal of High Energy Physics. — 2014. — T. 2014, № 4. — C. 1–26.
114. *Groenevelt W.* Wilson function transforms related to Racah coefficients // Acta Applicandae Mathematica. — 2006. — T. 91, № 2. — C. 133–191.
115. *Alisauskas S.* 6j-symbols for symmetric representations of $SO(n)$ as the double series // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 2002. — T. 35, № 48. — C. 10229.
116. On Knots, Complements, and 6 j-Symbols / H. Wang [и др.] // Annales Henri Poincaré. — Springer. 2021. — C. 1–30.
117. *Judd B., Lister G., Suskin M.* Some 6-j symbols for symplectic and orthogonal groups by Cerkaski’s method // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1990. — T. 23, № 24. — C. 5707.
118. *Judd B., Lo E., Velkov D.* Algebraic forms for the leading factor of the two-electron coefficients of fractional parentage for the atomic l shell // Molecular Physics. — 2000. — T. 98, № 16. — C. 1151–1157.

119. *Hormeß M., Junker G.* More on coupling coefficients for the most degenerate representations of $SO(n)$ // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1999. — T. 32, № 23. — C. 4249.
120. *Mironov A., Morozov A., Morozov A.* Character expansion for HOMFLY polynomials I: Integrability and difference equations // Strings, gauge fields, and the geometry behind: the legacy of Maximilian Kreuzer. — World Scientific, 2013. — C. 101–118.
121. *Mironov A., Morozov A.* Universal Racah matrices and adjoint knot polynomials: Arborescent knots // Phys. Lett. — 2016. — T. B755. — C. 47–57. — arXiv: [1511.09077](https://arxiv.org/abs/1511.09077) [[hep-th](#)].
122. Tabulating knot polynomials for arborescent knots / A. Mironov [и др.] // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2017. — T. 50, № 8. — C. 085201.
123. Colored HOMFLY polynomials of knots presented as double fat diagrams / A. Mironov [и др.] // Journal of High Energy Physics. — 2015. — T. 2015, № 7. — C. 1–70.
124. *Bonahon F., Siebenmann L.* New geometric splittings of classical knots, and the classification and symmetries of arborescent knots // preprint. — 2010. — URL: <http://dornsife.usc.edu/assets/sites/1191/docs/Preprints/BonSieb.pdf>.
125. *Caudron A.* Classification des noeuds et des enlacements. T. 81. — Université de Paris-Sud, Dép. de mathématique, 1982.
126. *Morton H., Cromwell P.* Distinguishing mutants by knot polynomials // Journal of Knot Theory and its Ramifications. — 1996. — T. 5, № 2. — C. 225–238.
127. *Morton H.* Mutant knots with symmetry // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 2009. — T. 146, № 1. — C. 95–107.
128. *Nawata S., Ramadevi P., Singh V.* Colored HOMFLY-PT polynomials that distinguish mutant knots // Journal of Knot Theory and its Ramifications. — 2017. — T. 26, № 14. — C. 1750096.
129. Distinguishing mutant knots / L. Bishler [и др.] // Journal of Geometry and Physics. — 2021. — T. 159. — C. 103928.
130. *Mironov A., Morozov A.* Towards effective topological field theory for knots // Nuclear Physics B. — 2015. — T. 899. — C. 395–413.