Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт ядерных исследований Российской академии наук

На правах рукописи

Харук Иван Вячеславович

Применение конструкции смежных классов к изучению теорий с нелинейной реализацией пространственно-временных симметрий

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физ.-мат. наук
Сибиряков Сергей Михайлович

Москва – 2019

Оглавление

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования

Понятие симметрий занимает одно из ключевых мест в современной фундаментальной физике. Причина этого в том, что применение подходов основанных на симметрийных соображениях оказалось крайне продуктивным при построении математических моделей физических явлений. В частности, это выражается в том, что имеющиеся экспериментальные данные по исследуемому явлению могут накладывать сильные ограничения на соответствующую математическую теорию. Подобные ограничения выражаются в требовании инвариантности уравнений теории относительно определенных преобразований, совокупность которых и называется симметриями теории. Наличие подобных симметрий сильно сужает класс возможных математических моделей явления, что существенно упрощает процедуру поиска последней. Также, поскольку множество всех симметрий образуют группу, оказывается возможным применить теоретико–групповой подход для построения соответствующих лагранжианов. В совокупности, это позволяет формализовать задачу построения искомой теорий и подойти к ней более конструктивно.

Одним из наиболее ярких примеров успешности применения теоретико–группового подхода стало создание теории сильных взаимодействий в 1960-х годах. А именно, поиск симметрий позволил не только осмыслить и систематизировать экспериментальные данные по известным на тот момент адронам, набор которых имел красноречивое название “зоопарка частиц”, но и предсказать новые. В итоге была обнаружена так называемая кварковая структура адронов. В терминах симметрий она кратко и, в то же время, объемлющие выражается тем, что сильные взаимодействия имеют внутреннюю, так называемую “ароматовую”, $SU(3)$ симметрию. Другой пример, о котором также необходимо упомянуть, это создание Стандартной Модели. Она наиболее полно описывает все известные нам на сегодняшний день фундаментальные взаимодействия (за исключением гравитации), и на языке теории групп выражается в том, что сильные и электрослабые взаимодействия имеют $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ симметрию, где под $SU(3)$ понимается "цветовая" симметрия. Стоит отметить, что данные симметрии являются калибровочными, то есть действующими в каждой точке пространства-времени независимо (при этом предполагается, что параметры преобразований являются гладкой функцией координат). Как ещё один пример, важнейшее наблюдение, что окружающий нас мир однороден и изотропен, привело к понятию Пуанкаре–инвариантности, которой должны обладать все физические теории. Наконец, требования независимости физических наблюдаемых от выбора координат можно рассматривать как основу общей теории относительности. Значимость перечисленных конструкций в современной физике невозможно переоценить.

В настоящее время применение теоретико–групповой подхода к построению физически значимых теорий очень хорошо разработано. Среди соответствующих техник можно выделить две, которые играют фундаментальную роль в теории представлений. Первая из них — это метод индуцированных представлений [1, 2]. Его важность заключается в том, что он позволяет естественным образом перейти от понятия элементов некоторого векторного пространства $\mathcal{V}$ к понятию функция $\mathcal{V}$–значных функций, которыми и являются все используемые в физике поля. В большинстве случаев, он эквивалентен введению полей как сечений над расслоением, но позволяет лучше проследить лежащую в основе этой конструкции групповую структуру. В частности, на использовании этой техники основан такой фундаментальный результат, как классификация всех неприводимых представлений группы Пуанкаре по Вигнеру [3, 4].

Второй важной техникой является конструкция смежных классов [1]. Значимость данной техники состоит в том, что при выполнении ряда условий она позволяет получить все необходимые величины для построения лагранжианов с произвольной группой симметрий G. Поскольку часть из этих симметрий может быть реализована нелинейно, это делает её незаменимой при построении эффективных низкоэнергетических действий, возникающих при спонтанном нарушении симметрий. Так, несмотря на невозможность проведения прямых вычислений в теории в силу сильносвязности последней, а также незнания явного механизма спонтанного нарушений симметрии, данная техника позволила описать физику пионов как связного состояния кварков. Стоит отметить, что в физической литературе формализм для построения эффективных теорий, возникающих при спонтанном нарушении внутренних симметрий, был впервые приведён в работах [5, 6]. В частности, в них было показано, что все возможные нелинейные реализации группы эквивалентны представлению, получаемому при использовании предлагаемого авторами подхода. Данная техника получила название CCWZ–конструкции (по первым буквам фамилии авторов), и, по сути, представляет конструкцию смежных классов для данного случая.

Обсуждаемая техника оказалась также незаменимой и с феноменологической точки зрения, поскольку позволяет установить соотношения между амплитудами различных процессов в случае наличия спонтанного нарушения симметрий в теории. Наличие подобных соотношений отображает тот факт, что “нарушенные” симметрии по–прежнему являются симметриями теории, только нелинейно реализованными. Данный факт позволяет предлагать и проверять возможные варианты ультрафиолетового пополнения теорий, что важно при попытках унификации известных взаимодействий, а также экспериментальной проверке существующих теорий. В частности, предположение о том, что электрослабые взаимодействия описываются калибровочной $SU(2) \times U(1)$ симметрией, которая спонтанно нарушается до $U(1)_V$ ненулевым вакуумным средним поля Хиггса,

$$SU(2) \times U(1) \to U(1)_V \ , \tag{1}$$

фиксирует вид взаимодействие поля Хиггса с остальными частицами. В настоящее время проверка подобных соотношений является одной из важнейших задач действующих экспериментов. Возможное отклонение от предсказанных Стандартной Моделью величин позволило бы продвинуться дальше в попытках расширения последней. А именно, обнаружение подобных отклонений позволило бы предположить как могут быть решены такие проблемы современной фундаментальной физики как проблемы тёмной материи и энергии и проблема иерархии масс.

Однако, несмотря на достаточно глубокую изученность обозначенных выше техник, можно выделить две физически интересные задачи, которые пока не были окончательно решены в их рамках.

Первая из них связана с построением эффективных лагранжианов в случае спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий [7]. Прямое изучение подобных систем показало, что они ведут себя качественно иным образом по сравнению с хорошо изученным случаем спонтанного нарушения внутренних симметрий в двух аспектах. Во–первых, стандартное правило, гласящее, что каждому нарушенному генератору симметрий необходимо сопоставить намбу–голдстоуновских моду, оказывается неверным, поскольку их полный набор может оказаться избыточным [8, 9]. Последнее понимается в том смысле, что различные конфигурации намбу–голдстоуновских полей могут описывать одно и то же возмущение параметра порядка. Например, флуктуации скалярной доменной стенки возможно описывать как с помощью намбу–голдстоуновского поля для нарушенной трансляционной инвариантности, так и в терминах намбу–голдстоуновских полей для нарушенных генераторов группы Лоренца [8]. В силу устоявшейся терминологии, в дальнейшем под намбу–голдстоуновскими модами будут пониматься все возмущения вакуума, получаемые при действии на него нарушенными генераторами (таким образом, избыточные поля также считаются намбу-голдстоновскими полями). Дальнейшее изучение данного вопроса показало, что возможная избыточность набора намбу–голдстоуновских полей тесно связана с представлением пространственно–временной группы, к которому принадлежит параметр порядка [10–12]. Чтобы исключить лишние поля и получить теории с правильным количеством степеней свободы, был предложен механизм, известный как обратный эффект Хиггса [8, 9]. Его суть заключается в том, что на часть намбу–голдстоуновских мод налагается согласованная с симметриями связь. Это позволяет уменьшить количество степеней свободы в теории, и нелинейно реализовать группу симметрий с помощью меньшего количества полей. Но, не смотря на то, что данный механизм понятен с математической точки зрения, его физический смысл остаётся предметом дискуссий [11–14]. Также не установлен однозначный математический критерий, когда подобные условия необходимо накладывать, а когда нет. Это вносит неопределенность в конструкцию, которой оказывается возможно преодолеть только при привлечении физических соображений. Однако, с математической точки зрения подобные неопределенности неестественны, поскольку схема спонтанного нарушения симметрий должна однозначно фиксировать требуемое количество намбу–голдстоуновских полей. Таким образом, данный аспект спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий не получил исчерпывающего объяснения в рамках принятого на сегодняшний день похода.

Второй особенностью спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий является то, что часть намбу–голдстоуновских полей может оказаться массивными [12, 15–17]. В этой связи стоить заметить что, *a priori*, намбу–голдстоуновсских поля не обязаны быть безмассовыми, и теорема Намбу–
Голдстоуна доказывает этот факт для спонтанного нарушения внутренних симметрий. Данная особенность спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий была также замечена с перспективы разрабатывания ультрафиолетового пополнения эффективных теорий [10]. А именно, была рассмотрена теория, возникающая в результате следующей схемы спонтанного

нарушения симметрий:

$$ISO(1,3) \times SO(3) \times U(1) \ \to \ (P_t + \mu Q) \times SO(3)_{diag} \ , \qquad (2)$$

где $ISO(1,3)$ – группа Пуанкаре, P_t – подгруппа временных трансляций, Q – генератор $U(1)$, μ является некоторым параметром, и $SO(3)$ является внутренней группой симметрий. Оказалось, что для её ультрафиолетового пополнения необходимо ввести массивные поля, которые не являются радиальными модами. Данные наблюдения согласуются с результатами применения конструкции смежных классов к схеме (2), поскольку часть возникающих при этом мод действительно оказываются массивными. Более того, массивными оказываются именно те моды, от которых можно избавиться путём применения обратного эффекта Хиггса. Также известны примеры теорий, которые описываются одинаковой схемой спонтанного нарушения симметрий, но имеют разный параметр порядка. Последнее приводит к тому, что в некоторых из них массивные намбу–голдстоуновские моды не возникают ни при каких энергиях, в то время как другие требуют их введения [10, 12]. Таким образом, обсуждаемая особенность теорий со спонтанно нарушенными симметриями, как и предыдущая, оказывается тесно связанной с пространственно–временным представлением параметра порядка. Это наблюдение показывает, что обе особенности подобных теорий могут быть тесно связаны между собой. Установление подобной связи позволило бы однозначно ответить на вопрос о физическом смысле обратного эффекта Хиггса и о том, когда часть намбу–голдстоуновских мод массивна. Однако, подобное исследование пока не было проведено.

Второй физически интересный вопрос, который также пока не был решён в рамках конструкции смежных классов, связан с построением конформно–инвариантных лагранжианов. Подобные теории представляют физический интерес в контексте так называемой AdS/CFT дуальности [18, 19], а также инфляционной теории и связанных проблем [20, 21]. Задача классификации представлений конформной группы и соответствующих им уравнений движения была давно решена в рамках метода индуцированных представлений [22]. Однако, вопрос о том, как необходимо применять конструкцию смежных классов к построению конформно–инвариантных лагранжианов, остаётся открытым. Решение данного вопроса позволило бы подойти более систематически к построению подобных теорий, а также прояснило бы роль намбу–голдстоуновских полей для специальных конформных преобразований возникающих как в ненарушенной, так и спонтанно нарушенной фазах. Главная причина почему подобная техника пока не была разработана заключается в том, что для применимости конструкции смежных классов оказывается необходимым выбрать смежный класс в виде

$$g_H = e^{iP_\mu x^\mu} e^{iK_\nu y^\nu} \ , \tag{3}$$

где P_μ и K_ν являются генераторами трансляций и специальных конформных преобразований соответственно. В соответствии со стандартной техникой x^μ следует рассматривать как координаты, в то время как роль y^ν остаётся неясной. Действительно, с одной стороны, рассматривать их как поля неестественно, поскольку известные конформные теории поля не обязательно включают в себя подобное векторное поле. С другой стороны, если рассматривать их как координаты, то конформные теории поля оказываются определенными на пространстве удвоенной размерности, и, таким образом, не соответствуют физическим теориям. В нескольких работах была предпринята попытка решения этой проблемы [23–25]. Однако, ни одну из них нельзя признать полностью успешной, поскольку они либо использовали методы, выходящие за пределы конструкции смежных классов, либо налагали *ad hoc* требования. Более того, в рамках предложенных подходов не были воспроизведены лагранжианы наиболее известных конформных теорий поля. Совокупность дынных фактов показывает, что задача построения конформно инвариантных теорий при помощи конструкции смежных классов пока не решена.

Несмотря на перечисленные выше проблемы, конструкция смежных классов, тем не менее, применяется для построения эффективных лагранжианов в случае спонтанного нарушения конформной инвариантности [9, 26, 27]. В этом случае смежный класс (3), помимо K_ν, содержит другие нарушенные генераторы, а все параметры, за исключением x^μ, рассматриваются как поля. Для этого случая известно, что y^ν не описывают независимые флуктуации параметра порядка [8, 9]. Поэтому, чтобы исключить y^ν из состава динамических полей, применяется обратный эффект Хиггса, который позволяет выразить y^ν через поле дилатона. Однако, поскольку не установлена роль y^ν в ненарушенной фазе, то корректность такой процедуры и её физический смысл остаются открытыми вопросами.

Цели и задачи работы

Целью настоящей работы является изучение и расширение границ применимости конструкции смежных классов при построении лагранжианов с заданными пространственно–временным симметриям, в том числе спонтанно нарушенным. Более точно, работа ставит перед собой следующие две задачи.

Первая задача заключается в разрабатывании техники построения эффективных лагранжианов при спонтанном нарушении пространственно–временных симметрий в рамках конструкции смежных классов, которая была бы лишена недостатков стандартного формализма. А именно, она должна, во–первых, вводить все физические поля (и только их) исходя из схемы спонтанного нарушения симметрий и представления параметра порядка, и, во–вторых, воспроизводить члены в эффективном лагранжиане, соответствующие массивным намбу–голдстоуновским полям. В частности, это подразумевает более глубокое изучение обратного эффекта Хиггса как с математической, так и физической точек зрений. Конечная цель данной задачи — это обобщение известных наблюдений в данной области и установление аналога теоремы Намбу–Голдстоуна для спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий, которая бы однозначно устанавливала количество и свойства намбу–голдстоуновских полей.

Вторая задача работы состоит в установление формализма построения конформно–инвариантных теорий в рамках конструкции смежных классов, в том числе в спонтанно–нарушенной фазе. Это позволит установить роль намбу–голдстоуновских полей для специальных конформных преобразований как в ненарушенной, так и в спонтанно нарушенной фазах. Данная цель включает в себя также изучение обратного эффекта Хиггса, его интерпретации и границ применимости в этом случае.

Методология и методы исследования

В основе стандартной техники смежных классов, используемой при построения эффективных теорий, лежит метод индуцированных представлений. Теоретическое обобщение данной связи с учётом всех нюансов позволит достичь целей настоящей работы.

Положения, выносимые на защиту

1. Установлен аналог теоремы Намбу–Голдстоуна для спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий. Показано, что всем генераторам, не аннигилирующим вакуум в начале координат, и только им, соответствуют независимые степени свободы.

2. Исследована физическая интерпретация обратного эффекта Хиггса в случае, когда часть намбу–голдстоуновских мод является избыточными. Показано, что он соответствует переопределению степеней свободы в теории таким образом, что поля материи не преобразуются под действием всех спонтанно нарушенных симметрий.

3. Разработан метод построения конформно–инвариантных теорий при помощи конструкции смежных классов. Показано, что “намбу–голдстоуновское” поле для специальных конформных преобразований играет роль координат вокруг одного из полюсов сферы. Правило вхождения

данного поля в конструируемые при помощи разработанной техники лагранжианы гарантирует, что вириальный ток подобных теорий является полной производной.

4. Установлен математически строгий способ построения конформно–инвариантных теорий со спонтанно нарушенной конформной инвариантностью. Показано, что стандартный подход к построению подобных теорий не является математически строгим, но, тем не менее, позволяет воспроизвести всевозможные эффективные лагранжианы, возникающие при спонтанном нарушении конформной группы.

5. Предложено расширение техники обратного эффекта Хиггса на случай, когда оказывается возможным наложить различные G–инвариантные условия связи.

Научная новизна работы

Все положения, выносимые на защиту, а также предложенные в работе конструкции являются новыми. В частности:

1. Установлен аналог теоремы Намбу–Голдстоуна для спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий (в предположении, что намбу-голдтоуновские поля не образуют канонически сопряженных пар координата–импульс). Также, дано новое правило подсчёта количества массивных намбу–голдстоуновских мод.

2. Предложено расширение метода индуцированных представлений на случай, когда атлас, на котором определена теория, должен содержать более одной карты. Частным случаем данной техники является установленное правило применения конструкции смежных классов для построения конформно инвариантных теорий.

Теоретическая и практическая значимость работы

В главе 3 установлено легко применяемое на практике правило подсчёта независимых намбу–голдстоуновских мод. Показано, что некоторые намбу–голдстоуновские поля могут быть массивными. Данный механизм образования массы может рассматриваться как альтернатива механизму Хиггса.

Изложенная в главе 2 конструкция построения конформно инвариантных теорий предоставляет систематический способ построения подобных теорий. В частности, изложенная конструкция является более простой, чем стандартный подход.

В целом, предложенные в работе методы развивают симметрийный подход к построению действий физически интересных теорий.

Основные публикации по теме диссертации

По материалам диссертации опубликовано 5 работ [28–32], из них 3 в рецензируемых международных изданиях, рекомендуемых ВАК.

Апробация работы

Результаты работы были доложены на следующих российских и международных семинарах и конференциях:

1. Международная конференция "20th International Seminar on High Energy Physics" (QUARKS-2018), Валдай, Россия, 27 мая - 2 июня 2018.

2. Международная конференция "Supersymmetries and quantum Symmetries" (SQS'2017), Дубна, Россия, 31 июля — 5 августа.

3. 60-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, Россия, 20-25 ноября 2017.

4. 59-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, Россия, 21-26 ноября 2016.

5. 8-ая межинститутская молодежная конференция "Физика элементарных частиц и космология", 11-12 апреля 2019.

Также, доклады по темам диссертации были проведены на научных семинарах ИЯИ РАН (Москва), ФИАН (Москва) и ОИЯИ (Дубна).

Степень достоверности результатов

Достоверность и обоснованность результатов работы подтверждается тем, что полученные результаты обобщают известные наблюдения в области настоящего исследования. Также публикации по теме работы были приняты в рецензируемые научные журналы.

Личный вклад

Все результаты, изложенные в работе и выносимые на защиту, получены лично автором или при его непосредственном участии.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, и заключения. В первой главе обсуждается конструкция смежных классов. Во второй главе решается вопрос о применение конструкции смежных классов к построению конформно инвариантных теорий. В третьей главе устанавливается аналог теоремы Намбу–Голдстоуна для случая спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий. Объём работы составляет 141 страницу и не содержит рисунков или таблиц. Список литературы насчитывает 81 наименование.

Глава 1

Конструкция смежных классов

1.1. Индуцированные представления

Техника индуцированных представлений играет одну из ключевых ролей при построении представлений некоторой группы G. В частности, на ней основан такой фундаментальный результат, как классификация всех неприводимых представлений группы Пуанкаре по Вигнеру [3]. Опишем вкратце соответствующую процедуру, чтобы продемонстрировать суть метода. Построение начинается с рассмотрения подгруппы Лоренца группы Пуанкаре и фиксации некоторого её представления на векторном пространстве $\mathcal{V}$. Затем выбранное представление "индуцируется" до представления полной группы, то есть, до представлений группы Пуанкаре. Примечательно, что на данном шаге вектора из пространства представления $\mathcal{V}$ становятся полями, определёнными над пространством Минковского. Получающиеся подобным образом поля и являются объектами, из которых затем строятся лагранжианы различных теорий. Заметим, что пространство Минковского изоморфно фактор–пространству группы Пуанкаре по подгруппе Лоренца. Таким образом, представления группы Пуанкаре получаются "расширением" представлений подгруппы стабильности некоторой точки пространства Минковского до представления полной группы. Подобная связь представлений и обусловливает название конструкции — метод индуцированных представлений. В силу важности понимания данной техники для настоящей работы ниже приведён обзор метода индуцированных представлений, основанный на работах [1, 2]. Если не оговорено обратное, то до конца настоящего раздела предполагается, что рассматриваемая группа не является калибровочной и не содержит дискретных элементов.

1.1.1. Теоретико–групповая конструкция

В общем случае, метод индуцированных представлений применяется для построения представлений группы G по представлению её подгруппы H. Говорят, что получаемое таким образом представление группы G индуцировано представлением её подгруппы H. Элементами такого представления являются поля, определенные на многообразии $\mathcal{A} \equiv G/H$.

Рассмотрим технику индуцированных представлений более подробно. Поскольку действие G на $\mathcal{A}$ транзитивно, и H является группой стабильности некоторой точки $\vec{\mathbf{0}} \in \mathcal{A}$, то имеет место взаимно однозначное соответствие

$$\mathcal{A} \leftrightarrow G/H \ . \tag{1.1}$$

Обозначим произвольный базис генераторов H как V_i, и пусть P_μ дополняют V_i до полного базиса генераторов G. Тогда уравнение (1.1) можно рассматривать как изоморфизм между $\mathcal{A}$ и орбитой $\vec{\mathbf{0}}$ под действием элементов g_H фактор–пространства G/H,

$$g_H = e^{iP_\mu x^\mu} \ . \tag{1.2}$$

В рамках подобного изоморфизма произвольный элемент из G/H отождествляется с точкой из $\mathcal{A}$, получаемой действием выбранного элемента на $\vec{\mathbf{0}}$. Поскольку каждый из элементов g_H однозначно характеризуется значением параметра x^μ, то x^μ можно рассматривать как естественные координаты на $\mathcal{A}$, а P_μ, соответственно, естественно называть генераторами трансляций.

Определим далее действие G на $\mathcal{A}$. Пусть некоторая точка $\mathcal{A}$ соответствует элементу $g_H(x^\mu)$. Тогда под действием элемента $g \in G$ она переходит в точку, соответствующую перемноженным слева g и $g_H(x^\mu)$.[1] Иначе говоря, пусть при умножении g на g_H получается выражение вида

$$g \cdot g_H = g'_H(g, g_H) \cdot h(g, g_H) \ , \tag{1.3}$$

[1] Вместо левого умножения можно также, конечно, рассмотреть и правое. Это приведёт к небольшому изменению законов преобразования полей и координат под действием группы.

где $g'_H \in G/H$ и $h(g, g_H) \in H$. Данное выражение можно рассматривать как закон преобразования g_H под действием G, и, следовательно, как закон преобразования координат

$$g_H \to g \cdot g_H \cdot h^{-1}(g, g_H) : \quad x^\mu \to x'^\mu(g, x^\mu) \ . \tag{1.4}$$

Приведённое уравнение и задаёт закон преобразования $\mathcal{A}$ под действием G.

Чтобы пояснить приведённую конструкцию, рассмотрим в качестве примера упомянутое ранее построение представлений группы Пуанкаре. В этом случае представление группы Пуанкаре $ISO(1, d)$ индуцируется с представления группы Лоренца $SO(1, d)$, а пространство $\mathcal{A}$ является пространством Минковского,

$$M^{1,d} = ISO(1, d)/SO(1, d) \ . \tag{1.5}$$

Таким образом, пространство Минковского изоморфно фактор–пространству

$$g_H = e^{iP_\mu x^\mu} \ , \tag{1.6}$$

где P_μ — генераторы трансляций группы Пуанкаре. Как легко проверить, действие группы Пуанкаре на фактор пространство (1.6) по закону (1.4) действительно соответствует стандартным законам преобразования координат.

Вернёмся обратно к общему алгоритму построения индуцированных представлений. Пусть имеется некоторое представление H, то есть задано векторное пространство $\mathcal{V}$ и однородное действие группы H на $\mathcal{V}$,

$$T(h) : \quad \mathcal{V} \to \mathcal{V} : \quad \forall \psi \in \mathcal{V} \to T(h)\psi \ , \tag{1.7}$$

где $h \in H$. Для построения представления G вектора пространства $\mathcal{V}$ заменяются полями с областью определения $\mathcal{A}$ и областью значений $\mathcal{V}$,

$$\psi \to \psi(x) \ , \tag{1.8}$$

где было использовано, что любой представитель G/H уникально характеризуется значением x^μ. Действие G на подобных полях определяется согласно

выражению
$$T(g)\psi(x) = T\left(h^{-1}(g^{-1}, g_H)\right)\psi(x'(g^{-1}, x)) \ , \qquad (1.9)$$
где h определяется из уравнения (1.3) для g_H взятого в точке x^μ. Прямым вычислением можно убедиться, что определённое таким образом действие G действительно является нелинейным представлением G в пространстве $\mathcal{V}$–значных функций над $\mathcal{A}$. Полученное представление G, действующее на координаты x^μ и поля $\psi(x)$ согласно уравнениям (1.4) и (1.9) соответственно, называется индуцированным представлением.

В качестве поясняющего примера вернёмся к пространству Минковского и группе Пуанкаре. В соответствии с изложенной выше техникой, чтобы построить поля, формирующие представление группы Пуанкаре, сначала рассматриваются представления группы Лоренца. Как известно, конечномерные представления группы Лоренца однозначно характеризуются значением спина. Далее, элементы данного пространства делаются полями с областью определения $\mathcal{M}^{1,d}$, на которые группа Пуанкаре действует в соответствии с формулой (1.9). Как можно легко убедиться, данная процедура приводит к стандартным выражениям для закона преобразования полей.

Описанная конструкция показывает, что поля вводятся посредством двухшаговой конструкции. А именно, сначала рассматриваются элементы векторного пространства $\mathcal{V}$, и лишь затем, после привлечения техники индуцированных представлений, происходит переход к $\mathcal{V}$–значным функциям над $\mathcal{A}$. В частности, заметим, что законы преобразования полей (1.9) в начале координат сводятся к действию H на $\mathcal{V}$, уравнение (1.7). Данное наблюдение позволяет предложить следующую простую интерпретацию метода индуцированных представлений: он позволяет "разнести" представление H из начала координат во все точки $\mathcal{A}$ так, что в результате получается представление G. Подобное истолкование метода индуцированных представлений окажется полезным для понимания результатов главы 3 настоящей работы.

В заключении этого раздела заметим, что метод индуцированных представлений позволяет построить представления групп, но не их алгебр. Это связано с тем, что группа G должна действовать транзитивно на всём пространстве, и, соответственно, изоморфизм (1.1) должен вводить координаты на всём пространстве $\mathcal{A}$. Таким образом, приведённая конструкция определена глобально, а не локально.

1.1.2. Связь с формализмом сечений над расслоением

Наиболее часто поля в физике вводятся как сечения над расслоением. Подобное построение оказывается тесно связано с конструкцией индуцированных представлений и проясняет геометрическую интерпретацию последней. Настоящий раздел посвящен иллюстрации данной связи.

Напомним сначала необходимые определения из дифференциальной геометрии. Расслоением называется тройка $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{M})$, где $\mathcal{E}$ и $\mathcal{M}$ — многообразия, π — сюръективное отображение из $\mathcal{E}$ на $\mathcal{M}$ такое, что прообраз любой точки $p \in \mathcal{M}$ является линейным векторным пространством. Последнее требование означает, что элементы из $\mathcal{E}$ можно складывать, если они "определены над" одной и той же точкой из $\mathcal{M}$, то есть их образы совпадают. По этой причине говорят, что приведённая конструкция линейна "по вертикали", но нелинейна "по горизонтали". Сечением над расслоением называется отображение ψ из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{E}$ такое, что для любого $p \in \mathcal{M}$, $\psi(p) \in \pi^{-1}(p)$. Иначе говоря, в каждом "вертикальном" слое выбирается один представитель соответствующего векторного пространства.

Наиболее часто в физике встречается понятие касательного расслоения, играющего важную роль, например, в общей теории относительности. В этом случае вектора можно складывать и сравнивать, только если они находятся в одной и той же точке многообразия, то есть принадлежат одному "вертикальному" слою. Если это условие не выполнено, то для сравнения полей их необходимо сначала перенести в одну точку посредством "горизонтального" параллельного переноса.

Пусть далее на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{E}$ действует некоторая группа G, причём для произвольного $p \in M$ и $g \in G$, G отображает линейным образом слой $\pi^{-1}(p)$ на $\pi^{-1}(gp)$. Имея такое действие, можно определить однородное действие ρ группы G на множестве сечений следующим образом,

$$\rho(g)\psi(p) = g\psi(g^{-1}p) \ , \tag{1.10}$$

где ψ — произвольное сечение. В частности, если разложить ψ по базисным векторам ψ_p^i,

$$\psi = \psi_i \psi_p^i \ , \tag{1.11}$$

то уравнение (1.10) задаёт линейное представление для функций ψ_i. Подобные величины, то есть поля с индексами, и являются объектами, обычно встречающимися в физической литературе.

Чтобы перейти к конструкции индуцированных представлений, необходимо дополнительно потребовать выполнение двух условий. Во–первых, G должно действовать транзитивно на $\mathcal{M}$. В этом случае $\mathcal{M}$ изоморфно фактор–пространству G/H, где H — группа стабильности произвольной точки $\vec{\mathbf{0}} \in \mathcal{M}$. Во–вторых, действие G на $\mathcal{M}$ должно быть согласовано с действием G на фактор–пространство G/H, то есть даваться формулой (1.4). Сечения, обладающие двумя описанными свойствами, называются однородными сечениями.

Чтобы однозначно задать однородное сечение, необходимо зафиксировать действие G на $\mathcal{E}$. Без приведения доказательства заметим, что имеется взаимно однозначное соответствие между однородными сечениями и действием H на векторном пространстве $\pi^{-1}(0)$. Таким образом, все представления группы G можно получить из представлений H, и данная процедура соответствует индуцированию представления H до представления целой группы G, описанному в предыдущем разделе.

1.2. Конструкция смежных классов

Метод индуцированных представлений позволяет построить из однородного представления подгруппы $H \subset G$ неоднородное представление группы G. Однако, поскольку группа G реализована неоднородно, то на практике возникает вопрос о том, как получить однородно преобразующиеся величины для построения G–инвариантных лагранжианов. Конструкция смежных классов позволяет решить данную задачу, и ниже приведён обзор соответствующей техники, основанный на работах [7, 33, 34].

Пусть известно, что подгруппа $H \subset G$ реализована однородно. Потребуем, более того, чтобы фактор–пространство G/H было однородо–редуктивным, то есть выполнялись коммутационные соотношения

$$[V_i, V_j] \subset H \,, \quad [P_\mu, H_i] \subset P \,, \tag{1.12}$$

где, напомним, V_i являются базисными генераторами в алгебре H, а P_μ дополняют их до полного набора базисных генераторов алгебры G. Конструкция смежных классов основана на использовании так называемых дифференциальных форм Маурер–Картана. Чтобы их получить, необходимо взять логарифмическую производную от произвольного элемента фактор–пространства G/H (которая принадлежит алгебре G), и разложить её по базисным векторам алгебры G,

$$g_H^{-1} dg_H = iP_\mu \omega_P^\mu + iV_i \omega_V^i \,. \tag{1.13}$$

1–формы ω_P^μ и ω_V^i и называются дифференциальными формами Маурер–Картана для генераторов P_μ и V_i соответственно.

Ключевым наблюдением является закон преобразования определенных таким образом форм под действием G. Чтобы его найти, подействуем произвольным элементом $g \in G$ на g_H и сравним соответствующие формы Маурер–Картана. Тогда, с одной стороны,

$$g_H'^{-1} dg_H' = iP_\mu \omega_P'^\mu + iV_i \omega_V'^i \,. \tag{1.14}$$

С другой стороны, выражая g'_H через g и h, имеем

$$g'^{-1}_H dg'_H = hg^{-1}_H g^{-1} d(gg_H h^{-1}) = i(hP_\mu h^{-1})\omega^\mu_P + i(hV_i h^{-1})\omega^i_\mu + hdh^{-1} \ , \quad (1.15)$$

где было использовано, что g не зависит от координат. Сравнивая два выписанных выражения, а также учитывая однородную редуктивность фактор–пространства G/H, получаем

$$P_\mu \omega'^\mu_P = hP_\mu h^{-1}\omega^\mu_P \, , \quad V_i \omega'^i_V = hV_i h^{-1}\omega^i_V + hdh^{-1} \ . \quad (1.16)$$

Как видно из приведённых выражений, 1–форма ω^μ_P преобразуется однородно под действием произвольного элемента группы (но, возможно, координатно–зависимым образом), в то время как ω^i_V получает дополнительный неоднородный вклад. Как следствие, ω^μ_P можно использовать для построения инвариантных лагранжианов. В частности, в n–мерном пространстве инвариантный элемент объёма имеет вид

$$V_{inv} = \epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n} \omega^{\mu_1}_P \wedge \ldots \wedge \omega^{\mu_n}_P \ , \quad (1.17)$$

где $\epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ — антисимметричный тензор Леви–Чевита.

В соответствии с методом индуцированных представлений поля должны вводиться как представления подгруппы H. В рамках конструкции смежных классов подобные поля называются полями материи. Подобная терминология позволяет отличить их от намбу–голдстоуновских полей, о которых пойдёт речь в следующем разделе. А именно, пусть ψ принадлежит некоторому однородному представлению H. Рассмотрим 1–форму

$$D\psi = d\psi + i\omega^i_V \hat{V}_i \psi \ , \quad (1.18)$$

где $\hat{V}_i$ — представление V_i, соответствующее ψ. Явным вычислением можно убедиться, что определенная таким образом 1–форма преобразуется однородно под действием произвольного элемента $g \in G$ и, таким образом, может быть использована для построения G–инвариантных лагранжианов. 1–форму ω_V^i часто также называют формой связности. Например, канонический кинетический член для произвольного поля ψ может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_{kin}^{ex} = D\psi \wedge \star D\psi \ , \tag{1.19}$$

где $\star$ — оператор дуальности Хопфа. Таким образом, G–инвариантные лагранжианы могут быть получены как H–инвариантные внешние произведения ψ, $D\psi$ и ω_P^μ.

На практике, как правило, G–инвариантные лагранжианы оказывается удобнее строить не в терминах 1–форм Маурер–Картана, а определяемых через них ковариантную метрику и ковариантные производные полей. А именно, имея дифференциальные формы Маурер–Картана, можно определить (многомерную) тетраду e_μ^ν и ковариантную метрику $g_{\mu\nu}$ как

$$\omega_P^\nu = e_\mu^\nu dx^\mu \ , \quad g_{\mu\nu} = e_\mu^\lambda \eta_{\lambda\rho} e_\nu^\rho \ , \tag{1.20}$$

где $\eta_{\lambda\rho}$ — плоская метрика. Также, можно определить ковариантную производную поля материи ψ, $D_\mu\psi$, в виде

$$D\psi = \mathcal{D}_\mu \psi \omega_P^\mu \ . \tag{1.21}$$

Как следует из закона преобразования 1–форм Маурер–Картана (1.16), определенные таким образом величины преобразуются однородно под действием G. Как следствие, любая H–инвариантная комбинация ψ, $\mathcal{D}_\mu\psi$ и $g_{\mu\nu}$ будет также автоматически G–инвариантной.

Для иллюстрации применения описанной техники рассмотрим два примера. Первый из них — построение Пуанкаре–инвариантных лагранжианов. Как можно легко убедиться, применение конструкции смежных классов в данном случае даёт плоскую метрику, а ковариантная производная полей является обычной частной производной. Как следствие, любой лагранжиан, построенный из данных величин Лоренц–инвариантным способом, также автоматически является Пуанкаре–инвариантным.

В качестве более интересного примера, рассмотрим применение конструкции смежных классов для построения инвариантных лагранжианов в пространстве анти–де–Ситтера. Группа G, действующая транзитивно в $AdS^{1,d}$ — это $SO(2,d)$, группа стабильности $\vec{\mathbf{0}}$ — $SO(1,d)$, и, следовательно,

$$AdS^{1,d} = SO(2,d)/SO(1,d)\ . \tag{1.22}$$

Соответствующее фактор пространство, определяющее натуральные координаты на $AdS^{1,d}$, имеет вид

$$g_H = e^{iP_\mu \varphi^\mu}\ , \tag{1.23}$$

где P_μ генераторы некомпактного направления, соответствующего фактор–пространству $SO(2,d)/SO(1,d)$. Формы Маурер–Картана для рассматриваемого фактор–пространства имеют вид,

$$\omega_P^\mu = \frac{\sin\varphi}{\varphi} d\varphi^\mu - \varphi_\nu d\varphi^\nu \frac{\sin\varphi - \varphi}{\varphi^3}\varphi^\mu\ , \quad \omega_M^{\mu\nu} = \varphi^\mu d\varphi^\nu \frac{1-\cos\varphi}{\varphi^2}\ , \tag{1.24}$$

где $\varphi = \sqrt{|\varphi_\nu \varphi^\nu|}$ и суммирование производится с плоской метрикой. Очевидным недостатком натуральных координат является то, что в этой параметризации тетрада и метрика не являются диагональными. Чтобы исправить это, можно сделать замену координат вида [35]

$$\varphi^\mu = 2x^\mu \frac{\mathrm{arctang}(\frac{\sqrt{x^2}}{2})}{\sqrt{x^2}}\ . \tag{1.25}$$

В новых переменных формы Маурер–Картана принимают вид

$$\omega_P^\mu = \frac{dx^\mu}{1+\frac{x^2}{4}}\ , \quad \omega_M^{\mu\nu} = \frac{x^\mu dx^\nu}{2(1+\frac{x^2}{4})}\ . \tag{1.26}$$

Получаемые из данных выражений метрика и ковариантная производная полей являются метрикой и ковариантной производной полей в пространстве анти–де–Ситтера в глобальных координатах.

В заключении этого раздела сделаем замечание по поводу применимости конструкции смежных классов в случаях, когда исследуемая группа G

содержит дискретные элементы, такие как отражение, P, или инверсия, I, координат,

$$P: \quad x^\mu \to -x^\mu\,, \qquad I: \quad x^\mu \to \frac{x^\mu}{x^2}\,. \tag{1.27}$$

Здесь необходимо разделять два случая. В первом случае подобные дискретные симметрии не входят в фактор–пространство, используемое для параметризации многообразия, на котором определена теория. Для подобных групп все описанные выше шаги для получения однородно преобразующихся величин могут быть повторены без изменений, и конструкция смежных классов оказывается применимой для построения G–инвариантных теорий. Например, такая ситуация реализуется для группы Пуанкаре, пополненной отражением координат. Иная ситуация возникает, когда для параметризации многообразия фактор–пространство должно содержать дискретные элементы. В этом случае оказывается невозможным взять логарифмическую производную от всех элементов фактор–пространства, и потому конструкция смежных классов требует модификации. Обсуждению данной проблемы посвящена глава 2 настоящей работы, в которой рассматривается вопрос построения конформной–инвариантных лагранжианов при помощи конструкции смежных классов.

1.3. Построение эффективных лагранжианов

Исторически, конструкция смежных классов получила широкое распространение в физике благодаря тому, что предоставляла необходимый инструментарий для построения эффективных лагранжианов теорий, возникающих вследствие спонтанного нарушения внутренних симметрий [5, 6]. В последствии, данная конструкция была также распространена на случай спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий [7]. Ниже дан обзор применения конструкции смежных классов в случае спонтанного нарушения внутренних симметрий, основанный на её связи с методом индуцированных представлений. Не уменьшая общности, предполагается, что теория определена в пространстве Минковского и является Пуанкаре–инвариантной. Обсуждению способа применения конструкции смежных классов к построению лагранжианов эффективных теорий, возникающих вследствие спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий, посвящена глава 2 настоящей работы.

Рассмотрим теорию с группой симметрий $ISO(1,d) \times G_{int}$, где G_{int} — некоторая группа внутренних симметрий. Пусть далее имеет место спонтанное нарушение симметрий, соответствующее схеме спонтанного нарушения

$$ISO(1,d) \times G_{int} \longrightarrow ISO(1,d) \times H_{int} \ , \tag{1.28}$$

где H_{int} — некоторая подгруппа G_{int}. Обозначим вакуум теории и нарушенные базисные генераторы как Φ и Z_a соответственно. Тогда отличие рассматриваемой ситуации от стандартной для метода индуцированных представлений заключается в том, что ненулевое значение Φ позволяет ввести естественные координаты не только на пространстве Минковского, но и на фактор–пространстве G_{int}/H_{int}. В последнем случае, однако, координаты будут представлять не точки пространства–времени, а значение Φ в рассматриваемой точке. Подобное положение вещей подсказывает, как можно построить неоднородное представление $ISO(1,d) \times G_{int}$ в случае спонтанного нарушения симметрий. Сначала введём координаты на G_{int}/H_{int}, рассмотрев фактор–пространство

$$g_H^{x_0} = e^{iZ_a \xi^a} \ . \tag{1.29}$$

Действуя элементами данного фактор–пространства на Φ, можно описать всевозможные флуктуации последнего (отметим аналогию с действием фактор–пространства (1.2) на однородное пространство $\mathcal{A}$). Таким образом, ξ^a описывают всевозможные флуктуации Φ. Действие G_{int} на ξ^a задаётся правым умножением $g \in G_{int}$ на фактор–пространство (1.29), в полной аналогии со соответствующим правилом в методе индуцированных представлений. Далее полученное представление индуцируется до представления $ISO(1,d) \times G_{int}$. Для этого фактор–пространство (1.29) необходимо дополнить экспонентами генераторов трансляций, и, в соответствии с методам индуцированных представлений, сделать ξ^a полями, то есть функциями x^μ. Таким образом, для построения эффективной теории следует использовать фактор–пространство

$$g_H = e^{iP_\mu x^\mu} e^{iZ_a \xi^a(x)} \ . \tag{1.30}$$

Как видно из приведённой конструкции, эффективные теории обязательно содержат поля $\xi^a(x)$, которые и являются намбу–голдстоуновскими полями. С теоретико–групповой точки зрения они соответствуют координатам на фактор–пространстве G_{int}/H_{int}. С физической точки зрения они описывают всевозможные флуктуации вакуума.

Если фактор–пространство $(ISO(1,d) \times G_{int})/(SO(1,d) \times H_{int})$ однородно редуктивно, то конструкция смежных классов позволяет получить однородно преобразующиеся величины. Прежде всего заметим, что, поскольку Z_a являются генераторами внутренних симметрий, а потому коммутируют с трансляциями, то для вычисления форм Маурер–Картана, связанных с ξ^a, экспоненту от генераторов трансляций в фактор пространстве (1.30) можно опустить и считать пространственно–временную метрику плоской. Таким образом, можно рассматривать фактор пространство (1.29), считая $\xi^a(x)$ полями, что соответствует стандартной конструкции, изложенной в работах [5, 6]. Как уже было сказано выше, трансформационные свойства полей ξ^a под действием произвольного элемента $g \in G_{int}$ определяются через левое умножение g на фактор–пространство (1.29),

$$g g_h^{x_0} = e^{iZ_a \xi'^a} h : \quad \xi^a \to \xi'^a \ , \tag{1.31}$$

где $h \in H_{int}$. При этом действие всех элементов H_{int} остаётся однородным, как это следует из следующей цепочки равенств,

$$h g_h^{x_0} = (h e^{iZ_a \xi^a} h^{-1}) h = e^{iZ_a \xi'^a} h \ , \tag{1.32}$$

где была использована однородная редуктивность фактор–пространства (1.29).

Дифференциальные формы Маурер–Картана,

$$(g_h^{x_0})^{-1} dg_h^{x_0} = iZ_a\omega_Z^a + iV_i\omega_V^i \ , \tag{1.33}$$

где V_i — базис генераторов в H_{int}, позволяют найти ковариантные производные полей. А именно, для намбу–голдстоуновских полей ξ^a и полей материи $\psi(x)$ (напомним, что, по определению, полями материи называются поля, принадлежащие однородному представлению H_{int}), ковариантные производные имеют вид

$$D_\mu\xi^a dx^\mu = \omega_Z^a \ , \quad \mathcal{D}_\mu\psi dx^\mu = d\psi + i\omega_V^i \hat{V}_i\psi \ , \tag{1.34}$$

где $\hat{V}_i$ — представление V_i, соответствующее ψ, а также было использовано, что метрика является плоской. Таким образом, $ISO(1,d)\times G_{int}$–инвариантные лагранжианы строятся как $SO(1,d)\times H_{int}$–инвариантные комбинации ψ, $D_\mu\psi$, $\eta_{\mu\nu}$ и $D_\mu\xi^a$. Конечно, если по каким–либо соображениям язык дифференциальных форм является предпочтительным, то можно строить инвариантные лагранжианы как внешние произведения соответствующих дифференциальных форм. В частности, поскольку в инвариантные лагранжианы ξ^a может входить только с производной, то ξ^a представляет безмассовую моду, как это и предсказывает теорема Намбу-Голдстоуна [36–38].

В рамках конструкции смежных классов можно строить также высшие производные полей. Для этого заметим, что $\mathcal{D}_\mu\psi$ и $D_\mu\xi^a$ преобразуются однородно, и потому их можно рассматривать как некоторое однородное представление H_{int}. Последнее, в свою очередь, позволяет опять взять ковариантную производную, $\mathcal{D}_\nu\mathcal{D}_\mu\psi$ или $\mathcal{D}_\nu\mathcal{D}_\mu\psi$ соответственно, и использовать их для построения эффективных лагранжианов.

Фактор–пространство (1.29) может быть параметризовано различными способами. Например, если Z_1 и Z_2 — некоторые нарушенные генераторы, то фактор–пространство может записать в следующих двух видах:

$$g_H^{(a)} = e^{iZ_1\xi^1 + iZ_2\xi^2} \ , \quad \text{или} \quad g_H = e^{iZ_1\xi^1} e^{Z_2\xi^2} \ . \tag{1.35}$$

В общем случае, как это следует из формулы (1.31), такой выбор будет соответствовать разным трансформационным свойствам полей ξ^1 и ξ^2. Однако, приведённые представления эквивалентны, поскольку от одного можно перейти к другому путём переопределения переменных. В этом контексте, при сравнении эффективных лагранжианов, получаемых при помощи прямых вычислений и конструкции смежных классов, необходимо предварительно убедиться, что поля имеют одинаковый заряд под действием симметрий.

В заключении данного раздела заметим, что в работах [5, 6] было доказано, что подобное построение позволяет получить всевозможные нелинейные представления представления G_{int} — все иные способы введения полей сводятся к обсуждаемой конструкции путём переопределения полей. Также заметим, что изложенная конструкция легко переносится на другие пространства.

1.4. Калибровочные симметрии

Конструкция смежных классов оказывается также применимой для построения теорий с калибровочными (локальными) симметриями [6, 39, 40]. Ниже описана процедура построения лагранжианов подобных теорий. Предполагается, что симметрия не нарушена спонтанно, а также, что теория определена на пространстве Минковского. Случай, когда калибровочные симметрии оказываются спонтанно нарушенными, рассмотрен в следующем разделе настоящей главы. Группа локальных симметрий обозначается как G_{loc}.

Прежде всего заметим, что в случае, когда группа G_{loc} является калибровочной, описанная выше процедура построения G_{loc}–инвариантных теорий неприменима. Действительно, если симметрия локальна, то в каждой точке пространства–времени действует свой элемент группы $g \in G_{loc}$. Иначе говоря, $g = g(x)$. По этой причине дифференциал $g(x)$ в формуле (1.15) не обращается в ноль. Как следствие, формы Маурер–Картана, определённые через уравнение (1.13), не преобразуются однородно при произвольном $g(x)$ и потому не могут быть использованы для построения G_{loc}–инвариантных лагранжианов.

Существуют два пути решения описанной проблемы. Первый из них заключается в добавлении в определение ковариантной производной полей члена, который компенсировал бы дополнительно возникающий вклад [6]. В этом случае калибровочные поля и их закон преобразования задаются непосредственно “руками”, что может быть рассмотрено как недостаток подобного подхода. Второй способ основан на наблюдении, что координатно зависимое преобразование можно разложить в ряд Тейлора [39, 40]. В этом случае калибровочные поля возникают естественным образом как “намбу–голдстоуновские бозоны” при определённых генераторах симметрий. Рассмотрим этот способ более подробно. Обозначим генераторы G_{loc}, как глобально действующей группы, через Q_a. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \exp\left(iQ_b\alpha^b(x)\right) &= \exp\left(iQ_b\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^b_{\mu_1...\mu_n}x^{\mu_1}...x^{\mu_n}\right) = \\ &= \exp\left(i\sum_{n=0}^{\infty}Q_b^{\mu_1...\mu_n}\alpha^b_{\mu_1...\mu_n}\right) , \end{aligned} \tag{1.36}$$

где $\alpha^b(x)$ было разложено в ряд Тейлора по x^μ в окрестности нуля и были введены обозначения

$$Q_b^{\mu_1...\mu_n} = Q_b x^{\mu_1}...x^{\mu_n} , \quad \alpha^b_{\mu_1...\mu_n} = \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n}\alpha^b(x)|_0 . \tag{1.37}$$

Таким образом, вместо рассмотрения координатно–зависимых преобразований оказывается возможным ввести бесконечное количество параметров преобразований и генераторов, удовлетворяющих следующей алгебре:

$$[Q_b^{\mu_1...\mu_n}, Q_c^{\nu_1...\nu_m}] = -ig' f^d_{bc} Q_d^{\mu_1...\mu_n\nu_1...\nu_m} , \tag{1.38}$$

где f^a_{bc} являются структурными константами калибровочной группы и g' — так называемая константа самодействия. Определенные подобным образом преобразования уже не зависят от координат, что позволяет вернуться к стандартной процедуре построения инвариантных лагранжианов при помощи конструкции смежных классов.

Чтобы применить конструкцию смежных классов, прежде всего необходимо найти однородно–редуктивное фактор–пространство. Поскольку генераторы трансляций не коммутируют с генераторами локальных преобразований,

$$[P_\mu, Q_a^{\nu_1 \ldots \nu_n}] = -in\delta_\mu^{(\mu_1} Q_a^{\mu_2 \ldots \mu_n)}, \tag{1.39}$$

где производится симметризация по индексам, заключенным в круглые скобки, то однородно–редуктивное фактор–пространство имеем вид

$$g_H^{loc} = e^{iP_\mu x^\mu} \ldots e^{i\Phi^b_{\mu_1\mu_2} Q_b^{\mu_1\mu_2}} e^{-iA_\mu^b Q_b^\mu} (e^{iQ_a \pi^a}) \ , \tag{1.40}$$

где многоточие соответствует генераторам с большим количеством греческих индексов, а заключенный в скобки член может быть опущен. Наиболее интересно попытаться построить теорию с минимальным количеством дополнительных полей. По этой причине далее будет предполагаться, что последний член в формуле (1.40) отсутствует. Как будет показано в следующем разделе, включение его в рассмотрение соответствует спонтанному нарушению калибровочных симметрий, а использование фактор пространства с подобным набором полей описывает механизм Хиггса на теоретико–групповом языке.

В силу присутствия бесконечного количества полей может показаться, что для нелинейной реализации G_{loc} при помощи конструкции смежных классов необходимо использовать все поля. Однако, это предположение неверно, и при помощи описываемой конструкции можно воспроизвести, например, лагранжиан Янга–Миллса [41]. Чтобы убедиться в этом, вычислим дифференциальные формы Маурер–Картана для фактор–пространства (1.40),

$$(g_H^{loc})^{-1} dg_H^{loc} = iP_\mu \omega_P^\mu + iQ_a \omega^a + iQ_a^\mu \omega_\mu^a + \ldots \ , \tag{1.41}$$

что даёт

$$\omega_P^\mu = dx^\mu, \quad \omega^b = A_\nu^b dx^\nu, \quad \omega_\nu^a = -dA_\nu^a - 2\Phi_{\mu\nu}^a dx^\mu + \frac{1}{2} g' f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c dx^\mu \ . \tag{1.42}$$

Остальные формы Маурер–Картана опущены, поскольку они не будут использоваться далее. Рассмотрим 2–форму F^a

$$F^a = \omega_P^\nu \wedge \omega_\nu^a = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a dx^\mu dx^\nu \ . \tag{1.43}$$

Её особенностью является то, что, в силу своей антисимметричности, она не содержит поле $\Phi_{\mu\nu}^a$, и, таким образом, содержит только одно поле A_μ^a. Явным вычислением можно убедиться, что A_μ^a подчиняется стандартному для калибровочных полей закону преобразования под действием группы G_{loc}. Также, лагранжиан

$$\mathcal{L}_{YM} = \mathrm{tr}(F \wedge \star F) \ , \tag{1.44}$$

в точности соответствует лагранжиану Янга–Миллса. Таким образом, конструкция смежных классов позволяет строить лагранжианы с калибровочными симметриями. Более того, приведенное построение показывает, что калибровочные теории обязаны содержать поле A_μ^a, выполняющее функцию калибровочного поля. Также, если в теории присутствуют поля материи, нетривиально заряженные под действием G_{loc}, то вычисление ковариантной производной подобных полей показывает, что они с необходимостью взаимодействуют с A_μ^a.

Помимо построения теории Янга–Миллса, возможно построение теорий с большим количеством полей. Однако, кинетические члены полей в подобных теориях оказываются, как правило, плохо определены, а соответствующие теории не встречаются в природе. Также, конструкция смежных классов применялась для построения лагранжиана общей теории относительности [24, 42, 43] и её массивных расширений [44].

В заключении этого раздела заметим, что появление “намбу–голдстоуновских” полей в фактор–пространстве (1.40) не обязательно означает, что рассматривается теория со спонтанно нарушенными симметриями. Действительно, как известно, калибровочные поля преобразуются неоднородно под действием калибровочной группы, и потому они были обязаны появиться в фактор–пространстве (1.40) как поля, преобразующиеся неоднородно под действием G_{loc}.

1.5. Механизм Хиггса и поля Штокельберга

Рассмотрим теперь вопрос о том, как конструкция смежных классов применяется в случае спонтанного нарушения калибровочных симметрий. Предположим, что группа симметрий G_{loc} состоит только из калибровочных симметрий, и что генераторы соответствующей (глобальной) алгебры были спонтанно нарушены вакуумным средним некоторой теории. В этом случае генераторы Q_a не зануляют вакуум, и, по аналогии со случаем спонтанного нарушения внутренних симметрий, экспоненты от Q_a должны присутствовать в фактор–пространстве, используемом для построения эффективной теории. Таким образом, в случае спонтанного нарушения калибровочных симметрий необходимо рассматривать фактор–пространство (1.40) со включенными в него экспонентами от генераторов Q_a, параметры при которых следует рассматривать как намбу–голдстоуновские поля, π^a,

$$g_H^{ssb} = g_H^{loc} e^{iQ_a \pi^a} \ . \tag{1.45}$$

Благодаря обозначенной связи между фактор–пространствами в ненарушенной и нарушенных фазах, новые формы Маурер–Кратана,

$$(g_H^{ssb})^{-1} d g_H^{ssb} = iP_\mu \tilde{\omega}_P^\mu + iQ_a \tilde{\omega}^a + iQ_a^\mu \tilde{\omega}_\mu^a + \ldots \ , \tag{1.46}$$

можно легко найти, зная результаты предыдущего раздела:

$$Q_a \tilde{\omega}^a = e^{-iQ_a \pi^a} (Q_a \omega^a + d) e^{iQ_a \pi^a}, \quad Q_a^\mu \tilde{\omega}_\mu^a = e^{-iQ_a \pi^a} Q_a^\mu \omega_\mu^a e^{iQ_a \pi^a} \ . \tag{1.47}$$

В качестве примера применения описанной конструкции рассмотрим спонтанное нарушение калибровочной группы $U(1)$. В этом случае имеется только один генератор, Q, и формы Маурер–Картана имеют вид

$$\tilde{\omega}_Q = A_\mu dx^\mu + d\pi \,, \quad \tilde{\omega}_\mu = -dA_\nu - 2\Phi^a_{\mu\nu} dx^\mu \,. \tag{1.48}$$

Как было показано в предыдущем разделе, 1–форма $\tilde{\omega}^\mu$ позволяет построить стандартный кинетический член для калибровочного поля A_μ. В свою очередь, 1–форма $\tilde{\omega}_Q$ может быть использована для построения кинетического члена для π. Таким образом, простейший эффективный лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_{mh} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \frac{m^2}{2}\left((A_\mu + \partial_\mu)\pi\right)^2 \,, \tag{1.49}$$

где m^2 — некоторая постоянная. После замены переменных

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \pi \tag{1.50}$$

видно, что лагранжиан (1.49) описывает массивное векторное поле. Таким образом, описанная конструкция, на самом деле, является теоретико–групповым описанием механизма Андерсона–Хиггса–Кибла [45–47], известного также как механизм Хиггса. Также приведённый пример показывает, что конструкция смежных классов позволяет воспроизводить действие массивных мод.

Перейдём теперь к обсуждению связи между полями, возникающими при использовании конструкции смежных классов в случае спонтанного нарушения калибровочных симметрий и полями Штокельберга [40, 48, 49]. Прежде всего, определим понятие поля Штокельберга. Для этого рассмотрим теорию Янга–Миллса, в которой калибровочная группа $SU(n)$ нарушена явно путём введения массы у "калибровочного поля" A^a_μ,

$$\mathcal{L}_{mYM} = -\frac{1}{4g'^2}\mathrm{tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2g'^2}\mathrm{tr} A_\mu A^\mu \,, \tag{1.51}$$

где g' — константа связи и

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \,, \quad A_\mu = A_\mu^a Q_a \,, \tag{1.52}$$

где Q_a — генераторы $SU(n)$. Несмотря на то, что калибровочная инвариантность нарушена явно, её оказывается возможным восстановить посредством введения $n^2 - 1$ вспомогательных полей π^a, по одному на каждый из генераторов $SU(n)$. А именно, сделаем всюду замену переменных

$$A_\mu \;\to\; e^{-iQ_a\pi^a}(A_\mu + \partial_\mu)e^{iQ_a\pi^a} \,. \tag{1.53}$$

Данный закон выбран специально таким образом, чтобы мимикрировать закон преобразования калибровочного поля при действии элемента калибровочной группы $e^{iQ_a\pi^a}$. Формально замена переменных (1.53) плохо определена, поскольку вводит новые степени свободы. Однако это не приводит к противоречию, поскольку от соответствующих степеней свободы будет возможно избавиться фиксацией калибровки. Чтобы убедиться в этом, выпишем лагранжиан (1.51) после замены переменных (1.53),

$$\mathcal{L}_{mYM} = -\frac{1}{4g^2}\mathrm{tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2g^2}\left((\partial_\mu + A_\mu)e^{iQ_a\pi^a}\right)\left((\partial^\mu + A^\mu)e^{-iQ_a\pi^a}\right) \,. \tag{1.54}$$

Определим далее действие группы $SU(n)$ на поля теории следующим образом,

$$A_\mu \;\to\; U^\dagger(x)(A_\mu + \partial_\mu)U(x) \,, \quad e^{iQ_a\pi^a} \;\to\; U^\dagger(x)e^{iQ_a\pi^a} \,, \quad U(x) \in SU(n) \,. \tag{1.55}$$

Лагранжиан (1.54) оказывается инвариантным относительно подобных преобразований, и потому в теории имеется калибровочная $SU(n)$–инвариантность. В частности, всегда можно перейти в так называемую “унитарную” калибровку,

$$U(x) = e^{iQ_a\pi^a} \,, \tag{1.56}$$

в которой поле π^a исчезает из лагранжиана, возвращая его в первоначальный вид (1.51). Поля π^a, благодаря которым “восстанавливается” $SU(n)$ симметрия, и называются полями Штокельберга. В зависимости от обсуждаемой задачи, подобное искусственное увеличение количества симметрий может быть полезно, в то время как в других случаях может привести к путанице с количеством степеней свободы в теории. Например, подобное расширение симметрий оказывается удобным для изучения ультрафиолетовых свойств теорий с массивными векторами.

Можно заметить, что производимая в приёме Штокельберга замена переменных (1.53) совпадает с формой Маурер–Картана (1.47). Этот факт является ожидаемым, поскольку конструкция смежных классов позволяет получить однородно преобразующиеся величины наиболее общего вида. По этой причине, подобные выражения обязаны возникнуть при "расширении" симметрии при помощи приёма Штокельберга. Таким образом, теории, получаемые путём применения приёма Штокельберга, также можно получать и анализировать при помощи конструкции смежных классов.

В заключении этого раздел отметим, что поля Штокельберга используются также для "расширении" пространственно–временных симметрий теории, в том числе для восстановления диффеоморфизм–инвариантности в теориях с массивным гравитоном [50–52].

1.6. Члены Весса–Зумино–Виттена

Конструкция смежных классов также позволяет строить лагранжианы, преобразующиеся с точностью до полной производной под действием группы G. Подобные лагранжианы называют лагранжианами Весса–Зумино–Виттена [53, 54], которые впервые изучали их для случая спонтанно нарушенных симметрий. С теоретико–групповой точки зрения, существование подобных членов тесно связано с изучением нетривиальных ко–циклов на фактор пространстве G/H [55–57]. Ниже описан способ построения подобных лагранжианов с помощью конструкции смежных классов.

Предположим, что имеется группа G, причём её подгруппа H реализована однородно. Потребуем также, чтобы фактор пространство G/H было однородно–редуктивным. Тогда соответствующие формы Маурер–Картана,

$$g_H^{-1}dg_H = iZ_a\omega_Z^a + iV_i\omega_V^i \ , \tag{1.57}$$

где V_i — базис генераторов в алгебре H, а Z_a дополняют их до полного набора базисных генераторов алгебры G, удовлетворяют уравнению Маурер–Картана,

$$d\omega^\alpha + \frac{1}{2}f^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d\omega = -\omega \wedge \omega \ , \tag{1.58}$$

где $f^\alpha_{\beta\gamma}$ — структурные константы алгебры G, $\omega \equiv \omega^\alpha Q_\alpha$, Q_α — все генераторы алгебры G, а греческие индексы обозначают элементы из алгебры G. Тогда задача нахождения членов типа Весса–Зумино–Виттена сводится к нахождению таких точных дифференциальных форм Ω_{WZ}, что

$$d\Omega_{WZ} = \Omega_{inv} \ , \tag{1.59}$$

где Ω_{inv} является H–инвариантным внешним произведением дифференциальных форм ω_Z^a. Действительно, Ω_{inv} инвариантна относительно действия группы G. В силу уравнения (1.59), это означает, что форма Ω_{WZ} преобразуется под действием G с точностью до полной производной. Таким образом, лагранжиан

$$\mathcal{L}_{WZ} = \Omega_{WZ} \tag{1.60}$$

представляет собой член типа Весса–Зумино–Виттена.

В качестве примера рассмотрим построение члена Черна–Саймонса [58] в теории с калибровочной симметрией $G_{loc} = SU(n)$. Как обсуждалось в разделе 1.3, для построения подобных теорий необходимо рассматривать фактор пространство (1.40). Для него уравнения Маурер–Картана принимают вид [40]

$$d\omega_P^\mu = 0 \, , \quad d\omega^a = \frac{g}{2}f^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \omega_P^\mu \wedge \omega_\mu^a \, , \quad d\omega_\mu^a = gf^a_{bc}\omega_\mu^b \wedge \omega^c + \omega_P^\nu \wedge \omega_{\nu\mu}^a \ . \tag{1.61}$$

Тогда, используя выписанные уравнения, можно явным вычислением убедиться, что

$$
\begin{gathered}
\delta_{ab}\omega_P^\mu \wedge \omega_\mu^a \wedge \omega_P^\nu \wedge \omega_\nu^b = d\Omega_{CH}\ , \\
\Omega_{CH} = \left(\delta_{ab}\omega_P^\mu \wedge \omega_\mu^a \wedge \omega^b + \frac{1}{6} g f_{abc}\omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c\right)\ ,
\end{gathered}
\tag{1.62}
$$

где δ_{ab} — плоская метрика на $SU(n)$. Как следует из этого равенства, хотя 3–форма Ω_{CH} содержит неоднородно преобразующиеся члены ω^a, она преобразуется с точностью до полной производной при действии $SU(n)$. Переписывая Ω_{CH} в терминах A^a, имеем

$$
\Omega_{CH} = \delta_{ab}A^a \wedge dA^b - \frac{1}{3} g f_{abc} A^a \wedge A^b \wedge A^c\ , \tag{1.63}
$$

что полностью воспроизводит член Черна–Саймонса для группы $SU(n)$.

Отметим, что, как показывает рассмотренный пример, для построения n–мерных членов Весса–Зумино–Виттена оказывается необходимо рассматривать теорию, как если бы она была определена в $(n+1)$–мерном пространстве.

1.7. Обратный эффект Хиггса

В случае спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий возникает проблема, не имеющая аналога в случае спонтанного нарушения внутренних симметрий. А именно, некоторые намбу–голдстоуновские поля могут оказаться избыточными в том смысле, что они не описывают независимые флуктуации вакуума. Для избавления от подобных мод был предложен механизм, известны как обратный эффект Хиггса. Ниже приведён обзор данной конструкции, основанный на стандартной технике применения конструкции смежных классов в случае спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий [7]. Она является обобщением применения конструкции смежных классов для спонтанного нарушения внутренних симметрий и заключается в следующем: фактор–пространство, используемое для получения однородно преобразующихся величин, должно содержать все нарушенные генераторы, а также генераторы трансляций. Последнее необходимо потому, что генераторы нарушенных симметрий, в общем случае, нетривиально коммутируют с трансляциями. Как следствие, включение трансляций в фактор–пространство необходимо для его однородной редуктивности. Более подробное обсуждение связанных с использованием данной техники проблем, а также её теоретико–групповое пересмотрение, будет сделано в главе 3.

Наиболее удобно продемонстрировать обратный эффект Хиггса на классическом примере спонтанного нарушения $(d+1)$–мерной группы Пуанкаре до её d–мерной подгруппы Пуанкаре скалярной доменной стенкой [14, 59]. Наиболее простое действие, допускающее вакуумное решение в виде доменной стенки, имеет вид

$$\mathcal{S} = \int d^{d+1}x \left(\frac{1}{2} \partial_m \varphi \partial^m \varphi - \frac{\lambda}{4} \left(\varphi^2 - v^2 \right)^2 \right) \ , \tag{1.64}$$

где φ является действительным скалярным полем и предполагается, что $\lambda, v > 0$. Путём выбора подходящих координат, наиболее общее решение с доменной стенкой можно привести к виду

$$\varphi_z = v \tanh \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} v z \right) \ , \tag{1.65}$$

где $z \equiv x_d$. Подобное решение соответствует схеме спонтанного нарушения симметрий

$$ISO(1,d) \to ISO(1,d-1) \ . \tag{1.66}$$

Эффективная теория над решением (1.65) описывается лагранжианом типа Намбу–Гото,

$$\mathcal{L}_\psi = \int dz (\partial_z \varphi_z)^2 \sqrt{|h|} \,, \quad h = \det h_{ij} \ , \quad h_{ij} = \eta_{ij} + \partial_i \psi \partial_j \psi \ , \tag{1.67}$$

где $\psi = \psi(x)$ описывает флуктуацию поля φ над вакуумным решением (1.65) и η_{ij} является метрикой Минковского.

В соответствии со стандартной техникой построения эффективных лагранжианов, для воспроизведения эффективного действия (1.67) следует использовать фактор пространство

$$g_H = e^{iP_i x^i} e^{iP_z \psi'} e^{iL_i \xi^i} \ , \tag{1.68}$$

где P_i — ненарушенные трансляции, ψ' и ξ^i является намбу–голдстоуновскими полями для нарушенных генераторов P_z и $L_i \equiv L_{iz}$, трансляций вдоль оси z и преобразований Лоренца, затрагивающих ось z, соответственно.

На данном шаге становится очевидной проблема в применении стандартной техники для построения эффективного действия над скалярной доменной стенкой. А именно, эффективная теория описывает только одну степень свободы, ψ, в то время как применение конструкции смежных классов ведёт к появлению $d+1$ полей — одного для нарушенных трансляций и d–компонентного поля для нарушенных генераторов Лоренца. Таким образом, имеется явное несоответствие в количестве степеней свободы в явном вычислении и теоретико–групповом способе построения эффективных теорий.

Для решения этой проблемы обсудим сначала физический смысл полей ψ' и ξ^i. Поле ψ' соответствует моде, описывающей сдвиги (вдоль оси z) доменной стенки, в то время как ξ^i описывает повороты доменной стенки. Однако, любой поворот доменной стенки можно получить и как сдвиг доменной стенки. Действительно, поскольку параметр при нарушенном генераторе P_z является полем, то действием $e^{iP_z \psi'}$ на доменную стенку можно получить любое её возмущение. Это означает, что набор полей (ψ', ξ^i) является избыточным в том смысле, что разные значения полей могут описывать одну и ту же флуктуацию доменной стенки [8]. Причём, как видно из приведенного рассуждения, для описания всевозможных флуктуаций вакуума достаточно одного поля ψ'. Таким образом, для получения хорошо определенной теории необходимо некоторым образом исключить поле ξ^i из теории.

От подобных “избыточных” полей оказывается возможным избавиться при помощи так называемого обратного эффекта Хиггса [9, 60]. Он заключается в том, что на формы Маурер–Картана накладываются совместные с симметриями теории ограничения, которые позволят исключить поле ξ^i из теории. Для скалярной доменной стенки эта процедура проходит следующим образом. Формы Маурер–Картана для фактор пространства (1.68),

$$g_H^{-1} dg_H = iP_i\omega_P^i + iP_z\omega^z + iL_i\omega_L^i + iM_{ij}\omega_M^{ij} \ , \tag{1.69}$$

где M_{ij} — генераторы ненарушенной $SO(1, d-1)$, имеют вид

$$\omega_P^i = \Lambda^i_j dx^j + \Lambda^i_z d\psi' \ , \quad \omega^z = \Lambda^z_i dx^i + d\psi' \ , \quad \Lambda^\mu_\nu = \left(e^{-iL_i\xi^i}\right)^\mu_\nu \ , \tag{1.70}$$

где неважные для дальнейшего формы Маурер–Картана были опущены. Особенность приведенных форм заключается в том, что намбу–голдстоуновское поле ξ^i входит в форму Маурер–Картана ω^z без знака дифференциала. Заметим далее, что поскольку ω^z преобразуется однородно под действием всех симметрий, то можно потребовать зануления ω^z,

$$\omega^z = 0 \ . \tag{1.71}$$

Это требование инвариантно относительно действия группы и потому согласованно с симметриями. Более того, оно позволяет выразить “нефизическое” поле ξ^i через ψ',

$$\Lambda^z_i = -\partial_i \psi' \ . \tag{1.72}$$

Используя оставшиеся формы Маурер–Картана (на ограничении (1.72)), оказывается возможным построить эффективный лагранжиан с правильным количеством степеней свободы [14, 59]. В частности, полученный прямым вычислением эффективный лагранжиан (1.67) воспроизводится в рамках такого подхода как инвариантный d–мерный элемент объёма. Высшие поправки по величине импульса в эффективном действии получаются при использовании формы ω_L^i на ограничении (1.72).

В общем случае, применение обратного эффекта Хиггса возможно в том случае, когда существуют такие нарушенные генераторы Z_a и Z_b, что выполняется условие

$$[P_\mu, Z_a] \supset Z_b \; . \tag{1.73}$$

Обозначим намбу–голдстоуновские поля, соответствующие генераторам Z_a и Z_b как $\tilde{\psi}^a$ и $\tilde{\varphi}^b$ соответственно. Тогда условие (1.73) гарантирует, что форма Маурер–Картана ω_{Z_b} будет содержать $\tilde{\psi}^a$ без производных, а поле $\tilde{\varphi}^b$ будет входить в эту же 1–форму под знаком дифференциала. Таким образом, оказывается возможным наложить инвариантное условие вида

$$\omega_{Z_b} = 0 \; , \tag{1.74}$$

которое позволяет исключить из теории поле $\tilde{\psi}^a$, выразив его через $\tilde{\varphi}^b$.

Иначе говоря, обратный эффект Хиггса позволяет найти такую комбинацию “физических” полей и их производных, которая преобразуется также, как и “избыточное” поле. Наличие подобного выражения позволяет всюду заменить “избыточное” поле “физическими” величинами.

Изложенный подход обладает одним недостатком. А именно, вопрос о том, необходимо ли применять обратный эффект Хиггса или нет, должен каждый раз изучаться отдельно, исходя из физических соображений. Например, в рассмотренном выше случае скалярной доменной стенки рассуждения показали, что поле ξ^i является нефизическим, и потому на 1–форму ω^z необходимо наложить требование (1.71). Однако, в некоторых случаях поля типа $\tilde{\psi}^a$ могут представлять физические степени свободы. Глава 3 настоящей работы посвящена более детальному обсуждению данного вопроса: в ней будет дан критерий необходимости применения обратного эффекта Хиггса, а также установлена его интерпретация.

Обратим внимание, что в случае выполнения условия (1.73) можно выбрать более удобную параметризацию полей, чем изначальная [11]. А именно, рассмотрим замену переменных

$$\Theta = \omega_{Z_b} \,. \tag{1.75}$$

Подобная замена хорошо определена, поскольку сохраняет количество степеней свободы в теории (обе части уравнения содержат одинаковое количество полей без производных). Преимущество данной параметризации заключается в том, что поле Θ преобразуется однородно под действием группы G и потому может входит в лагранжиан без производных. По этим причинам некоторые авторы не называют поле Θ намбу–голдстоуновской модой. Однако, если она описывает независимые флуктуации вакуума, то её существование в теории с необходимостью следует из теоретико–групповых соображений. Более того, как будет показано в главе 3, динамика этой моды ограничена симметриями больше, чем динамика обычных полей материи. По этой причине в настоящей работе поле Θ будет рассматриваться как намбу–голдстоуновское поле. В новых переменных вопрос о необходимости использования обратного эффекта Хиггса сводится к вопросу о том, необходимо ли поле Θ для описания возможных флуктуаций вакуума.

Наиболее часто, обратный эффект Хиггса применяется для построения калибровочно–инвариантных теорий [9, 40] (и приводит к выражением, совпадающих с приведенными в разделе 1.3). Также, обратный эффект Хиггса применяется для построения эффективных теорий, возникающих вследствие спонтанного нарушения конформной группы [9, 26, 27]. Вопрос корректности применения данной техники к построению конформно–инвариантных лагранжианов будет обсуждён в следующем главе.

Глава 2

Применение конструкции смежных классов к построению конформно инвариантных теорий

2.1. Введение к главе

Как уже упоминалось во введении, конструкция смежных классов применялась для построения конформно инвариантных лагранжианов в работах [23–25, 27]. Однако, использованные в данных исследованиях конструкции были основаны на технических аспектах метода смежных классов и не включали исследования соответствующей теоретико–групповой структуры и метода индуцированных представлений. Как следствие, при построении теорий возникали неопределенности с интерпретацией появляющихся в конструкции величин, а также необходимость использовать *ad hoc* прескрипции.

Рассмотрим используемую в работах [23–25] конструкцию более подробно. В соответствии со стандартной техникой конструкции смежных классов, без привлечения геометрических соображений, для построения конформно инвариантных теорий следовало бы использовать фактор–пространство

$$g_h = e^{iP_\mu x^\mu} \ , \tag{2.1}$$

где P_μ — генераторы трансляций конформной группы. Однако, подобное фактор–пространство не является однородно редуктивным и потому не может быть использовано для получения однородно преобразующихся величин. Чтобы решить эту проблему, было предложено пополнить фактор–пространство (2.1) экспонентами от генераторов специальных конформных преобразований,

$$g_h = e^{iP_\mu x^\mu} e^{iK_\nu y^\nu} \ , \tag{2.2}$$

где K_ν — генераторы специальных конформных преобразований. Подобное фактор–пространство уже является однородно редуктивным и потому может быть использовано для получения однородно преобразующихся величин. Однако, использование фактор–пространства (2.2) для построения конформно инвариантных теорий предлагалось как *ad hoc* прескрипция, что сделало затруднительным интерпретацию входящих в него величин. А именно, возникает вопрос интерпретации параметра y^ν. С одной стороны, поскольку конформные теории поля не содержат подобного поля, рассматривать y^ν как поле неестественно. С другой стороны, если рассматривать y^ν как координаты, то конструируемые подобным образом теории оказываются определенными на пространстве удвоенной размерности. Подобное предположение также не является удовлетворительным, поскольку, в итоге, приходится из каких–либо дополнительных соображений фиксировать зависимость полей от дополнительных координат.

Одной из целей настоящей главы является разработка техники применения конструкции смежных классов к построению конформно инвариантных лагранжианов, основанной на теоретико–групповом подходе [28]. Ниже будет показано, как последовательное применение метода индуцированных представлений приводит к самосогласованному и натуральному построению конформно инвариантных теорий в рамках конструкции смежных классов. С точки зрения теоретико–группового подхода, предлагаемая конструкция расширяет стандартный метод построения инвариантных лагранжианов на случай, когда группа симметрий содержит дискретные элементы типа инверсии координат. Как обсуждалось в разделе 1.2, особенность описанной ситуации заключается в том, что соответствующие подобным группам однородные пространства изоморфны фактор–пространству, содержащему дискретный элемент группы. По этой причине стандартная конструкция смежных классов оказывается неприменимой и требует модификации.

С целью облегчения восприятия излагаемого в последующих разделах разрабатываемого подхода перечислим здесь основные результаты исследования. В силу того, что конформные теории поля определены на (псевдо–)сфере, для получения однородно преобразующихся величин оказывается действительно необходимым использовать фактор–пространство (2.2). При этом x^μ и y^ν должны рассматриваться как координаты вокруг северного и южного полюсов сферы соответственно, а также должны быть связаны картой сшивки соответствующих областей,

$$y^\nu = \frac{x^\nu}{x^2} \quad x^2 \neq 0 \ . \tag{2.3}$$

Следствием данного условия является требование, что y^ν может входить в получаемые при помощи конструкции смежных классов лагранжианы только через полную производную. Это является принципиально новым требованием, возникающим при построении конформно инвариантных лагранжианов. Примечательно, что следствием данного требования является такое известное свойство конформных теорий поля, как обращение в полную производную вириального тока теории [61]. Также, в основной части настоящей главы будет показано, что с помощью предлагаемой техники можно воспроизвести наиболее известные лагранжианы конформных теорий поля.

С точки зрения построения конформно–инвариантных теорий, научная новизна разработанного подхода заключается в том, что он позволяет получать однородно преобразующиеся величины напрямую, посредством конструкции смежных классов. Благодаря этому, в отличии от стандартного подхода получения конформно инвариантных теорий [22], отпадает необходимость во введении полей во вспомогательном пространстве и последующем их проектировании на физические состояния. Таким образом, разработанный метод может рассматриваться как шаг вперёд в развитии техники построения конформных теорий поля.

Второй целью настоящей главы является установление и обоснование техники применения конструкции смежных классов для построения эффективных лагранжианов, возникающих при спонтанном нарушении конформной инвариантности. В первых работах по этой теме [23] было замечено, что прямолинейное применение конструкции смежных классов в подобных случаях приводит к массивности намбу–голдстоуновских полей для специальных конформных преобразований. Было предположено, что это является аналогом механизма Андерсона–Хиггса–Кибла [45–47] в случае спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий. Однако, дальнейшие исследования показали, что намбу–голдстоуновские поля для специальных конформных преобразований не соответствуют независимым флуктуациям вакуума, каким бы он не был, и потому должны быть исключены из теории [8, 9]. Однако, поскольку в момент появления данных работ не был окончательно установлен способ получения конформно инвариантных лагранжианов в ненарушенной фазе,[1] вопрос корректности предлагаемой в упомянутых работах конструкции остаётся открытым.

В разделе 2.8 настоящей главы проводится расширение области применимости конструкции смежных классов на случай, когда конформная группа оказывается спонтанно нарушенной. Это позволяет показать, что намбу–голдстоуновские поля для специальных конформных преобразований всегда представляют "нефизические" степени свободы. Данный результат позволяет также показать, что стандартного подход, включающий применение обратного эффекта Хиггса, хотя и не является математически строгим, тем не менее, формально позволяет воспроизвести все возможные эффективные лагранжианы в пространствах размерности больше двух. Однако, изучение двухмерного пространства позволяет указать на особый случай, когда применение обратного эффекта Хиггса затруднительно, в то время как разработанная техника позволяет строить эффективные лагранжианы и в этом случае. На основе данного наблюдения предлагается расширение техники обратного эф-

[1] В настоящей работе принята следующая терминология: говорят, что теория находится в ненарушенной фазе, если действие всех генераторов симметрий аннигилирует вакуум. В противном случае, теория находится в спонтанно нарушенной фазе.

фекта Хиггса.

Настоящая глава устроена следующим образом. В разделе 2.2 обсуждается конформная группа и её особенности, которые будут важны в дальнейшем. В разделе 2.3 подробно обсуждаются причины, по которым стандартная техника метода индуцированных представлений не может быть применена в данном случае. Раздел 2.4 посвящен разрабатыванию обобщения стандартной техники индуцированных представлений на случай, когда атлас многообразия, на котором определена теория, не покрывается одной картой. В разделе 2.5 показано, что предлагаемая техника согласована со всеми симметриями и, более того, условие (2.3) требуется ими. В разделе 2.6 предлагаемая конструкция применяется для построения конформно инвариантных теорий, а также воспроизводятся наиболее известные свойства конформных теорий поля. В разделе 2.7 дано строгое математическое обоснование предлагаемого подхода, а также его обобщения на другие группы. Наконец, раздел 2.8 посвящен расширению разработанной техники на случай спонтанного нарушения конформной инвариантности, а также обобщению техники обратного эффекта Хиггса.

2.2. Конформная группа

Для упрощения изложения всюду далее рассматривается d–мерная Евклидова конформная группа. Обобщение результатов на случай пространства–времени Минковского может быть сделано прямолинейно.

По определению, конформная группа состоит из преобразований координат, которые переводят метрику в себя с точностью до локального фактора,

$$x^\mu \to x'^\mu : \quad g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) \ , \tag{2.4}$$

где $\Lambda(x)$ является произвольной функцией, возможно сингулярной, и $\mu = 1, .., d$. Произвольный элемент конформной группы можно представить в виде произведения пяти базовых элементов,

$$\mathrm{Conf}(d) = \{\, e^{iP_\mu a^\mu},\ e^{iL_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}\ ,\ e^{iD\sigma}\ ,\ R,\ \ I\,\}\ , \tag{2.5}$$

где $L_{\mu\nu}$ и D являются генераторами преобразований Лоренца и дилатаций соответственно, R является отражением координат, а I их инверсией,

$$R:\ x'^1 = -x^1\ ,\ x'^m = x^m\ ,\ m = 2,..,d-1, \qquad I:\ x'^\mu = \frac{x^\mu}{x^2}\ , \tag{2.6}$$

где штрих означает преобразованные величины. В частности, в силу существования изоморфизма $\mathrm{Conf}(d) = O(1, d+1)$, и поскольку $O(1, d+1)$ является группой симметрий гиперповерхности $-y_0^2+y_1^2+...+y_{d+1}^2 = 0 \subset \mathbb{R}^{1,d+1}$, можно дать строгое определение инверсии как дискретного элемента $O(1, d+1)$, изменяющего знак y_0 .

Конформная группа имеет автоморфизм, генерируемый инверсией,

$$G\ \to\ G:\quad \forall\, g \in G\ \to\ I\, g\, I\ , \tag{2.7}$$

который позволяет проиллюстрировать особую роль инверсии. А именно, под действием автоморфизма (2.7) базовые элементы конформной группы преобразуются как

$$I\, e^{iP_\mu a^\mu} I \equiv e^{iK_\mu a^\mu}\ ,\quad I\, e^{iL_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}} I = e^{iL_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}\ ,\quad I\, e^{iD\sigma} I = e^{-iD\sigma}\ ,\ \ IRI = R\ . \tag{2.8}$$

Первое из выписанных выше соотношений является определением специальных конформных преобразований. Необходимость введения последних показывает, что автоморфизм, генерируемый инверсией, отображает не все элементы группы в себя. Этот факт качественно отличает инверсию от отражения координат (генерируемый отражением координат автоморфизм конформной группы отображает все элементы группы в себя, с точностью до знака). Также, как будет вскоре показано, инверсия, в отличие от отражения координат, необходима для параметризации однородного d–мерного пространства конформной группы. По этим причинам симметрия в виде отражения координат может быть учтена стандартной конструкцией смежных классов и потому не будет обсуждаться далее. Наоборот, учёт симметрии в виде инверсии координат будет играть ключевую роль при разрабатывании способа применения конструкции смежных классов к построению конформно инвариантных теорий.

Как известно, d–мерным однородным пространством конформной группы является сфера S^d, которая эквивалентна Евклидову пространству, дополненному точкой на бесконечности. В частности, как видно из формулы (2.6), инверсия меняет местами начало координат и бесконечно удаленную точку. Заметим далее, что стандартный атлас сферы состоит из двух карт с началами координат в южном (S) и северном (N) полюсах сферы соответственно. В частности, по аналогии с конструкцией, изложенной в разделе 1, данные карты могут быть “созданы” путём действия трансляций и специальных конформных преобразований на S и N соответственно. Данное наблюдение также окажется принципиально важным для дальнейшего построения.

2.3. Невозможность применения стандартной техники

Покажем, что стандартная конструкция смежных классов не применима для построения конформно инвариантных теорий. Следуя алгоритму применения конструкции смежных классов, изложенному в главе 1, сначала необходимо определить группу стабильности произвольной точки однородного пространства конформной группы. В целях удобства, рассмотрим группу стабильности как северного, так и южного полюсов сферы,

$$\begin{aligned} S: &\quad S^d = \mathrm{Conf}(d)/(SG(d)\times P)\,, \\ N: &\quad S^d = \mathrm{Conf}(d)/(SG(d)\times K)\,, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где $SG(d) = SO(d)\times D$, $P = \{e^{iP_\mu y^\mu}\}$ является подгруппой трансляций, и $K = \{e^{iK_\nu y^\nu}\}$. Далее, для получения 1–форм Маурер–Картана необходимо взять логарифмическую производную одного из выписанных выше фактор–пространств. Однако, этот шаг оказывается невозможно совершить, поскольку оба фактор–пространства включают инверсию. При этом исключить последнюю из них невозможно, поскольку в этом случае соответствующие фактор–пространства не были бы изоморфны всей сфере. Таким образом видно, что стандартная техника в прямом виде не применима к построению конформно–инвариантных теорий.

Чтобы обойти обнаруженную проблему, можно было бы попробовать применить конструкцию смежных классов к построению представлений группы, получаемой из $\mathrm{Conf}(d)$ путём исключения инверсии. В этом случае поля теории будут определены на обычном Евклидовом пространстве, и соответствующее фактор–пространство имеет вид (2.1). Однако, как уже отмечалось выше, подобное фактор–пространство не является однородно редуктивным, и потому получаемые из него формы Маурер–Картана не могут быть использованы для построения инвариантных лагранжианов. Чтобы исправить эту проблему, можно расширать фактор–пространство (2.1) до (2.2) [23–25]. Тем не менее, это приводит к появлению двух новых проблем. Первая из них заключается в том, что подобный шаг является *ad hoc* прискрипцией, и потому оставляет вопрос интерпретации y^ν открытым. Действительно, с одной стороны, рассматривать y^ν в качестве поля неестественно, поскольку (не нарушенные) конформные теории поля не обязаны содержать подобную моду. С другой стороны, рассматривать их как дополнительные координаты также неестественно, поскольку получаемые таким образом поля будет зависеть от $2d$ координат, в то время как физически интересные теории определены на d–мерном многообразии.

Вне зависимости от возможности решения первой проблемы, вторая проблема показывает противоречивость подобного подхода. Чтобы обнаружить её, необходимо подействовать специальным конформным преобразованием на фактор–пространство (2.2) и, таким образом, найти закон преобразования координат (данная формула будет доказана в разделе 2.5)

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} + b^{\mu} x^2}{1 + 2b_{\mu} x^{\mu} + b^2 x^2} , \tag{2.10}$$

где b^{μ} являются параметрами применённого специального конформного преобразования, а x'^{μ} — новые координаты. Как видно, проблема заключается в том, что точка, для которой знаменатель в (2.10), обращается в ноль отображается на бесконечность, в то время как ни одна из точек $\mathbb{R}^d$ не отображается обратно на её место. Таким образом, действие специальных конформных преобразований на $\mathbb{R}^d$ не соответствует изоморфизму из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^d$, и потому закон преобразования координат под действием специальных конформных преобразований является плохо определённым. Данную проблему можно попробовать обойти путём ограничения области определения полей на некоторую окрестность начала координат и рассматрением специальных конформных преобразований с малыми значениями параметра b^{μ}. Однако, подобный шаг делает плохо определенным действие трансляций на фактор–пространство (2.2), что показывает его неприменимость. Таким образом, единственный способ решения выявленных проблем — это возвращение к рассмотрению полей, определённых на сфере и, соответственно, построению представлений полной конформной группы.

2.4. Двух–орбитная техника

Чтобы установить, как необходимо применять конструкцию смежных классов к построению конформно–инвариантных теорий на сфере, заметим следующее: все проблемы, выявленные в предыдущем разделе, возникли в следствие того, что атлас S^d должен состоять как минимум из двух координатных областей. Действительно, как было описано в главе 1, для группы Ли G, не содержащей дискретных элементов, можно ввести координаты на G, и, следовательно, также и на фактор–пространстве G/H. Далее заметим, что произвольное однородно пространство G, $\mathcal{A}$, изоморфно G/H, где H является группой стабильности произвольно выбранной точки $\mathcal{A}$. Тогда, если $\mathcal{A}$, как многообразие, может быть покрыто одной картой, то введённые на $\mathcal{A}$ координаты посредством изоморфизма $\mathcal{A}$ и G/H являются хорошо определенными на всём $\mathcal{A}$ (можно рассмотреть бесконечно малое смещение любой точки). Однако если разрешить G содержать дискретные элементы, то это уже не обязательно так. Например, для конформной группы и её однородного пространства S^d дифференциалы координат, введённые через изоморфизм (2.9), становятся сингулярными около одного из полюсов сферы.

Данное наблюдение позволяет предложить следующую процедуру построения конформно–инвариантных теорий. Рассмотрим фактор–пространство, получаемое факторизацией $\mathrm{Conf}(d)$ подгруппой, оставляющей оба полюса сферы на месте с точностью до их отображения друг в друга,

$$g_H = \mathrm{Conf}(d)/(SO(d) \times D \times I) = e^{iP_\mu x^\mu} e^{iK_\nu y^\nu} \ . \tag{2.11}$$

Если рассматривать x^μ и y^ν как независимые координаты, то фактор–пространство (2.11), как групповое многообразие, имеет размерность $2d$. Однако, если потребовать, чтобы x^μ и y^ν были связаны между собой картой сшивки координатных областей вокруг северного и южного полюсов сферы,

$$y^\nu(x) = \frac{x^\nu}{x^2} \,, \quad \vec{x} \neq \vec{0} \,, \tag{2.12}$$

и наоборот, фактор–пространство (2.11) становится изоморфным сфере S^d. Последнее и является тем пространством, на котором определены конформные теории поля. В данной прискрипции y^ν, фактически, рассматриваются как координаты вокруг северного полюса сферы, а условие (2.12) является стандартным способом сшивки двух пространств с целью получению нового. В частности, подобный способ часто используется в так называемой “перестройке Морса”, известной также как теории “хирургии” многообразий [62, 63].

Таким образом, для построения конформно–инвариантных теорий можно придерживаться следующего алгоритма:

- Начать с однородно редуктивного фактор–пространства (2.11), в котором x^μ рассматриваются как координаты, а y^ν — как поле.
- Найти однородно преобразующиеся величины (дифференциальные формы Маурер–Картана) для фактор–пространства (2.11).
- Строить конформно–инвариантные теории как $SG(d)$–инвариантные комбинации однородно преобразующихся величин с дополнительным требованием, что получаемые лагранжианы допускают (2.12) в качестве решения. Это требование гарантирует, что построенные таким образом теории действительно определены на сфере, а не $2d$–мерном многообразии.

Стоит подчеркнуть, что данная процедура подразумевает, что только x^μ являются независимыми координатами, и потому всё поля должны вводиться только как функции x^μ. В контексте установления изоморфизма между S^d и фактор–пространством (2.11), последнее можно рассматривать как действующее на северный и южный полюса сферы одновременно. При этом требование (2.12) факторизует получаемые при этом точки по действию инверсии (иначе говоря, сшивает координатные области вокруг северного и южного полюсов), и тем самым делает итоговое пространство изоморфным d–мерной сфере. Подобная интерпретация предлагаемой техники, основанная на методе индуцированных представлений, и является причиной, по которой разрабатываемой подход был назван “двух–орбитной” техникой.

Прежде чем применить описанную выше процедуру к построению конформно–инвариантных лагранжианов, следует прокомментировать следующие вопросы.

Во–первых, хотя изложенные выше соображения позволяют в некоторой степени обосновать предлагаемую конструкцию, ей, тем не менее, не достаёт строгого математического обоснования. В секции 2.6 будет показано, что использование фактор–пространства (2.11) и условия (2.12) напрямую следует из метода индуцированных представлений в случае, когда атлас рассматриваемого многообразия должен состоять более чем из одной карты. А именно, в ней показано, что предлагаемая конструкция позволяет ввести атлас на S^d. Данный подход предоставляет наиболее полное и строгое математическое обоснованием предлагаемой конструкции.

Во–вторых, в предлагаемом подходе x^μ и y^ν выполняют различные роли: x^μ являются независимыми координатами, в то время как y^ν является полем. Введение такой прискрипции обосновано в разделе 2.6 при помощи метода индуцированных представлений. Однако стоит заметить, что роли x^μ и y^ν, конечно, можно поменять местами, поскольку каждая из них позволяет покрыть координатной сеткой все многообразие за исключением одного из полюсов сферы.

Далее следует заметить, что условие (2.12) может противоречить симметриям, или что лагранжианы, допускающие (2.12) в качестве решения, не существуют. В следующем разделе показано, что, на самом деле, условие (2.12) не только согласовано с симметриями, но и требуется ими. Также в разделе 2.5 показано, что предлагаемый подход позволяет воспроизвести все известные конформно–инвариантные теории, а также их свойства.

Наконец заметим, что в рассуждениях, приведших к фактор–пространству (2.11), нигде не было заложено, что оно должно было оказаться однородно редуктивным. Причина, по которой это произошло, а также почему, как будет показано ниже, закон преобразования координат и полей не будут зависеть от присутствующего в фактор–пространство параметра y^ν, будет объяснено в разделе 2.6.2.

2.5. Согласованность с симметриями

Один из двух способов, позволяющих показать, что условие (2.12) следует из симметрийных соображений, основан на сравнении применения двухшаговой и прямой схем индуцирования представлений. А именно, рассмотрим следующие два способа индуцирования представления $SG(d)$ до представления конформной группы:

$$SG(d):(\psi) \to \left[\begin{array}{l} SG(d)\times K:(y^\nu,\psi(y)) \\ SG(d)\times P:(x^\mu,\psi(x)) \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} \mathrm{Conf}(d):(x^\mu,y^\nu(x),\psi(x)) \\ \mathrm{Conf}(d):(y^\nu,x^\mu(y),\psi(y)) \end{array}\right. , \tag{2.13}$$

где стрелочки обозначают направление индуцирования представления, а в круглых скобках даны элементы представления на соответствующем шаге. На последнем этапе необходимо ввести действие I как инверсии координат, что также расширяет область определения полей до сферы. С другой стороны, можно индуцировать представление $SG(d)$ до представления $\mathrm{Conf}(d)$ напрямую. В соответствии с теоремой индуцирования по шагам [1, 64], получающиеся в результате представления должны быть эквивалентны. Тогда, в силу транзитивности, оба представления в (2.13) должны быть также эквивалентны. Это возможно только в том случае, если y^ν и x^μ связаны картой сшивки (2.12), что позволяет переходить между двумя представлениями в (2.13) при помощи замены координат (2.12). Таким образом, явный вид функций $y^\nu(x)$ и $x^\mu(y)$ в верхней и нижней схемах индуцирования представлений соответственно оказывается фиксирован симметриями — они должны даваться картой сшивки координатных областей (2.12).

Заметим далее, что схема индуцирования представления, ведущая к фактор–пространству (2.11), имеет вид

$$SG(d):(\psi) \ \to \ SG(d)\times I:(\psi) \ \to \ \mathrm{Conf}(d):(x^\mu,y^\nu,\psi(x,y)) \ . \tag{2.14}$$

Действительно, в данном случае факторизация по действую инверсии происходит сразу, как это и предлагалось в предыдущем разделе. При подобном выборе метода индуцирования представления вводимые поля является, формально, функцией $2d$ параметров. Однако здесь необходимо заметить, что поскольку на промежуточном этапе $SG(d)$ дополняется инверсией, необходимо факторизовать x^μ и y^ν не только под действием $SG(d)$ [1], но и под действием I. В частности, данный шаг подразумевает под собой выработку соответствующей функциональной меры. Последнее является сложной математической задачей, поскольку, как показывает (2.8), трансляции и специальные конформные преобразования связаны между собой действием инверсии, по действию которой и происходит факторизация. Вместо того, чтобы пытаться решать данную задачу напрямую, можно опять воспользоваться теоремой об индуцировании по шагам. А именно, она гарантирует, что представления, получаемые при помощи схем (2.13) и (2.14), эквивалентны. Это позволяет перейти от представления, предлагаемого схемой (2.14), к эквивалентному, в котором x^μ являются независимыми координатами, а y^ν являются полями, чьи уравнения движения должны допускать (2.12) в качестве решения. В частности, это также показывает, что поля могут быть введены как функции x^μ с самого начала.

Таким образом, геометрические соображения, использованные в предыдущем разделе, с одной стороны, и метод индуцированных представлений с другой стороны, находятся в полном согласии друг с другом. Данный результат является полностью ожидаемым, поскольку, как было упомянуто в главе 1, обсуждаемые техники основываются на одной и той же идее [1, 2].

Второй способ показать, что условие (2.12) требуется симметриями, заключается в изучении трансформационных свойств форм Маурер–Картана для фактор–пространства (2.11),

$$g_H^{-1} dg_H = iP_\mu \omega_P^\mu + iK_\nu \omega_K^\nu + iD\omega_D + iL_{\mu\nu}\omega_L^{\mu\nu} \ . \qquad (2.15)$$

Прямое вычисление даёт

$$
\begin{gathered}
\omega_P^\mu = dx^\mu\,, \quad \omega_D = 2y_\rho dx^\rho\,, \\
\omega_K^\nu = dy^\nu + 2y_\rho dx^\rho y^\nu - y^2 dx^\nu\,, \quad \omega_L^{\mu\nu} = -2y^\mu dx^\nu\,.
\end{gathered} \tag{2.16}
$$

Поскольку фактор–пространство (2.11) однородно редуктивно, действие всех непрерывных симметрий на формы Маурер–Картана хорошо определено. Также, как можно убедиться прямым вычислением, ни одно из них не перемешивает между собой 1–формы ω_P^μ и ω_K^ν. Однако, помимо непрерывных симметрий, необходимо также изучить трансформационные свойства форм под действием дискретных элементов, а именно, инверсии. Действие последней на формы Маурер–Картана эквивалентно применению группового автоморфизма (2.7), поэтому имеем

$$
\omega_P^\mu \to \omega_K^\mu\,, \quad \omega_K^\nu \to \omega_P^\nu\,, \quad \omega_D \to -\omega_D\,, \quad \omega_L^{\mu\nu} \to \omega_L^{\mu\nu}\,. \tag{2.17}
$$

Как видно из приведённых формул, действие инверсии меняет местами формы Маурер–Картана для трансляций и специальных конформных преобразований. Поскольку инверсия является симметрией теории, то получаемые в рамках конструкции смежных классов лагранжианы должны быть инвариантны относительно такого преобразования. Чтобы понять следствия данного требования, заметим, что автоморфизм (2.7) также порождает следующее отображение сферы в себя,

$$
S^d \ \to \ S^d: \ \ \forall\, s \in S^d \ \to \ \hat{I}\, s\,. \tag{2.18}
$$

Как можно легко понять, данное отображение меняет местами координатные сетки вокруг северного и южного полюсов сферы. Заметим далее, что, поскольку x^μ и y^ν определены как координаты в соответствующих областях, то автоморфизм (2.7) также меняет их роли. Таким образом, чтобы получить трансформированный лагранжиан (под действием инверсии), можно взять то же самое внешнее произведение дифференциальных форм, только для фактор–пространства

$$\tilde{g}_H = e^{iK_\nu y^\nu} e^{iP_\mu x^\mu} \ , \tag{2.19}$$

с поменянными ролями ω_P^μ и ω_K^ν. Полученный подобным образом лагранжиан и изначальный должны совпадать, что возможно только в том случае, если новая трансляционная форма Маурер–Картана, $\omega_K^\nu = dy^\nu$, является пуллбэком старой, $\omega_P^\mu = dx^\mu$, после замены координат (2.18). Это означает, что $y^\nu(x)$ должно даваться картой сшивки (2.12), что совпадает с результатом предыдущего подхода.

Заметим также, что требование (2.12) согласовано со всеми симметриями. Действительно, как можно убедиться, (2.12) зануляет форму Маурер–Картана ω_K^ν. Последняя преобразуется однородно под действием всех непрерывных элементов конформной группы, и потому требование (2.12) является инвариантным. Наконец, действие инверсии приводит к только что обсужденной замене ролей x^μ и y^ν, что также согласовано с симметриями.

Приведенное в настоящем разделе рассмотрение показывает, что условие (2.12), введёное ранее как способ уменьшения размерности фактор–пространство (2.11), на самом деле следует из симметрийных соображений. Таким образом, при построение конформно инвариантных теорий разрешены только такие $SG(d)$–инвариантные лагранжианы, которые допускают (2.12) как решение уравнений движений. Это является принципиально новым требованием, возникающим при применении конструкции смежных классов к построению конформно инвариантных теорий. Подчеркнём, что оно не имеет аналога в стандартной конструкции смежных классов.

2.6. Применение двух–орбитной техники

2.6.1. Воспроизведение представлений конформной группы

Прежде чем приступить к построению конформно–инвариантных теорий, необходимо убедиться, что представления конформной группы правильно воспроизводятся в рамках предложенной конструкции. Как следует из формулы (2.14) и последующей дискуссии, поля материи ψ вводятся как (неприводимые) представления группы $SG(d)$. Таким образом, они однозначно характеризуются значениями спина s и масштабной размерности Δ_ψ, как это и должно быть.

Как следует из изложенной в главе 1 техники, чтобы определить закон преобразования полей под действием конформной группы, следует взять произвольный элемент последней, $g \in \mathrm{Conf}(d)$, и привести произведение g и g_H к стандартному виду,

$$g g_H = e^{iPx'(x,g)} e^{iKy'(x,g)} e^{iD\sigma(x,g)} e^{iL\omega(x,g)} \,. \tag{2.20}$$

Заметим, что в силу коммутационных соотношений конформной алгебры параметры при генераторах в правой части выписанного уравнения являются функциями от x^μ и g, но не y^ν. Из приведённой выше формулы также следует, что под действием g поля материи и координаты преобразуются следующим образом:

$$\psi(x) \to Rep(e^{-iD\sigma(x,g^{-1})}, e^{-iL_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}(x,g^{-1})})\psi(x)\,, \tag{2.21}$$

$$x^\mu \to x'^\mu(x,g^{-1})\,. \tag{2.22}$$

где $Rep(\cdot)$ обозначает представление $SG(d)$, соответствующее ψ. Можно легко убедиться, что из приведенных формул следуют стандартные законы преобразований x^μ и ψ под действием дилатаций и преобразований Лоренца — появляющиеся в правой части выражения (2.20) параметры σ и $\omega^{\mu\nu}$ не зависят от координат, x^μ является вектором с масштабной размерностью -1, а ψ

является полем со спином s и масштабной размерностью Δ_ψ. Далее, чтобы определить действие специальных конформных преобразований, необходимо подействовать элементом $g = e^{iK_\nu b^\nu}$, где b^ν является свободным параметром, на фактор–пространство (2.11). Прямое вычисление показывает, что в инфинитеземальном виде σ, $\omega^{\mu\nu}$ и x'^μ даются выражениями

$$\sigma = 2b_\mu x^\mu\,, \quad \omega^{\mu\nu} = b^\mu x^\nu - b^\nu x^\mu\,, \quad x'_\mu = x_\mu + 2b_\nu x^\nu x_\mu - x^2 b_\mu\,, \tag{2.23}$$

которые совпадают с хорошо известным стандартными выражениями для данных величин. Тогда групповое свойство гарантирует, что они будут совпадать также и на полном нелинейном уровне. Подстановка полученных выражений обратно в (2.21) и (2.22) показывает, что предлагаемая конструкция правильно воспроизводит представления конформной группы. В частности, получаемые таким образом поля являются так называемыми квази–примарными. Действительно, они принадлежат неприводимому представлению $SG(d)$, а также, как это следует из формул (2.21) и (2.23), $\hat{K}_\mu\psi(0) = 0$. Таким образом, ψ являются квази–примарными полями по определению.

Заметим также, что y^ν необходимо рассматривать именно как поле. В противном случае, то есть если фиксировать (2.12) с самого начала, действие трансляций на фактор–пространство (2.11) становится несогласованным с атласной структурой. А именно, при действии трансляций координаты будут сдвигаться, в то время как y^ν будет оставаться неизменным, что приводит к нарушению условия (2.12). Наоборот, если рассматривать y^ν как поле, то функциональная зависимость (2.12) будет оставаться справедливой при действии любого элемента из группы Пуанкаре.

2.6.2. Построение конформно–инвариантных теорий

Перейдём теперь к построению конформно–инвариантных лагранжианов. В настоящей работе рассмотрение будет ограничено случаем, когда производные полей входят в лагранжиане не более чем квадратично, а также не содержат высших производных полей. Данное ограничение введено в связи с тем, что именно подобные теории представляют наибольший физический интерес.

Пусть ψ является некоторым полем. Тогда соответствующее ему 1–форма имеет вид [7]

$$D\psi = \partial_\mu \psi dx^\mu + 2y^\nu(\eta_{\mu\nu}\Delta + i\hat{L}_{\mu\nu})\psi dx^\mu \ , \tag{2.24}$$

где Δ и $\hat{L}_{\mu\nu}$ являются представлениями D и $L_{\mu\nu}$, соответствующих ψ. Тогда, как следует из предыдущего обсуждения, конформно инвариантные лагранжианы должны строиться как $SG(d)$–инвариантные внешние произведения $D\psi,\ \psi,\ \omega_P^\mu$, и ω_K^ν (или соответствующих ковариантных производных), допускающих (2.12) как решению уравнений движения y^ν.

С целью пояснения использования предлагаемой конструкции, построение конформно–инвариантных теорий будет произведено в три этапа, начиная с самого простого случая и заканчивая самым общим. Также всюду в дальнейшем предполагается, что $d \geq 2$. В частности, при $d = 2$ под конформной группой понимается набор элементов (2.5), без расширения на бесконечномерный вариант [65–67].

Рассмотрим сначала случай, когда поля материи отсутствуют. Соответствующие лагранжианы описывают элемент объёма, который можно также рассматривать как “кинетический” член y^ν,

$$\mathcal{L}_y = \mathcal{L}_{kin}(\omega_P^\mu, \omega_K^\nu) \ , \tag{2.25}$$

где $\mathcal{L}_{kin}(\omega_P^\mu, \omega_K^\nu)$ является произвольной $SG(d)$–инвариантной комбинацией внешних произведений ω_K^ν и ω_P^μ. Заметим, что поскольку масштабная размерность ω_K^ν равна единице, то при $d > 2$ вариация (2.25) по отношению к y^ν будет всегда пропорциональна ω_K^ν. Следовательно, вне зависимости от явного вида $\mathcal{L}_y$, подобные теории всегда имеют решения

$$\omega_K^\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad y^\nu = 0 \ \cup \ y^\nu = \frac{x^\nu}{x^2} \ . \tag{2.26}$$

В случае $d = 2$, единственная $SG(d)$–инвариантная комбинация форм Маурер–Картана оказывается полной производной,

$$\varepsilon_{\mu\nu}\,\omega_P^\mu \wedge \omega_K^\nu = \partial_\mu y^\mu\, dx^1 \wedge dx^2 \;, \tag{2.27}$$

где $\varepsilon_{\mu\nu}$ — тензор Леви–Чивита. Таким образом, подобные лагранжианы не налагают ограничений на динамику y^ν, и, следовательно, требование, чтобы y^ν давалось картой сшивки координатных областей вокруг полюсов сферы, выполнено в данном случае. Поскольку лагранжианы вида (2.25) всегда удовлетворяют требованиям предлагаемой конструкции, в дальнейшем они будут всюду опускаться.

Заметим также, что выражение (2.12) обязано являться решением дифференциальных уравнений $\omega_K^\nu = 0$ в силу симметрийных соображений. Действительно, данные уравнения конформно–инвариантны, а выражения (2.12) и $y^\nu = 0$ являются единственными функциями, имеющими такую же симметрию. Следовательно, решения данных уравнений обязаны даваться выражениями, приведёнными в (2.26).

В качестве второго шага рассмотрим случай, когда поля материи ψ_a взаимодействуют с y^ν только через ковариантную производную первых. Обозначим через $\mathcal{L}_\psi$ лагранжиан соответствующей теории, тогда вариация действия по y^ρ, после тривиальных преобразований, приводит к уравнениям

$$2\frac{\delta L}{\delta D_\mu \psi_a}(\Delta\eta_{\mu\rho} + i\hat{S}_{\mu\rho})\psi_a \equiv V_\rho = 0 \;, \tag{2.28}$$

где V_ρ является “расширенным” вириальным током. Он включает в себя как обычный вириальный ток $V_\rho^{(0)}$, так и член, пропорциональный y^ν:

$$V_\rho \equiv V_\rho^{(0)} + V_{\rho\nu}^{(1)} y^\nu \;. \tag{2.29}$$

Заметим, что в выписанном выше уравнении поля ψ могут быть произвольными (но удовлетворяющие уравнениям движения на ψ), а также, что в нём нет производных y^ν. Следовательно, уравнение (2.28) на самом деле накладывает ограничения на структуру теории, а не на динамику y^ν. А именно, уравнение (2.28) показывает, что “расширенный” вириальный ток должен обращаться в ноль. Оказывается, что для его зануления достаточно обращения в ноль обычного вириального тока. Действительно, если $V_\rho^{(0)} = 0$, то это означает, что в уравнение (2.28) тензорная (индексная) структура первого множителя такова, что целое выражение зануляется вне зависимости от его явного вида. Легко понять, что последнее также гарантирует обращение в ноль и зависящей от y^ν части.

Таким образом, уравнения движения y^ν требуют, чтобы вириальный ток теорий обращался в ноль. Последнее является хорошо известным свойством конформных теорий поля [66, 68]. Более того, уравнение (2.28) показывает, что y^ν должны исчезать из лагранжиана. В частности, с помощью явных вычислений можно убедиться, что предлагаемый подход позволяет воспроизвести лагранжианы таких конформных теорий поля, как теории безмассовых скаляров, векторов и фермионов в пространстве двух, четырёх и произвольной размерности (в других размерностях пространства вириальный ток соответствующих теорий не обращается в ноль).

В качестве примера применения предлагаемой техники рассмотрим, как с её помощью можно воспроизвести лагранжиан Максвелла в $d = 4$. В соответствии с формулой (2.24) ковариантная производная векторного поля имеет вид

$$D_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu + 2y^\rho(\delta_{\mu\rho}\delta_\nu^\lambda + i(\hat{S}_{\mu\rho}^{(1)})_\nu^{\lambda})A_\lambda \; , \tag{2.30}$$

где $\hat{S}_{\mu\rho}^{(1)}$ является спин–1 представлением группы Лоренца. Тогда квадратичный $SG(d)$–инвариантный лагранжиан может быть записан в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}C^{\mu\nu\lambda\rho}D_\mu A_\nu D_\lambda A_\rho \; , \tag{2.31}$$

где $C^{\mu\nu\lambda\rho}$ является постоянным тензором, построенным из различных комбинаций $\delta^{\mu\nu}$, и симметричен при замене индексов $(\mu\nu) \leftrightarrow (\lambda\rho)$. Далее, требование зануления вириального тока теории (2.31) приводит к условию

$$C^{\mu\nu\lambda\rho}D_\lambda A_\rho(\delta_{\mu\sigma}A_\nu - \delta_{\mu\nu}A_\sigma + \delta_{\sigma\nu}A_\mu) = 0\ , \tag{2.32}$$

Данное требование будет выполнено только в том случае, если $C^{\mu\nu\lambda\rho}$ антисимметричен по перестановке первых дух индексов. Таким образом, требование конформной инвариантности теории приводит к лагранжиану Максвелла, как это и ожидалось. Примечательно, что полученная теория оказалась также автоматически калибровочно–инвариантной.

Наконец, наиболее общий вид конформно инвариантных лагранжианов получается, когда поля материи и y^ν могут перемешиваться произвольным образом. Поскольку ψ являются динамическими полями, то, по аналогии с предыдущим рассуждением, (2.12) будет являться решением уравнений движений только в том случае, когда y^ν входит в лагранжиан через полную производную. Таким образом, требуется изучить вопрос о том, когда члены взаимодействия суммируются в полную производную. Необходимым условием для этого является возможность представления $V_\rho^{(0)}$ в виде дивергенции другого тензора. Действительно, в противном случае линейный по y^ν член будет невозможно дополнить до полной производной. Данное требование оказывается и достаточным условием. А именно, если обычный вириальный ток является полной производной,

$$V_\rho^{(0)} = \partial_\mu L^\mu_\rho\ , \tag{2.33}$$

то следующий лагранжиан содержит y^ν только через полную производную,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}D\psi \wedge \star D\psi + \varepsilon_{\mu_0\ldots\mu_d}L^{\mu_0}_\nu \omega^\nu_K \wedge \omega^{\mu_1}_P \wedge \ldots \wedge \omega^{\mu_d}_P\ , \tag{2.34}$$

где $\star$ является оператором дуальности Ходжа. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим случай, когда ψ является векторным полем. Поскольку поля высших спинов строятся как произведение спин–1 представлений, а также поскольку поля с полуцелым спином, за исключением $\frac{1}{2}$, не представляют физического интереса, данное ограничение не влияет на потерю общности. Тогда в наиболее общем виде теорию с квадратичным кинетическим членом можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}C^{\mu a\nu b}(D_\mu\psi_a)(D_\nu\psi_b) \equiv \\ &\qquad \equiv \frac{1}{2}C^{\mu a\nu b}\Big(\partial_\mu\psi_a\partial_\nu\psi_b + 2\partial_\mu\psi_a y^\sigma(\hat{N}_{\sigma\nu}\psi_b) + y^\sigma y^\rho(\hat{N}_{\sigma\nu}\psi_b)(\hat{N}_{\rho\mu}\psi_a)\Big)\ , \end{aligned} \tag{2.35}$$

где $C^{\mu a\nu b}$ также является произвольным тензором, построенным из комбинаций $\delta^{\mu\nu}$, симметричным по перестановке индексов $(\mu a) \leftrightarrow (\nu b)$. В целях удобства обозначений векторный индекс ψ будет обозначаться латинской буквой. Поскольку вириальный ток обязан быть полной производной,

$$C^{\mu a\nu b}\partial_\mu\psi_a\hat{N}_{\rho\nu}\psi_b = \partial_\mu L^\mu_\rho\ , \tag{2.36}$$

то должно выполняться

$$\frac{\delta L^\mu_\rho}{\delta\psi_a} = C^{\mu a\nu b}\hat{N}_{\rho\nu}\psi_b\ . \tag{2.37}$$

Чтобы продвинуться далее в доказательстве, необходимо использовать явный вид L^μ_σ. Для поля спина 1, в общем случае, его можно записать в виде

$$L^\mu_\sigma = \alpha\psi^2\delta^\mu_\sigma + \beta\psi^\mu\psi_\sigma\ , \tag{2.38}$$

где α и β являются некоторыми постоянными. Тогда при помощи уравнений (2.37) и (2.38) можно переписать третий член в (2.35) в виде

$$\frac{1}{2}C^{\mu a\nu b}y^\rho y^\sigma(\hat{N}_{\rho\mu}\psi_a)(\hat{N}_{\sigma\nu}\psi_b) = \Delta\alpha y^2\psi^2 + \frac{\beta}{2}\left(y^2\psi^2 + (2\Delta - d)(y_\mu\psi^\mu)^2\right)\ . \tag{2.39}$$

Также, подставляя (2.38) в последний член в (2.34), имеем

$$\varepsilon_{\mu_0\ldots\mu_d}L^{\mu_0}_\nu\omega^\nu_K\wedge\omega^{\mu_1}_P\wedge\ldots\wedge\omega^{\mu_d}_P = dy^\rho\wedge\tilde{L}_\rho + (2L^\mu_\rho y^\rho y_\mu - y^2L^\mu_\mu)dx^1\wedge\ldots\wedge dx^d\ , \tag{2.40}$$

где $\tilde{L}_\rho$ является дифференциальной формой такой, что

$$\partial_\mu L^\mu_\rho = d\tilde{L}_\rho\ . \tag{2.41}$$

Полный лагранжиан (2.34) является суммой (2.35) и (2.40), которые, как можно убедиться прямым вычислением, содержат $y^\nu(x)$ только через полную производную, $d(y^\rho \tilde{L}_\rho)$.

Как показывает приведенное построение, класс масштабно инвариантных теорий, которые, на самом деле, являются конформно инвариантными после улучшения тензора энергии–импульса [61], описывается лагранжианами вида (2.34). Заметим, что поскольку члены взаимодействия ψ с y^ν суммируются в полную производную, то лагранжиан (2.34) можно разбить на две части,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} d\psi \wedge \star d\psi + d\tilde{\mathcal{L}}(y, \psi) \ . \tag{2.42}$$

Второй член в данном выражении является полной производной и потому может быть опущен. Тогда первый член можно рассматривать как член Весса–Зумина специально вида, который можно построить для теорий, определенных на многообразии, атлас которых должен включать в себя более одной карты. В частности, известные лагранжианы для безмассового скалярного поля и так называемой векторной "теории эластичности" [69] являются примерами подобных членов. А именно, они получаются путём отбрасывания полной производной из их полного лагранжиана, который имеет вид (2.34).

Стоит отдельно подчеркнуть следующее наблюдение. Как известно, лагранжианы конформно инвариантных теории с ненулевым вириальным током преобразуются в себя под действием конформной группы с точностью до полной производной. Выше было показано, что в рамках конструкции смежных классов подобные теории задаются лагранжианами вида (2.42). Таким образом, второй член в (2.42) показывает в точности то выражение, которое необходимо добавить к подобным теориям, чтобы они было строго инвариантны под действием конформной группы.

Заметим, что полученные результаты позволяют предложить более простую интерпретацию предлагаемой техники. А именно, в фактор–пространстве (2.2) поле y^ν можно рассматривать как вспомогательное, нефизическое поле, введённое только для применимости конструкции смежных классов. Тогда физическими лагранжианами являются только те, которые содержат y^ν через полную производную, то есть не зависят от y^ν. Таким образом, воспроизвелось бы ключевое требование разработанной техники, а, значит, и все её следствия. Хотя подобная интерпретация разработанной техники является возможной, следует отметить, что она не является строгой. По этой причине именно изложенные ранее геометрические и симметрийные соображения, а также теоретико–групповое рассмотрение раздела 2.7 следует рассматривать как фундамент предлагаемой конструкции.

Чтобы проиллюстрировать применение предлагаемой техники для построения конформно инвариантных лагранжианов, рассмотрим, как с её помощью воспроизводится теория φ^4 в $d = 4$. В данном случае оказывается более удобным работать в терминах ковариантных производных полей, нежели соответствующих дифференциальных форм. Из вида однородно преобразующихся 1–форм (2.24) и (2.16) следует, что ковариантные производные имеют вид

$$D_\mu\varphi = \partial_\mu\phi + 2y_\mu\varphi\,, \quad D_\mu y^\nu = \partial_\mu y^\nu + 2y_\mu y^\nu - y^2\delta^\nu_\mu\,. \tag{2.43}$$

В качестве отправной точки рассмотрим лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}D_\mu\varphi D^\mu\varphi + \frac{\lambda}{4}\varphi^4\,, \tag{2.44}$$

который является $SG(d)$–инвариантным и воспроизводит кинетический член φ. Однако, поскольку (2.44) явно зависит от y^ν, он не допускает (2.12) в качестве решения, и, следовательно, его необходимо модифицировать. Чтобы получить удовлетворяющий всем требованиям разработанной конструкции лагранжиан, рассмотрим вириальный ток данной теории,

$$V^{(0)}_\rho = \partial_\mu\delta^\mu_\rho\varphi^2\,. \tag{2.45}$$

Поскольку он является полной производной, оказывается возможным привести лагранжиан (2.44) к виду (2.34). Таким образом, полный конформно инвариантный лагражиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} D_\mu \varphi D^\mu \varphi + \varphi^2 D_\mu y^\mu + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \, . \tag{2.46}$$

Данный лагранжиан можно переписать в более удобном виде, схожем с (2.42),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 + \partial_\mu (y^\mu \varphi^2) \, . \tag{2.47}$$

Видно, что первые два члена в полученном лагранжиане воспроизводят стандартную теорию φ^4.

Подведём промежуточный итог. Предлагаемая техника воспроизводит все свойства конформной инвариантности и лагранжианы хорошо известных конформных теорий поля. Также она устанавливает специальную роль y^ν — они являются полями, которые должны даваться выражением (2.12) на уравнениях движения. По этой причине y^ν может входить в лагранжиан только через полную производную. Данное требование является принципиально новым и не имеет аналога в стандартной технике смежных классов. Причина его возникновения — наличие симметрии в виде инверсии координат, а роль — гарантирование, что вириальный ток теории является дивергенцией от некоторого тензора.

2.7. Геометрическая интерпретация и однородная редуктивность

В настоящем разделе будет дано строгое математическое обоснование техники, предложенной в предыдущем разделе. Приведенная конструкция расширяет стандартную технику применения конструкции смежных классов на случай, когда атлас многообразия, на котором определена теория? обязан содержать более одной карты. Также в ней исследован вопрос о том, для каких групп получаемое в результате разработанного подхода фактор–пространство является однородно редуктивным.

2.7.1. Геометрическая интерпретация

Пусть имеется некоторая группа G и её однородное d мерное пространство. Тогда, как было обсуждено в главе 1, имеет место изоморфизм

$$\mathcal{A} = G/H_0\ , \tag{2.48}$$

где H_0 — группа стабильности произвольной точки из $\mathcal{A}$. В случае общего положения G/H_0 состоит как из непрерывных групповых элементов, так и дискретных, которые будут обозначаться как $e^{iP^{(0)}_\mu x^\mu}$ и $T_m,\ m = 1, ...n$, соответственно. Поскольку стандартный случай хорошо известен, далее будет предполагаться, что существует хотя бы один T_m. В этом случае в рамках изоморфизма (2.48) дискретные симметрии отображаются в конечный набор точек $\{z_m\}$, в то время как $e^{iP^{(0)}_\mu x^\mu}$ изоморфно $\mathcal{A} \setminus \{z_m\}$. Тогда для произвольной точки $a \in \mathcal{A}\,,\ a \notin \{z_m\}$ имеем

$$a = e^{iP^{(0)}_\mu c^\mu} z_0\ , \tag{2.49}$$

где экспонента от трансляций рассматривается как оператор. В частности, можно взять дифференциалы обоих частей выписанной формулы, что показывает, что координаты на $\mathcal{A} \setminus \{z_m\}$ являются хорошо определенными. С другой стороны, для точки z_m (2.49) имеет вид

$$z_m = \hat{T}_m z_o\ . \tag{2.50}$$

В отличие от предыдущего случая оказывается невозможным рассмотреть бесконечно малое смещение подобной точки в силу невозможности взятия дифференциала от дискретного элемента группы. Данное наблюдение показывает, что в подобных случаях $\mathcal{A}$ не может быть покрыто одной хорошо определенной координатной сеткой.

Заметим, что группа стабильности H_m точки z_m имеет вид

$$H_m = \hat{T}_m H_0 \hat{T}_m^{-1} \ . \tag{2.51}$$

Это позволяет рассмотреть $\mathcal{A}$ также как фактор–пространство G/H_m. Проведение рассуждений, аналогичных сделанным в предыдущем параграфе, показывает, что координаты, вводимые при помощи подобного изоморфизма, хорошо определены всюду, за исключением точек $z_k\,, k = 0, ..n,\; n \neq m$. Поскольку z_m может быть выбрано произвольно, то это означает, что можно ввести координаты вокруг каждого из z_k. Однако, ни одни из подобных координат не могут быть расширены на всё $\mathcal{A}$.

Описанную выше структуру имеют многообразия, атлас которых должен состоять как минимум из $n+1$ координатной сетки. Заметим, что стандартный подход к построению карт подобных многообразий заключается во введении $n+1$ независимых координатных областей, и затем наложению на них $(n+1)!$ соотношений эквивалентности, соответствующих картам сшивки рассматриваемых областей. Из данного наблюдения следует, что фактор–пространство, описывающее $\mathcal{A}$ как групповое многообразие, можно ввести следующим образом. Каждое из фактор–пространств

$$g_{H_k} = G/H_k = e^{iP_\mu^{(k)} x^\mu_{(k)}} \ , \tag{2.52}$$

с исключенными дискретными симметриями, соответствует координатной сетке вокруг z_k. Тогда можно ввести $n+1$ независимых координатных областей путём рассмотрения действия фактор–пространства, получаемого как произведение всех g_{H_k}, на $\{z_k\}$ при условии, что каждый трансляционный генератор $P_\mu^{(k)}$ действует нетривиально только на точку z_k. Обозначим группу стабильности всех z_k как $\tilde{H}$. Тогда в предположении, что T_m перемешивает точки z_k между собой, это эквивалентно рассмотрению фактор–пространства $G/\tilde{H}$,

$$g_{\tilde{H}} = e^{iP_\mu^{(0)} x^\mu_{(0)}} e^{iP_\mu^{(1)} x^\mu_{(1)}} ... e^{iP_\mu^{(n)} x^\mu_{(n)}} \ . \tag{2.53}$$

Получаемое подобным образом многообразие имеет размерность $d \times (n + 1)$. Далее, чтобы оно стало изоморфным $\mathcal{A}$, необходимо ввести соотношения эквивалентности

$$x^{\mu}_{(m)} = \hat{T}_m x^{\mu}_{(0)} \tag{2.54}$$

для всех m. Данное требование склеивает $n+1$ координатных областей вместе, тем самым вводя атласную структуру на $G/\tilde{H}$ и делая последнюю изоморфной $\mathcal{A}$. Также, поскольку $\hat{T}_m$ являются представлением G, то (2.54) определяет все $(n+1)!$ карт сшивки согласованным образом. Более того, по этой же причине (2.54) оказывается не только автоматически согласованно с действиями $\hat{T}_m$ на фактор–пространстве (2.53), но и также требуется ими. В частности, именно по этой причине изучение трансформационных свойств форм Маурер–Картана для конформной группы в разделе 2.4 привело в требованию (2.12).

Обсудим теперь вопрос о том, какие однородные пространства $\mathcal{A}$ требуют введения более двух координатных областей. Для этого прежде всего заметим, что в изоморфизмах (2.52) каждую из координат можно изменять непрерывно. В силу этого координатные области на $\mathcal{A}$ должны быть изоморфны односвязным областям в $\mathbb{R}^d$. Тогда двухмерный тор $\mathcal{T}^2$ является примером однородного пространства, атлас которого должен содержать как минимум три координатные области.[2] К сожалению, автору не известно физически интересной группы G и её подгруппы H таких, что $\mathcal{T}^2 = G/H$[3]

Подводя итоги данного раздела, можно сказать, что определяющим свойством фактор–пространства, используемого для построения представлений группы G, является то, что оно должно вводить на $\mathcal{A}$ атласную структуру. Фактор–пространство (2.53) можно рассматривать действующим на все

[2] Заметим, что если опустить требование об односвязности координатных областей, то тор можно было бы покрыть двумя координатными областями.

[3] Стоит отметить, что $\mathcal{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — группа целых чисел по отношению к сложению. Однако в контексте изучаемых вопросов подобное представление тора не представляет интереса.

точки z_m, но точки их орбит должны быть отождествлены в соответствии с правилом (2.54). В частности, применение данной конструкции к конформной группе приводит к фактор–пространству (2.11) и требованию (2.12).

2.7.2. Однородная редуктивность

В рамках введенной в предыдущем разделе конструкции обозначим через G_c подмножество из G, получаемое из последнего путём исключения всех дискретных и композитных (то есть включающих дискретные элементы) элементов. Например, для конформной группы данная процедура соответствует исключению инверсии и специальных конформных преобразований. Предположим далее, что 1) G_c образуют группу, 2) $P_\mu \in G_c$, и 3) алгебра G_c, AG_c, является однородно редуктивной по отношению к разбиению

$$AG_c = P_\mu \oplus H_a \ , \tag{2.55}$$

где H_a дополняют P_μ до полного базисного набора генераторов AG_c. Как будет видно из дальнейшего, данные ограничения достаточно общи. Целью настоящего раздела является доказательство утверждения, что конструкция смежных классов применима для построению G–инвариантных лагранжианов, если группа G удовлетворяет перечисленным выше предположениям.

Для достижения поставленной цели сначала необходимо доказать два технических утверждения. Первое из них заключается в том, что действие $H = \{e^{iH_a b^a}\}$ оставляет на месте не только $\vec{0}$, но и все остальные z_m. Действительно, предположим противное — как минимум для одного k действие H на z_k нетривиально. Тогда, поскольку H является непрерывной группой, можно рассмотреть бесконечно малые преобразования, $e^{iH_a b^a}$. Беря b^a достаточно малым, можно гарантировать, что под действием $e^{iH_a b^a}$ z_k отображается в некоторую точку $\vec{a} \in \mathcal{A} \setminus \{z_m\}$. Поскольку последняя может быть получена действием $e^{iP_\mu c^\mu}$ на $\vec{0}$ при некотором значении параметра c^μ , имеем

$$(e^{-iH_a b^a} e^{iP_\mu c^\mu} e^{iH_a b^a}) e^{-iH_a b^a} \vec{0} = e^{iP_\mu \tilde{c}^\mu} \vec{0} = z_k \ , \tag{2.56}$$

где было использовано, что AG_c является однородно редуктивной, а также что H является группой стабильности $\vec{0}$. Полученное соотношение показывает, что z_k может быть получено действием $e^{iP_\mu \tilde{c}^\mu} \in G_c$ на начало координат. Данный вывод противоречит условию, что в изоморфизме (2.48) z_k отождествляется с элементом T_k. Данное противоречие доказывает справедливость первого утверждения. В частности, схожим образом можно показать, что T_m перемешивает $\{z_m\}$ и $\vec{0}$ только между собой.

Вторым утверждением является то, что автоморфизм

$$W_m : \quad G \to G\,, \quad \forall g \in G \to T_m\, g\, T_m^{-1}\,, \tag{2.57}$$

отображает H в себя. Действительно, для фиксированного m автоморфизм (2.57) может быть рассмотрен как отображение $\mathcal{A}$ в себя следующего вида,

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A} : \quad \forall\, \vec{a} \in \mathcal{A} \to \hat{T}_m \vec{a}\,, \tag{2.58}$$

где $\hat{T}_m$ является представлением T_m, действующим на $\mathcal{A}$. Как следует из доказанного выше утверждения, (2.58) перемешивает $\{z_m\}$ и z_0 между собой. Следовательно, поскольку H является группой стабильности $\{z_0\,, z_m\}$, автоморфизм (2.57) отображает H в себя.

Немедленным следствием полученных результатов является то, что полный набор генераторов алгебры G имеет вид

$$P_\mu\,, \quad K_\mu^{(m)} \equiv T_m\, P_\mu\, T_m^{-1}\,, \quad H_a\,. \tag{2.59}$$

Более того, поскольку AG_c является однородно редуктивной по отношению к разбиению (2.55), также имеют место следующие соотношения:

$$[K_\mu^{(m)}, H] = T_m[P_\mu, H]T_m^{-1} \subset K_\mu^{(m)}\,. \tag{2.60}$$

Таким образом, наличие автоморфизма (2.57) сильно ограничивает структуру алгебры соответствующих групп. В частности, (2.59) и (2.60) правильно воспроизводят структуру и коммутационные соотношения конформной алгебры.

Как было показано в предыдущем разделе, для построения G–инвариантных лагранжианов необходимо использовать фактор–пространство (2.53). Тогда, как следует из (2.60), данное фактор–пространство является однородно редуктивным, и, более того, 1–формы Маурер–Картана ω_P^μ и $\omega_{K^{(m)}}^\mu$ не перемешиваются между собой под действием H. Таким образом, конструкция смежных классов оказывается применимой для получения однородно преобразующихся величин.

Заметим также, что из формулы (2.60) следует, что $K_\mu^{(m)}$ не могут быть включены в алгебру Картана AG, если в неё включены все подходящие элементы из $\tilde{H}$. Следовательно, в подобных теориях поля вводятся как представления $\tilde{H}$, что согласуется с техникой конструкции смежных классов. Действие $e^{K_\mu^{(m)} b^\mu}$ на координаты и поля даётся аналогами выражений (2.21) и (2.22) для левого действия G на $G/\tilde{H}$. Важно, что получаемые таким образом законы преобразований полей и координат будут зависеть от x^μ и b^μ, но не от $y_{(m)}^\mu$, как это следует из (2.60).

Из вида коммутационных соотношений (2.60) следует, что существует $(m+1)!$ способов индуцирования (в m шагов) представления $\tilde{H}$ до представления G. Следовательно, таким же образом, как и для конформной группы, может быть показано, что $x_{(m)}^\mu$следует рассматривать как функции x^μ, чья явная зависимость от координат должна даваться соотношениями (2.54).

Проведённое рассмотрение показывает, что конструкция смежных классов оказывается применимой к построению представлений групп, удовлетворяющих указанным в начале данного раздела требованиям. Особенностью применения конструкции смежных классов в подобных случаях является то, что конструируемые лагранжианы должны быть не только $\tilde{H}$–инвариантными комбинациями форм Маурер–Картана, но и допускать (2.54) в качестве решения. Данное требование гарантирует, что дискретные симметрии действительно являются симметриями получаемой теории.

2.8. Конформная группа в спонтанно нарушенной фазе

В начале этого раздела ещё раз уточним значение термина “спонтанно нарушенная фаза”. Предположим, что рассматривается некоторая теория с вакуумным состоянием $|\Phi\rangle$. Тогда, в соответствии со стандартной терминологией, генератор симметрий называется нарушенным, если он не аннигилирует вакуум. Если существует хотя бы один нарушенный генератор, то в настоящей работе будет говориться, что теория находится в спонтанно нарушенной фазе. В противном случае теория находится в “ненарушенной” фазе. Напомним также, что в фактор–пространстве, используемом в конструкции смежных классов, присутствуют экспоненты не только от спонтанно нарушенных генераторов, но и от просто неоднородно реализованных. Примерами последних являются генераторы трансляций, а также генераторы специальных конформных преобразований в описанной в предыдущем разделе процедуре построения конформно инвариантных теорий в ненарушенной фазе.

2.8.1. Стандартная техника

Прежде чем перейти к процедуре построения конформно инвариантных теорий в спонтанно нарушенной фазе при помощи двух–орбитной техники, рассмотрим стандартное применение конструкции смежных классов в этом случае. Помимо демонстрации канонического подхода к подобному построению, это будет также удобным местом для обсуждения физических соображений, почему намбу–голдстоуновское поле для специальных конформных преобразований никогда не описывают “физических” степеней свободы в эффективной теории.

Предположим, что в некоторой теории конформная симметрий была спонтанно нарушена до симметрии Пуанкаре некоторым параметром порядка Φ. Тогда, в соответствии с конструкцией смежных классов, следует рассмотреть следующую схему спонтанного нарушения симметрий,

$$\mathrm{Conf}(d) \ \rightarrow \ SO(d) \ . \tag{2.61}$$

Соответствующее фактор–пространство имеет вид

$$g_{br} = e^{iP_\mu x^\mu} e^{iK_\nu y^\nu(x)} e^{iD\pi(x)} \ . \tag{2.62}$$

Следуя стандартной процедуре применения конструкции смежных классов [7], величины $y^\nu(x)$ и $\pi(x)$ следует интерпретировать как намбу–голдстоуновские поля, а x^μ как координаты Евклидова пространства.

Чтобы понять, что y^ν на самом деле не описывает независимую степень свободы в эффективной теории, рассмотрим действие дилатаций и специальных конформных преобразований на параметр порядка,

$$\hat{D}\Phi = \Delta_\Phi \Phi \,, \quad \hat{K}_\mu \Phi = 2x_\mu \Delta_\Phi \Phi \ , \tag{2.63}$$

где Δ_Φ является масштабной размерностью Φ, а также было учтено, что Φ не нарушает трансляционной инвариантности. Из приведённой формулы следует, что действие специальных конформных преобразований сводится к координатно–зависимому действию дилатаций. Иначе говоря, специальные конформные преобразования не имеют своего “собственного” действия на вакуум. Вспомним далее, что намбу–голдстоуновские поля описывают локальные возмущения вакуума. В совокупности с предыдущим наблюдением это означает, что поля y^ν не нужны для описания всевозможных возмущений вакуума [8, 9, 12, 70].

Чтобы учесть полученный результат в рамках конструкции смежных классов, при построении эффективных лагранжианов используется обратный эффект Хиггса. Это происходит следующим образом. Формы Маурер–Картана для фактор–пространства (2.62),

$$g_H^{-1} dg_H = iP_\mu \omega_P^\mu + iK_\nu \omega_K^\nu + iD\omega_D + iL_{\mu\nu}\omega_L^{\mu\nu} \ , \tag{2.64}$$

где $L_{\mu\nu}$ являются генераторами преобразований Лоренца, имеют вид

$$\begin{gathered} \omega_K^\nu = e^{-\pi}(dy^\nu + 2y_\rho dx^\rho y^\nu - y^2 dx^\nu)\,, \qquad \omega_P^\mu = e^\pi dx^\mu\,, \\ \omega_D = 2y_\rho dx^\rho + d\pi\,, \qquad \omega_L^{\mu\nu} = y^\nu dx^\mu - y^\mu dx^\nu\;. \end{gathered} \tag{2.65}$$

Все из перечисленных форм, за исключением $\omega_L^{\mu\nu}$, преобразуются однородно при действии непрерывных элементов конформной группы. По этой причине можно потребовать зануления 1–формы ω_D,

$$\omega_D = 0 \quad \Rightarrow \quad y_\nu = -\frac{1}{2}\partial_\nu \pi\;, \tag{2.66}$$

что позволяет выразить нефизическое поле y^ν через физическое, дилатон π. Однако, как будет показано в следующем разделе, подобная прискрипция не согласована с действием инверсии. В следствии этого стандартный подход к построению эффективных лагранжианов с неоднородно реализованной конформной симметрией не является математически строгим. Здесь стоит также заметить, что стандартный подход частично обоснован "практикой применения" — с его помощью оказывается возможным воспроизвести все известные эффективные лагранжианы, возникающие в подобных случаях.

Несмотря на указанный недостаток, продолжим изложение стандартной техники далее. Полученное в результате наложения обратного условия Хиггса (2.66) выражение позволяет заменить во всех ковариантных производных поле y^ν на соответствующую частную производную π, и, таким образом, строить теории с правильным количеством степеней свободы. А именно, из форм Маурер–Картана (2.65) следуют выражения для тетрад e^μ_ν, ковариантной метрики $g_{\mu\nu}$ и ковариантной производной y^ν (которая, на самом деле, играет роль ковариантной производной дилатона),

$$\begin{gathered} \omega_P^\mu = e^\mu_\nu dx^\nu\,, \quad g_{\mu\nu} \equiv e^\lambda_\mu \delta_{\lambda\rho} e^\rho_\nu = e^{2\pi}\eta_{\mu\nu}\,, \\ D_\mu y^\nu|_{ihc} = e^{-2\pi}\Big(\frac{1}{2}\partial_\mu\pi\partial^\nu\pi - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\nu\pi - \delta^\nu_\mu\partial_\lambda\pi\partial^\lambda\pi\Big)\;. \end{gathered} \tag{2.67}$$

Для произвольного поля материи ψ, однородно преобразующаяся 1–форма имеет вид [7, 34]

$$D\psi = d\psi + \omega_L^{\mu\nu} \hat{L}_{\mu\nu} \psi \ , \qquad (2.68)$$

где $\hat{L}_{\mu\nu}$ является представлением $L_{\mu\nu}$, соответствующим ψ. При наложении обратного условия Хиггса (2.66) выписанная 1–форма приобретает вид

$$D_\mu \psi|_{ihc} = e^{-\pi} \Big(\partial_\mu \psi + \frac{1}{2} \big(\delta_\mu^\rho \partial^\lambda \pi - \delta_\mu^\lambda \partial^\rho \pi \big) \hat{L}_{\lambda\rho} \psi \Big) \ . \qquad (2.69)$$

Эффективные лагранжианы строятся как $SO(d)$–инвариантные комбинации ковариантных производных (2.67) и (2.69). Все получаемые таким образом теории будут автоматически конформно–инвариантными, а также содержать единственную физическую степень свободы — дилатон π.

Описанная выше процедура построения эффективных лагранжианов составляет стандартный подход к построению эффективных теорий, возникающих вследствие спонтанного нарушения конформной группы. Несмотря на её практический успех, наложение условия (2.66) является её слабой стороной. С одной стороны, оно должно быть наложено для уменьшения степеней свободы в теории. С другой стороны, с точки зрения конструкции смежных классов остаётся не ясным вопрос о том, почему y^ν не может являеться физичекой степенью свободы. В частности, основываясь только на математической конструкции, можно было бы предположить, что y^ν, тем не менее, будет представлять физическую степень свободы или иметь иной физический смысл [71].

2.8.2. Обобщение двух–орбитной техники

Обобщение установленной ранее техники построения конформно инвариантных лагранжианов в ненарушенной фазе на случай спонтанно нарушенной конформной группы достаточно прямолинейно. А именно, поскольку конформные теории поля определены на сфере, то y^ν должны выполнять роль координат вокруг северного полюса сферы как в ненарушенной, так и спонтанно нарушенной фазах. В частности, анализ трансформационных свойств форм Маурер–Картана для трансляций и специальных конформных преобразований также привёл бы к выводу, что y^ν должны даваться картой сшивки (2.12). Заметим также, что конформная симметрия является максимальной пространственно–временной группой симметрий, которую могут иметь физически интересные теории [72, 73] (за исключением, конечно, суперсимметрии). Таким образом, соответствующие теории всегда будут определены на сфере, что однозначно фиксирует роль y^ν как координат вокруг северного полюса сферы. Данное замечание также означает, что наиболее общая схема спонтанного нарушения симметрий может быть записана в виде

$$\mathrm{Conf}(d) \times G_{int} \to H \ , \tag{2.70}$$

где G_{int} является некоторой группой внутренних симметрий и H может включать векторные подгруппы пространственно–временных и внутренних симметрий.

Таким образом, симметрийные соображения однозначно фиксируют зависимость y^ν от координат в полной аналогии с результатом предыдущего раздела. Следовательно, для построения эффективных теорий изложенную в предыдущем разделе процедуру необходимо дополнить только введением намбу–голдстоуновских полей для нарушенных генераторов. А именно, для получения $G = \mathrm{Conf}(d) \times G_{int}$–инвариантных лагранжианов в спонтанно нарушенной фазе необходимо придерживаться следующего алгоритма. Сначала вводится фактор–пространство G/H, чей представитель имеет вид

$$g_H = e^{iP_\mu x^\mu} e^{iK_\nu y^\nu} e^{iZ_a \xi^a} \ , \tag{2.71}$$

где Z_a являются нарушенными генераторами, ξ^a — соответствующие Намбу–Голдстоуновские поля, a может быть как внутренним, так и пространственно–временным индексом, и было сделано предположение, что трансляции не были спонтанно нарушены. Тогда при условии, что фактор–пространство (2.71) является однородно редуктивным, все соответствующие ему формы

Маурер–Картана, за исключением ω_H^i,

$$g_H^{-1}dg_H = P_\mu\omega_P^\mu + K_\nu\omega_K^\nu + Z_a\omega^a + H_i\omega_H^i \ , \tag{2.72}$$

где H_i являются генераторами алгебры H, преобразуются однородно под действием всех непрерывных симметрий. При необходимости можно также ввести поля материи ψ, чья однородно преобразующаяся 1–форма имеет вид

$$\mathcal{D}\psi = d\psi + i\omega_H^i\hat{H}_i\psi \ , \tag{2.73}$$

где $\hat{H}_i$ является представлением H_i, соответствующим ψ. Тогда G–инвариантные лагранжианы строятся как H–инвариантные внешние произведения 1-форм ω_P^μ , ω_K^ν , ω_Z^a , ψ и $\mathcal{D}\psi$, допускающих (2.12) в качестве решения.

Чтобы понять, какие теории удовлетворяют данным требованиям, заметим, что в общем случае лагранжиан теории может быть записан в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kin}(\omega_P^\mu\,,\omega_K^\nu) + \mathcal{L}_{ph}(\omega_P^\mu\,,\omega_K^\nu\,,\omega_Z^a\,,\psi\,,\mathcal{D}\psi) \ , \tag{2.74}$$

где $\mathcal{L}_{kin}$ является H–инвариантным внешним произведением ω_P^μ и ω_K^ν, а $\mathcal{L}_{ph}$ содержит все оставшиеся члены. Как будет показано в следующем разделе, $\mathcal{L}_{kin}$, как и в ненарушенной фазе, допускает (2.12) в качестве решения. Более того, поскольку данный член не содержит ξ^a или ψ, все лагранжианы, имеющие одинаковую $\mathcal{L}_{ph}$, но разные $\mathcal{L}_{kin}$, физически эквивалентны. По этой причине без потери общности далее будет предполагаться, что $\mathcal{L}_{kin}$ равно нулю. Далее заметим, что в силу коммутационных соотношений конформной алгебры y^ν войдёт в форму Маурер–Картана ω_K^ν, а также хотя бы в одну 1–форму для ω_Z^a и $\mathcal{D}\psi$. Вследствие этого $\mathcal{L}_{ph}$ будет содержать члены взаимодействия между y^ν и другими полями. Однако, поскольку поля ξ^a и ψ имеют нетривиальную динамику, то y^ν будет иметь решение (2.12) только в том случае, если члены взаимодействия суммируются в полную производную. Таким образом, как и в ненарушенной фазе, разрешены только такие лагранжианы, которые содержат y^ν через полную производную.

Чтобы проиллюстрировать применение обсуждаемой техники, рассмотрим спонтанное нарушение конформной группы до подгруппы Пуанкаре, (2.61). Как следует из явного вида форм Маурер–Картана (2.65), ковариантная метрика g_{mn} и ковариантная производная полей π , y^ν, и ψ даются выражениями

$$g_{mn} = e^{2\pi}\delta_{mn}\,, \quad D_m\pi = e^{-\pi}(\partial_m\pi + 2y_m)\,, \tag{2.75}$$

$$D_m y^\nu = e^{-2\pi}(\partial_m y^\nu + 2y_m y^\nu - \delta^\nu_m y^2)\,, \quad \mathcal{D}_m\psi = e^{-\pi}(\partial_m\psi + 2iy^\nu \hat{L}_{m\nu}\psi)\,, \tag{2.76}$$

где латинскими буквами обозначены индексы, которые должны подниматься/опускаться при помощи ковариантной метрики. Тогда простейший лагранжиан, удовлетворяющий требованием предложенной конструкции, имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}D_\mu\pi D^\mu\pi + D_\mu y^\mu = \frac{1}{2}e^{-2\pi}\partial_\mu\pi\partial^\mu\pi + \partial_\mu(e^{-2\pi}y^\mu)\,. \tag{2.77}$$

Построение более сложных лагранжианов в рамках двух–орбитной техники затруднительно в силу необходимости обеспечения условия, что y^ν входит в эффективные лагранжианы только через полную производную. В силу этого возникает вопрос, возможно ли как–либо облегчить процедуру построения подобных лагранжианов? Как будет показано в следующем разделе, ответ на этот вопрос положительный, и упрощённая процедура является ничем иным как стандартной техникой, использующей обратный эффект Хиггса.

Приведённые в настоящем разделе рассуждения показывают, что Намбу–Голдстоуновское поле для специальных конформных преобразований никогда не соответствует физическим степеням свободы. Как в ненарушенной фазе, роль y^ν в данной конструкции сводится к обеспечению хорошо известного свойства конформных теорий поля — вириальный ток подобных теорий должен быть дивергенцией от некоторого другого тензора.

В заключении этого раздела заметим, что в случае спонтанного нарушения конформной группы генераторы специальных конформных преобразований оказываются всегда спонтанно нарушенными. Действительно, действие специальных конформных преобразований на произвольное квази–примарное поле ψ имеет вид

$$\hat{K}_\mu \psi = \left(2x_\mu \hat{D} - x^\nu \hat{L}_{\mu\nu} + i x_\nu x^\nu \hat{P}_\mu\right) \psi \ . \tag{2.78}$$

Из данной формулы следует, что специальные конформные преобразования нарушены тогда и только тогда, когда нарушены дилатации и/или трансляции и/или преобразования Лоренца. Таким образом, для спонтанного нарушения конформной группы необходимо, чтобы был нарушен хотя бы один из перечисленных генераторов. В свою очередь, нарушение последних автоматически влечёт за собой нарушение специальных конформных преобразований. Данный факт, тем не менее, не означает, что y^ν должно рассматриваться как динамическое намбу–голдстоуновское поле.

2.8.3. Эквивалентность подходов

Как было показано выше, симметрийные соображения однозначно фиксируют зависимость y^ν от координат. В тоже время, в рамках стандартного подхода y^ν и поле дилатона связаны соотношением (2.66). Комбинируя эти два утверждения, можно прийти к выводу, что дилатон также должен иметь фиксированную зависимость от координат. Это утверждение кажется бессмысленным, поскольку дилатон должен представлять динамическую степень свободы в эффективной теории. На самом деле подобное противоречие возникает потому, что стандартный подход не согласован с симметрией инверсии координат, и приведённые рассуждения демонстрируют это явным образом. Но тогда возникает вопрос о том, почему стандартный подход, как это проверено множеством явных вычислений, позволяет воспроизвести все эффективные конформно–инвариантные лагранжианы? Ответ заключается в том, что несмотря на свою математическую нестрогость, он действительно позволяет формально воспроизвести всевозможные эффективные лагранжианы. Настоящий раздел посвящён доказательству этого утверждения. А именно, будет показано, что любой эффективный лагранжиан, полученный в рамках двух–орбитной техники, можно получить также при помощи стандартного подхода, и наоборот. В этом смысле стандартная техника и разработанный в настоящей главе подход являются эквивалентными.

Заметим также, что, как уже упоминалось ранее, применение двух–орбитной техники на практике осложнено необходимостью обеспечения требования, что y^ν входит в эффективные лагранжианы только через полную производную. В связи с этим стандартный подход к построению эффективных лагранжианов оказывается более удобным. Таким образом, стандартный подход можно рассматривать как удобный инструмент для построения эффективных лагранжианов, в то время как двух–орбитная техника является строгой и позволяет обосновать стандартный подход.

Ниже будет предполагаться, что размерность рассматриваемого пространства больше двух. Случай двухмерного пространства, позволяющий продемонстрировать проблематичность применения стандартной техники в этом случае, будет рассмотрен в следующем разделе. Также в нём будет предложено расширение техники обратного механизма Хиггса в подобных случаях.

Для доказательства эквивалентности подходов рассмотрим сначала простейшую схему спонтанного нарушения симметрий — нарушение конформной группы до подгруппы Пуанкаре, (2.61). Фактор–пространство и формы Маурер–Картана для данного случая имеют вид (2.62) и (2.65) соответственно. Установим сначала результат, что любой эффективный лагранжиан, полученный в рамках двух–орбитного подхода, может быть получен также с помощью стандартного метода. При использовании двух–орбитной техники разрешены только такие лагранжианы, которые содержат y^ν через полную производную. Из данного факта следует, что, на самом деле, уравнений, ограничивающих динамику y^ν, нет. Вследствие этого оказывается возможным положить y^ν равной любой наперёд заданной функции. В частности, в качестве таковой можно выбрать не (2.12), а выражение, следующее из обратного условия Хиггса, (2.66). Тогда при подстановке его обратно в лагранжиан, очевидно, занулится ω_D. Однако, поскольку получившийся в результате такой процедуры лагранжиан является конформно–инвариантным, он должен сводиться к $SO(d)$–инвариантной комбинации оставшихся форм Маурер–Картана. Таким образом, имеем

$$\mathcal{L}_{ph}|_{IHC} = \tilde{\mathcal{L}}(\omega_P^\mu \,, \omega_K^\nu \,, \psi \,, \mathcal{D}\psi \,)|_{IHC} \;. \tag{2.79}$$

Данное выражение показывает, что $\mathcal{L}_{ph}$ может быть переписан как $SO(d)$–инвариантная комбинация форм Маурер–Картана (2.65) с примененным обратным эффектом Хиггса. Это доказывает первую часть утверждения.

Чтобы провести доказательство в обратном направлении, заметим, что определенные комбинации ковариантных производных полей имеют тот же самый вид, что и в стандартном подходе. Действительно, для форм Маурер–Картана (2.65) ковариантная метрика и ковариантные производные полей имеют вид (2.75), (2.76) соответственно. Для полей материи комбинация ковариантных производных, не включающая y^ν, имеет вид

$$\tilde{\mathcal{D}}_m\psi = \mathcal{D}_m\psi - (i\hat{L}_{mn}\psi)D^n\pi \;. \tag{2.80}$$

Исключение y^ν из $D_m y^\nu$ является немного более сложной задачей, поскольку последние включают в себя производную y^ν. Поскольку $D_m\pi$ преобразуется однородно под действием всех элементов конформной группы, можно найти её ковариантную производную как если бы она была обычным полем материи,

$$\mathcal{D}_m D_n\pi = e^{-\pi}(\partial_m D_n\pi + 2iy^\lambda \hat{L}_{m\lambda} D_n\pi) \;. \tag{2.81}$$

Тогда модифицированная ковариантная производная y^ν, которая на самом деле играет роль ковариантной производной дилатона π, имеет вид

$$\tilde{D}_m y_n = D_m y_n - \frac{1}{2}\mathcal{D}_m D_n\pi - \frac{1}{4}g_{mn}D_k\pi D^k\pi \;. \tag{2.82}$$

Поскольку ковариантные производные (2.80) и (2.82) не содержат y^ν, любой эффективный лагранжиан, построенный как их $SO(d)$–инвариантная комбинация, автоматически удовлетворяет всем требованием двух–орбитной техники. Явный вид ковариантных производных (2.80) и (2.82) совпадает с таковыми, используемыми в стандартном подходе, (2.69) и (2.67) соответственно. Следовательно, любой лагранжиан, полученный в рамках стандартного подхода, может быть также получен в рамках двух–орбитной техники.

Заметим, что установленный выше факт соответствия модифицированных ковариантных производных в рамках двух–орбитной техники и стандартного подхода может быть также доказан на основе симметрийных соображений. А именно, условие (2.66) предоставляет единственную связь между π и y^ν, согласованную со всеми непрерывными симметриями. Как следствие, исключение y^ν из ковариантных производных обязано дать тот же результат, как если бы были наложены обратные условия Хиггса. Приведённое рассуждение является фундаментальной причиной, по которой обе техники должны оказаться эквивалентными.

Для того, чтобы доказать эквивалентность подходов в общем случае, заметим, что при $d > 2$ из факта спонтанного нарушения группы Лоренца следует, что дилатации также спонтанно нарушены. Данный факт следует из того, что масштабная размерность операторов, имеющих нетривиальное вакуумное среднее, ограничена снизу требованием унитарности представления, которое гласит

$$\Delta_{\mathcal{O}} > 0 \,. \tag{2.83}$$

Следовательно, любое не нулевое значение $\mathcal{O}$ также ведёт к нарушению дилатационной инвариантности. Случай $d = 2$, который позволяет установить важное различие предлагаемого и стандартного подходов, будет обсуждён в следующем разделе.

Полученный результат позволяет обобщить доказательство эквивалентности подходов на общий случай, описываемый схемой спонтанного нарушения (2.70). Поскольку дилатации всегда оказываются спонтанно нарушенными, доказательство, что любой эффективный лагранжиан, полученный с помощью двух–орбитной техники, можно получить также с помощью стандартного подхода, остаётся неизменным. Чтобы доказать утверждение в обратную сторону, заметим, что фактор–пространство, соответствующее схеме спонтанного нарушения симметрий (2.70), можно выбрать в виде

$$g_H = e^{iP_\mu x^\mu} e^{iK_\nu y^\nu} e^{iD\pi} e^{iZ_a \xi^a} \ , \tag{2.84}$$

где Z_a обозначает все нарушение генераторы кроме K_ν и D. Тогда, поскольку дилатации коммутируют тривиально со всеми генераторами за исключением трансляций и специальных конформных преобразований, 1–форма Маурер–Картана для трансляций в общем случае также будет иметь вид (2.65). Это позволяет исключить y^ν из всех ковариантных производных, используемых в двух–орбитной технике. В силу симметрийных соображений, описанных выше, полученные таким образом ковариантные производные обязаны совпадать со своими аналогами из стандартного подхода. Таким образом, при $d > 2$ обе техники эквивалентны.

Заметим, что в рассуждениях выше предполагалось, что обратные условия Хиггса необходимо накладывать на 1–форму ω_D. Однако, в общем случае может быть спонтанно нарушена и часть группы Лоренца, причём, как можно убедиться явным вычислением, y^ν будет входить линейно в соответствующую форму Маурер–Картана. Тогда, если часть группы Лоренца оказывается спонтанно нарушенной (с индексами α), можно попробовать наложить обратные условия Хиггса вида

$$\omega_L^\alpha = 0 \ , \tag{2.85}$$

которые должны выполняться для всех α. Однако, как система уравнений на y^ν, (2.85) оказывается переопределенной. Действительно, если группа Лоренца остаётся ненарушенной вдоль n пространственных направлений, то в координатной форме (2.85) является системой

$$d \times \frac{d(d-1) - n(n-1)}{2} > d \qquad (2.86)$$

независимых уравнений. Таким образом, при $d > 2$ она не может быть решена, и, как следствие, обратные условия Хиггса необходимо накладывать именно на ω_D. По этой же причине оказывается невозможным исключить y^ν в пользу намбу–голдстоуновских полей для нарушенных генераторов группы Лоренца в рамках двух–орбитной техники.

В заключении этого раздела заметим, что форма Маурер–Картана для специальных конформных преобразований для наиболее общей схемы спонтанного нарушения симметрий (2.70) даётся выражением (2.65). Последняя отличается от аналогичного выражения в разделе 2.4 только общим множителем $e^{-\pi}$. Данное наблюдение позволяет применить рассуждения раздела 2.4 без изменений для доказательства того, что $\mathcal{L}_{kin}$ всегда будет допускать (2.12) в качестве решения.

2.8.4. Обобщение стандартной техники

Единственным случаем, когда оказывается возможным наложить обратные условия Хиггса как на 1–форму ω_D, так и на ω_L, является случай двухмерного пространства. Предположим сначала, что группа Лоренца была спонтанно нарушена, в то время как дилатации остались ненарушенными. В этом случае условие (2.85) позволяет выразить y^ν через ω, намбу–голдстоуновское поле для нарушенной $SO(2)$ симметрии. Тогда, в рамках двух–орбитного подхода, можно использовать ковариантную производную ω для исключения y^ν из всех остальных ковариантных производных. В силу симметрийных соображений, получаемые таким образом новые ковариантные производные будут совпадать с выражениями для ковариантных производных, полученных при применении обратного эффекта Хиггса. Таким образом, оказывается возможным доказать эквивалентность стандартного и двух–орбитного подходов и в этом случае.

Рассмотрим теперь случай, когда спонтанно нарушены как (единственный) генератор группы Лоренца, так и дилатации. Оказывается, что в подобной ситуации стандартный подход к построению конформно–инвариантных лагранжианов сопряжён с непреодолимой неопределенностью. А именно, оказывается возможным наложить бесконечно много различных обратных условий Хиггса, параметризующихся параметром β,

$$\omega_D + \beta\omega_L = 0 \ . \qquad (2.87)$$

В частности, $\beta = \infty$ соответствует наложению условия (2.85). При этом ни из каких физических соображений оказывается невозможным фиксировать выбор β, что делает применение стандартного подхода в этом случае затруднительным.

С другой стороны, в подобных ситуациях двух–орбитная техника может быть применена без изменений. Получаемые с помощью двух–орбитной техники эффективные лагранжианы должны включать y^ν только через полную производную. Для исключения y^ν из ковариантных производных может быть использована как ковариантная производная ω, так и таковая π. В частности, они могут быть взяты с произвольными весами, что соответствует выбору различных β в (2.87). При этом оказывается ненужным фиксировать какое–либо значение β, и можно использовать ковариантные производные, получающиеся для различных значений данного параметра. Таким образом, разработанная техника, в отличии от стандартного подхода, позволяет подойти систематически к построению эффективных лагранжианов и в обсуждаемом случае.

Приведенное наблюдение позволяет предложить следующее расширение техники обратного эффекта Хиггса: в случае, когда оказывается возможным наложить несколько обратных условий Хиггса, не следует ограничиваться одним. Наоборот, для построения эффективных теорий следует использовать всевозможные обратные условия Хиггса, в том числе и их линейные комбинации.

К сожалению, привести явный пример теории, которая позволила бы проиллюстрировать данное различие между техниками, затруднительно. Причина этого заключается в том, что в $d = 2$ масштабная размерность полей с каноническим стандартным членом оказывается равной нулю. Как следствие, необходимо рассматривать экзотические теории, и автором настоящей работы пока не была найдена подходящая модель. Таким образом, приведённые выше рассуждения обоснованны с теоретической точки зрения, но пока не могут быть проиллюстрированы на явном примере.

Глава 3

Спонтанное нарушение пространственно–временных симметрий

3.1. Введение к главе

Классическая теорема Намбу–Голдстоуна [36–38] устанавливает свойства эффективных теорий, возникающих вследствие спонтанного нарушения внутренних симметрий. Однако, до настоящего времени она не была обобщена на случай спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий. Причина этого заключается в том, что системы, возникающие при при подобном нарушении симметрий, ведут себя качественно иным образом в двух аспектах. Во–первых, некоторые из намбу–голдстоуновских полей могут оказаться избыточными в том смысле, что они не необходимы для описания всевозможных возмущений параметра порядка. Это обстоятельство уже было продемонстрировано в первой главе настоящей работы на примере скалярной доменной стенки, а также в предыдущей главе на примере спонтанного нарушения конформной инвариантности. Последние исследования по этой теме показали [8, 10, 12], что наличие подобных избыточных намбу–голдстоуновских полей тесно связано с представлением параметра порядка по пространственно-временной группе симметрий. А именно, было показано, что разные значения намбу–голдстоуновских полей могут описывать одно и тоже возмущение параметра порядка [12]. В работе [12] подобные преобразования было предложена рассматривать как калибровочные преобразования, а обратные условия Хиггса как способ фиксации одной из калибровок.

Вторая особенность спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий заключается в том, что некоторые из намбу–голдстоуновских полей могут оказаться массивными [12, 17]. Интересно, что необходимость введения подобных мод была также обнаружена при попытках построения ультрафиолетового пополнения эффективной теории [10]. В отличие от псевдо намбу–голдстоуновских полей, массивность обсуждаемых мод обусловлена именно механизмом спонтанного нарушения симметрий. В частности, возможность описания динамики подобных массивных мод в рамках конструкции смежных классов не является чем–то удивительным. Действительно, как было показано в разделе 1.5, стандартная конструкция смежных классов позволяет описать динамику массивных векторов, возникающих вследствие механизм Хиггса.

Обе из перечисленных особенностей спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий возникают в контексте вопроса о том, сколько необходимо ввести намбу–голдстоуновских полей для нелинейной реализации изучаемой схемы спонтанного нарушения симметрий данной физической системы. С одной стороны известно, что все поля, на которых симметрия реализована неоднородно, могут быть получены при помощи обратного эффекта Хиггса [9]. С другой стороны, работы [10, 12, 17] показывают необходимость введения массивных намбу–голдстоуновских полей в эффективных теориях. Последние соответствуют исключаемым при помощи обратного эффекта Хиггса модам, таким образом ставя вопрос о том, всегда ли должен применяться обратный эффект Хиггса.

Целью настоящей главы является установление правила подсчёта всех независимых намбу–голдстоуновских мод. А именно, будет показано, что всем генераторам, не аннигилирующим вакуум в начале координат, соответствуют независимые намбу–голдстоуновские поля. намбу–голдстоуновские поля, на которых могут быть наложены обратные условия Хиггса, можно переопределить так, что они будут преобразовываться однородно под действием всех симметрий [11]. Более того, подобные моды являться массивными и соответствуют массивным нерадиальным степеням свободы, обсуждаемым в работе [10]. Для оставшихся нарушенных генераторов необходимо ввести вспомогательные намбу–голдстоуновские поля и наложить на них обратные условия Хиггса. Таким образом, знание схемы спонтанного нарушения симметрий и представления параметра порядка под действием пространственно–временных групп однозначно фиксирует количество независимых намбу–голдстоуновских полей. Предоставленное правило обобщает известные на настоящий в момент литературе правила подсчёта независимых намбу–голдстоуновских мод, а также является легко применимым на практике. В частности, полученные результаты позволят также предложить новую интерпретацию обратного эффекта Хиггса.

Стоит заметить, что предоставленные в настоящей главе результаты являются дополнительным к результатам работ [15, 17, 70, 74]. А именно, в указанных работах изучался вопрос о том, в каких случаях независимые намбу–голдстоуновские поля образуют канонические сопряжённые пары координата–им-

пульс, в то время как в настоящей работе изучается вопрос о том, когда намбу–голдстоуновские моды являются независимыми. Оба из указанных эффектов ведут к уменьшению количества независимых степеней свободы в эффективной теории, но лежащая в их основе физика различна.

Уточним также используемую терминологию. Ниже не предполагается, что рассматриваемые теории обязательно являются Пуанкаре инвариантными. По этой причине применять термин “массивные поля” не совсем корректно и правильнее было бы говорить о наличии щели в спектре. Чтобы упростить терминологию, в настоящей главе степень свободы будет называться массивной, если $p^2 = 0$ не является решением соответствующих уравнений движения.

Настоящая глава устроена следующим образом. В разделе 3.2 приведён пример эффективной теории, содержащей массивные намбу–голдстоуновские поля. В разделе 3.3 изучена теория, в которой нарушаются те же самые симметрии, что и в первой примере, но эффективная теория не содержит массивных полей. Исходя из сравнения теорий, формулируется правило подсчёта независимых намбу–голдстоуновских мод, а также обсуждается физическая интерпретация обратного эффекта Хиггса. В разделе 3.4 на примере скалярной и векторной доменных стенок изучается вопрос построения эффективных теорий в случаях, когда некоторые из генераторов трансляций оказываются спонтанно нарушены. Далее, в разделе 3.5 обсуждается процедура построения эффективных теорий с точки зрения метода индуцированных представлений, которая позволяет строго обосновать предлагаемое правило подсчёта независимых намбу–голдстоуновских мод. Наконец, в разделах 3.6 обсуждаются свойства эффективных теорий, возникающих вследствие спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий, а раздел 3.7 посвящен сравнению полученных результатов с известными на настоящий момент в литературе по данной теме.

3.2. Массивные намбу–голдстоуновские поля

Начнём изучение феноменов, возникающих в случае спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий, с рассмотрения теории, эффективное действие которой включает массивные намбу–голдстоуновские поля. Чтобы не затрагивать вопрос стабильности решений и сконцентрироваться на симметрийных аспектах, будет предполагаться, что теория определена на Евклидовом пространстве. В рассматриваемой модели имеется два поля, заряженных под действием пространственной и внутренней группах Пуанкаре, $ISO(d)_{ST}$ и $ISO(d)_{int}$, соответственно. Первое поле — d–компонентный скаляр φ^a, являющийся ко–вектором по отношению к действию $SO(d)_{int}$ и сдвигающийся на константу под действием внутренних трансляций,

$$\varphi^a(x) \to \Omega^a_b \varphi^b(x) + c^a\,, \qquad \Omega^a_b \in SO(d)_{int}\,, \quad c^a \in \mathbb{R}\,. \tag{3.1}$$

Второе поле, $V_a^i(x)$, принадлежит векторному и ко–векторному представлениям пространственной и внутренней групп Пуанкаре соответственно, и не заряжено по действию внутренних трансляций,

$$V_a^i(x) \to \Omega_a^b \Lambda_j^i V_b^j(x)\,, \qquad \Omega_a^b \in SO(d)_{int}\,, \;\; \Lambda_j^i \in SO(d)_{ST}\,. \tag{3.2}$$

Лагранжиан рассматриваемой теории имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_i \varphi^a)^2 + \frac{1}{4}\left(\partial_{[i} V_{j]}^a\right)^2 + \varkappa V_a^i \partial_i \varphi^a + \frac{\lambda}{4d}\left(V_a^i V_i^a - dM_V^2\right)^2\,, \tag{3.3}$$

где $\varkappa$, λ, и M_V являются некоторыми положительными постоянными, а квадратные скобки обозначают антисимметризацию (без веса) по соответствующим индексам. В силу вида выбранного потенциала для V_a^i, в вакуумном состоянии $V_a^i|_{vac} = \tilde{V}_a^i \neq 0$. Чтобы найти $\tilde{V}_a^i$, необходимо сначала выписать уравнения движения на (бесконечно удалённой) границе, которые получаются при вариации действия теории по φ^a,

$$n_i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_i \varphi^a} \equiv n_i(-\partial^i \varphi_a + \varkappa V_a^i) = 0\,, \tag{3.4}$$

где n_i — нормаль к поверхности. Из приведённого уравнения следует, что если $V_a^i \neq 0$, то и $\varphi^a \neq 0$ тоже, причём последнее должно быть линейно по координатам. Таким образом, состояние с наименьшей энергией имеет конфигурацию вида

$$\varphi^a(x) = \mu^2 x^a\,, \qquad V_a^i(x) = \tilde{V}_a^i\,, \tag{3.5}$$

где μ^2 является некоторым параметром. Предполагая, что $\lambda M_V^2 > \varkappa^2$, уравнение (3.4) выполняется при следующем выборе параметров:

$$\varphi^a = \mu^2 x^a\,, \quad V_a^i = M\delta_a^i\,, \;\; M = \sqrt{M_V^2 - \frac{\varkappa^2}{\lambda}}\,, \;\; \mu^2 = \varkappa M\,. \tag{3.6}$$

Изучим теперь флуктуации над данным решением. Чтобы идентифицировать намбу–голстоуновские поля, необходимо сначала определить нарушенные генераторы. Схема спонтанного нарушения симметрий, соответствующая решению (3.6), имеет вид

$$ISO(d)_{ST} \times ISO(d)_{int} \to ISO(d)_V \ , \tag{3.7}$$

где $ISO(d)_V$ является полупрямым произведением $P^i_V = P^i_{ST} - \mu^2 P^i_{int}$ и $SO(d)_V$, диагональной подгруппы $SO(d)_{ST} \times SO(d)_{int}$. Заметим также, что в силу того, что в спонтанно нарушенной фазе ненарушена только $SO(d)_V$, индексы полей по пространственной и внутренней группе Пуанкаре более неразличимы. Таким образом, намбу–голдстоуновские поля соответствуют трансляциям φ^a и одновременным внутренним вращениям φ^a и V^i_a. В частности, поскольку $SO(d)_V$ реализовано линейно, то в качестве намбу–голдстоуновских полей можно также выбрать степени свободы, соответствующие действию на вакуум (пространственных) трансляций и вращений. Однако, изначально предложенная параметризация возмущений оказывается более удобной. Заметим далее, что произвольное вращение φ^a сводится к его (внутренней) трансляции,

$$e^{i\bar{M}_{cd}\omega^{cd}} \varphi^a = \mu^2 x^a + \mu^2 (\Omega^a_b - \delta^a_b) x^b = e^{i\bar{P}_c \psi^c} \varphi^a \ , \qquad \psi^a = \mu^2 (\Omega^a_b - \delta^a_b) x^b \ , \tag{3.8}$$

где $\bar{P}_a$ и $\bar{M}_{ab}$ являются генераторами внутренних трансляций и вращений соответственно. Это наблюдение позволяет упростить дальнейшие вычисления путём использовании следующей параметризации возмущений:

$$\varphi^a(x) = \mu^2 x^a + \psi^a(x) \ , \quad V^i_a(x) = \Omega^i_a(x) M \ , \quad \Omega^i_a = \delta^i_a + \omega^i_a - \frac{1}{2}\omega^i_b \omega^b_a + ... \ , \tag{3.9}$$

где точки стоят для обозначения членов высшего порядка по ω^i_a, и ψ^a и Ω^a_b независимы. Преимущество подобной параметризации возмущений в том, что эффективный лагранжиан не будет содержать в явном виде координаты. Подставляя (3.9) в (3.3) и ограничиваясь вторым порядком по полям ω^i_a, получаем следующий эффективный лагранжиан,

$$\mathcal{L}_{\psi,A} = -\frac{1}{2}(\partial_i \psi^a)^2 + \frac{1}{4}(\partial_{[i} A^a_{j]})^2 - \frac{1}{2}\varkappa^2 A^i_j A^j_i + \varkappa A^i_a \partial_i \psi^a \ , \tag{3.10}$$

в котором был сделал переход к канонически нормированному полю $A^i_a = M\omega^i_a$. Заметим также, что все радиальные моды в рассматриваемой теории имеют массу порядка M.

Лагранжиан (3.10) можно переписать в более удобной форме. А именно, переопределим степени свободы согласно выражению

$$\varkappa A_{ij} = \partial_i \psi_j - \partial_j \psi_i + \varkappa \tilde{A}_{ij} \, . \qquad (3.11)$$

Преимущество данной параметризации заключается в том, что, как можно проверить из формулы (3.9), поле $\tilde{A}^i_j$ преобразуется однородно под действием всех элементов группы симметрий. Как будет показано ниже, подобное переопределение степеней свободы соответствует интерпретации обратного эффекта Хиггса как простого переопределения полей [11]. В новых переменных лагранжиан (3.10) принимает вид

$$\mathcal{L}_{\psi,\tilde{A}} = -\frac{1}{4}\left((\partial_i \psi^a)^2 + (\partial_a \psi^a)^2\right) - \frac{\varkappa^2}{2}\tilde{A}^i_j \tilde{A}^j_i + \frac{1}{4}(\partial_{[i}\tilde{A}^k_{j]})^2 \, . \qquad (3.12)$$

Особенность данного лагранжиана заключается в том, что, помимо безмассовой моды ψ^a, он также содержит массивную, антисимметричную по перестановке индексов моду $\tilde{A}^i_a$. При этом она не является радиальной модой, а её масса возникает вследствие взаимодействия φ^a и V^i_a. В частности заметим, что, поскольку в уравнении (3.9) поворачиваются V^i_a, но не φ^a, линейный по вакуумному значению полей член взаимодействия данных полей не сокращается, и именно он делает поле $\tilde{A}^i_a$ массивным.

Здесь уместно обсудить физическую природу $\tilde{A}^i_j$. Если под намбу–голдстоуновскими бозонами понимать поля, нелинейно реализующие полную группу симметрий, то $\tilde{A}^i_j$ не является таковым. Однако, намбу–голдстоуновские поля можно также определить как независимые флуктуации вакуума. Подобное определение более общо, поскольку показывает, какие моды должны присутствовать в эффективной теории, а изучение их свойств является отдельным вопросом. В подобном контексте $\tilde{A}^i_j$ действительно описывает намбу–голдстоуновскую моду.

Заметим также, что $\tilde{A}^i_j$ отличается от полей материи, возможно присутствующих в теории, тем, что его динамика существенно ограничена симметриями. Действительно, лагранжиан полей материи должен быть инвариантен относительно действия группы симметрий, что не полностью фиксирует его кинетический член и члены взаимодействия. Поле же $\tilde{A}^i_j$ обязано быть массивным, и, более того, его кинетический член должен иметь вид

$$\mathcal{L}_{kin} = \frac{1}{4}\left(\partial_{[i}\Omega^a_{j]}(\tilde{A}^k_l/M)\right)^2 \ . \tag{3.13}$$

Перечисленные особенности эффективной теории показывают, что поле $\tilde{A}^i_j$ действительно следует отличать от полей материи, и в настоящей работе оно будет рассматриваться как намбу–голдстоуновское поле.

При энергиях много меньше $\varkappa$ поле $\tilde{A}^i_a$ может быть отынтегрировано. Получающийся в результате этого действия лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_\psi = -\frac{1}{4}\left((\partial_i\psi^a)^2 + (\partial_a\psi^a)^2\right) \ . \tag{3.14}$$

Таким образом, прямое выделение намбу–голдстоуновских мод позволяет получить лагранжиан (3.10), содержащий массивную моду, а также лагранжиан (3.14), описывающий низкоэнергетические свойства системы.[1]

Обсудим вопрос о том, какой масштаб следует называть масштабом сильной связи в рассматриваемой модели. С точки зрения теории, описываемой лагранжианом (3.14), таковым является $\varkappa$. Действительно, уравнение, получающееся при отынтегрировании A_{ia}, имеет вид

$$\varkappa A_{ia} = \partial_i\psi_a - \partial_a\psi_i \ . \tag{3.15}$$

Следовательно, производная A_{ia}, по сравнению с лидирующем вкладом, подавлена параметром

$$\frac{\sqrt{p^2}}{\varkappa} \ . \tag{3.16}$$

[1] В настоящей работе под эффективным действием понимается теория, описывающая динамику намбу–голдстоуновских мод. Заметим, что часть из них может быть массивными. Под низкоэнергетической теорией понимается теория, получаемая при отынтегрировании всех массивных мод. Введение подобной терминологии удобно для различения двух перечисленных случаев.

Данное выражение показывает, что масштабом сильной связи действительно является $\varkappa$. Иначе говоря, при подобных значениях энергии теория (3.14), с учётом высших поправок, перестанет быть унитарной. Это приводит к необходимости введения поля A_{ia} и рассмотрению лагранжиана (3.10). С точки зрения подобной пополненной теории, масштабом сильной связи является M: члены с большим количеством производных A_{ia} оказываются подавлены фактором

$$\frac{\sqrt{p^2}}{M} \ . \tag{3.17}$$

Таким образом, в теории имеется два масштаба сильной связи, $\varkappa$ и M, соотношение между которыми, вообще говоря, может быть произвольным.[2] Первый из них, $\varkappa$, отвечает за "включение" взаимодействие между A_{ia} и ψ_a, в то время как второй, M, соответствует "пополнению" антисимметричного поля A_{ia} до изначального би–фундаментального поля V^i_a. В зависимости от соотношения между данными параметрами, эксперимент показал бы необходимость сначала одного из пополнений, а затем второго. В частности, из приведённых рассуждений видно, что A_{ia} является ничем иным как "массивной нерадиальной модой", рассмотренной в [10].

Применим теперь конструкцию смежных классов для изучения схемы спонтанного нарушения симметрий (3.7). Следуя стандартным правилам [7], рассмотрим фактор–пространство

$$g_H = e^{iP_{Vi}x^i} e^{i\bar{P}_a\psi'^a} e^{\frac{i}{2}\bar{M}_{ab}\omega'^{ab}} \ , \tag{3.18}$$

где ψ'^a и ω'^{ab} являются намбу–голдстоуновскими полями для нарушенных генераторов внутренних трансляций и вращений соответственно, а параметр при ненарушенной комбинации внутренних и пространственно–временных трансляций, P_{Vi}, соответствует координатам.

[2] Ограничение $M > 0 \Leftrightarrow \lambda M_V^2 > \varkappa^2$, требуемое для существования рассматриваемого решения, не накладывает ограничений на соотношение M и $\varkappa$. В частности, зафиксировав отношение $\varkappa^2/\lambda$ и меняя параметр $\varkappa$, можно добиться любого соотношения между M и $\varkappa$.

Проверим сначала, что намбу–голдстоуновские поля, введённые описанным образом, совпадают с полями, вводимыми при прямом вычислении эффективного лагранжиана, в соответствии с уравнением (3.9). Данная проверка является нетривиальной, поскольку можно по–разному параметризовать как возмущения над вакуумом, так и фактор–пространство [13]. Чтобы убедиться в совпадении параметризации полей, изучим их трансформационные свойства. Действуя $e^{i\bar{P}_a q^a}$ и $e^{i\bar{M}_{ab}\alpha^{ab}}$ на фактор–пространство (3.18), считая параметры q^a и α^{ab} числами, находим следующие трансформационные законы для ψ'^a и ω'^{ab},

$$
\begin{gathered}
e^{i\bar{P}_a q^a}: \quad \psi'^a \to \psi'^a + q^a \,, \quad \omega'^{ab} \to \omega'^{ab} \,, \\
e^{i\bar{M}_{ab}\alpha^{ab}}: \qquad \psi'^a \to \Omega(\alpha)^a_b \psi'^b + \left(\Omega(\alpha)^a_b - \delta^a_b\right) x^b \,, \qquad \omega'^{ab} \to \omega'^{ab} + \alpha^{ab} + \ldots \,,
\end{gathered}
\tag{3.19}
$$

где многоточие означает члены высшего порядка. Как можно убедиться прямым вычислением, поля ψ^a и ω^i_a, введённые в (3.9), имеют такие же трансформационные свойства, и, следовательно, параметризуют те же степени свободы.

Далее, для получения однородно преобразующихся величин необходимо найти формы Маурер–Картана для фактор–пространства (3.18),

$$
g_H d g_H^{-1} = i\omega^i_{P_V} P_{Vi} + i\omega^a_{\bar{P}} \bar{P}_a + i\omega^{ab}_{\bar{M}} \bar{M}_{ab} \,. \tag{3.20}
$$

В линейном порядке они имеют вид

$$
\omega^i_{P_V} = dx^i \,, \quad \omega^a_{\bar{P}} = d\psi'^a - \mu^2 \omega'^a_b dx^b \,, \quad \omega^{\mu a}_{\bar{M}} = d\omega'^{\mu a} \,. \tag{3.21}
$$

Соответствующая тетрада, ковариантная метрика и ковариантные производные полей даются выражениями

$$
\begin{gathered}
e^i_j = \delta^i_j \,, \qquad g_{ij} = e^k_i e^l_j \delta_{kl} = \delta_{ij} \,, \\
D_i \psi'^a = \partial_i \psi'^a - \mu^2 \omega'^a_i \,, \qquad D_i \omega'^{ab} = \partial_i \omega'^{ab} \,.
\end{gathered}
\tag{3.22}
$$

Полученные величины позволяют воспроизвести полученный ранее эффективный лагранжиан. А именно, кинетический член ψ'^a, массивный член ω'^i_a, а также взаимодействие этих двух полей воспроизводятся в рамках конструкции смежных классов следующим образом:

$$-\frac{1}{2}(D_i\psi'^a)^2 = -\frac{1}{2}(\partial_i\psi'^a)^2 - \frac{1}{2}\varkappa^2 A^i_a A^i_a + \varkappa A^i_a \partial_i \psi'^a \,, \tag{3.23}$$

где мы перешли к канонически нормированному полю $A^i_a = M\omega'^i_a$. Данное выражение совпадает с соответствующей частью лагранжиана (3.10) при отождествлении $\psi'^a = \psi^a$, $\omega'^{ab} = \omega^{ab}$, которое будет предполагаться всюду далее. Кинетический член A^i_a воспроизводится тривиальным образом, поскольку ковариантная производная ω^{ab} является простой частной производной. Таким образом, конструкция смежных классов позволяет полностью воспроизвести эффективный лагранжиан (3.10), включая члены, описывающие динамику массивной моды. В частности, отынтегрирование A^i_j, конечно, приведёт к низкоэнергетическому лагранжиану (3.14).

Рассмотрим теперь обратный эффект Хиггса в данной теории. Соответствующее уравнение связи имеет вид

$$D_{[i}\psi_{j]} = 0 \; : \quad \partial_i\psi_a - \partial_a\psi_i = \varkappa A_{ia} \,. \tag{3.24}$$

Заметим, что данное обратное условие Хиггса является не совсем каноническим. А именно, требуется зануление не формы Маурер–Картана целиком, а только её антисимметричной части (в компонентном виде). Это связано с тем, что поле A_{ia} антисимметрично по перестановке своих индексов, и потому невозможно потребовать зануления формы $\omega^a_{\bar{P}}$ целиком. Поскольку антисимметричная часть ковариантной производной $D_i\psi_j$ формирует неприводимое представление $SO(d)_V$, требование (3.24) инвариантно относительно действия полной группы симметрий.

Заметим далее, что в силу симметрийных ограничений, а также отсутствия иных полей, уравнение (3.24) соответствует выражению, получаемому при отынтегрировании A^i_j из лагранжиана (3.10) [12, 75]. Остающиеся после наложения ограничения (3.24) ковариантные производные позволяют воспроизвести низкоэнергетический лагранжиан теории. В частности, лагранжиан (3.14) воспроизводится следующим образом,

$$\mathcal{L}_{\psi} = -\frac{1}{8}\left(D_{\{i}\psi_{j\}}\right)^2 \ . \tag{3.25}$$

Заметим, что вместо наложения обратных условий Хиггса можно ввести новую переменную, $\tilde{A}^i_j$, согласно выражению [11]

$$D_{[i}\psi_{j]} = \tilde{A}^i_j \ . \tag{3.26}$$

Поскольку левая часть данного уравнения содержит A^i_j без производных, то подобная замена переменных не уменьшает количество степеней свободы в теории и, следовательно, является хорошо определенной. Подобное припереобозначение полей позволяет перейти от поля A^i_j, преобразующегося неоднородно под действием группы симметрий, к полю $\tilde{A}^i_j$, преобразующемуся уже однородно. Таким образом, переопределение степеней свободы (3.26) соответствует выделению однородно преобразующихся величин [11]. В частности, оно совпадает с переопределением полей (3.11), которое было сделано при явном вычислении эффективного лагранжиана с целью нахождения более удобной параметризации полей.

В общем случае, всегда, когда возможно применить обратный эффект Хиггса, оказывается также возможным сделать переопределение полей типа (3.26) [9, 11]. В связи с этим возникает вопрос об интерпретации обратного эффекта Хиггса и присутствии (или отсутствии) в эффективной теории поля типа $\tilde{A}^i_j$. В рассматриваемом примере данное поле было необходимо для параметризации флуктуаций V^i_a. В следующем разделе будет рассмотрен случай, когда эффективная теория не будет содержать подобного поля. Сравнение этих двух теорий позволит прояснить физическую интерпретацию обратного эффекта Хиггса, а также установить однозначный критерий, когда он должен применяться.

3.3. Обратный эффект Хиггса и избыточные намбу–голдстоуновские поля

3.3.1. Модель

Для прояснения физического смысла обратного эффекта Хиггса в случаях, когда часть намбу–голдстоуновских полей является избыточными, проследим, как он возникает при прямом нахождении эффективного лагранжиана. Для этого рассмотрим теорию, которая, помимо полей φ^a и V_a^i, введённых в предыдущем разделе, также содержит скалярное поле θ и описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\Box\varphi^a)^2 - \frac{1}{2}(\partial_i\theta)^2 + \frac{1}{4}\left(\partial_{[i}V_{j]}^a\right)^2 + \lambda\theta V_a^i\partial_i\varphi^a \,, \tag{3.27}$$

где $\Box = \partial_i\partial^i$ и λ является некоторой постоянной. Подобная модель имеет те же симметрии, что пример из предыдущего раздела. Однако, благодаря введению поля θ и оператора $\Box$, она допускает решение

$$\varphi^a = \mu^2 x^a \,, \qquad \theta = 0 \,, \qquad V_a^i = 0 \tag{3.28}$$

при произвольном значении параметра μ^2. Подобное решение нарушает те же симметрии, что и пример из предыдущего раздела, и описывается схемой спонтанного нарушения симметрий (3.7). Отличие между рассматриваемой и предыдущей моделями заключается в том, что теперь намбу–голдстоуновское поле для нарушенных генераторов Лоренцевых преобразований является избыточным. Действительно, намбу–голдстоуновский сектор содержит только d степеней свободы, соответствующих флуктуации φ^a. Следовательно, намбу–голдстоуновские поля для нарушенных генераторов группы Лоренца не необходимы для описания всевозможных флуктуаций вакуума.

Прямое вычисление эффективного лагранжиана приводит к выражению

$$\mathcal{L}_\psi = -\frac{1}{2}(\Box\psi^a)^2 - \frac{1}{2}(\partial_i\theta)^2 + \frac{1}{4}\left(\partial_{[i}V_{j]}^a\right)^2 + \lambda\theta V_a^i(\mu^2\delta_i^a + \partial_i\psi^a) \,, \tag{3.29}$$

где ψ^a описывает флуктуации φ^a над решением (3.28). Единственным полем, соответствующим намбу–голдстоуновской моде, является φ^a, а V_a^i и θ представляют поля материи в низкоэнергетической теории. Заметим, что поле V_a^i заряжено под действием $SO(d)_{int}$, в то время как низкоэнергетический экспериментатор, в силу нарушенности генераторов группы Лоренца, классифицировал бы поля по (неприводимым) представлениям ненарушенной группы $SO(d)_V$. Следовательно, для перехода к подобной параметризации полей необходимо преобразовать лагранжиан (3.29) далее таким образом, чтобы все поля, кроме намбу–голдстоуновских мод, были бы заряжены только под действием $SO(d)_V$.

3.3.2. Применение конструкции смежных классов

Прежде чем перейти к поиску описанной выше параметризации, изучим сначала вопрос о том, какое фактор–пространство следует использовать для построения эффективного действия в рамках конструкции смежных классов. Для этого будет использована техника редукционных матриц [34, 76], известная также как полярное разложение. Как будет показано ниже, полученный с помощью данной техники ответ не совпадает со стандартным, (3.18), следующим из схемы спонтанного нарушения симметрий (3.7).

Суть полярного разложения заключается в разделении намбу–голдстоуновских и остальных полей. А именно, если обозначить все поля, присутствующие в изначальной теории, через $\chi(x)$, а через $\gamma(x)$ намбу–голдстоуновские моды, то полярное разложение имеет вид

$$\chi(x) = \gamma(x)\tilde{\chi}(x)\ , \tag{3.30}$$

где $\tilde{\chi}(x)$ таково, что оно не содержит намбу–голдстоуновских полей. Для рассматриваемой теории введём $\chi(x)$ и $\tilde{\chi}(x)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi(x) &= (\varphi^1,\ \dots,\varphi^d,\, V_1^1,\ \dots\ ,\ V_d^d,\, \theta)^T\ , \\ \tilde{\chi}(x) &= (\tilde{\varphi}^1,\ \dots,\tilde{\varphi}^d,\, \tilde{V}_1^1,\ \dots,\tilde{V}_d^d,\, \tilde{\theta})^T\ , \end{aligned} \tag{3.31}$$

Напомним, что, по определению, намбу–голдстоуновскими полями называются моды, порождаемые действием нарушенных генераторов на вакуум. Следовательно, условие, что $\tilde{\chi}(x)$ не содержит намбу–голдстоуновских мод, формулируется строгим образом через требование

$$\tilde{\chi}^T(x)(\hat{Z}_a\chi(x)) = 0 \ , \tag{3.32}$$

где Z_a — нарушенные генераторы, а $\hat{Z}_a$ — их представление, соответствующее $\chi(x)$. Положив Z_a генераторами внутренних трансляций, из выписанного выше уравнения получаем, что

$$\tilde{\varphi}^a = 0 \ \text{ для всех } a \ . \tag{3.33}$$

Далее, положив Z_a равными $\bar{M}_{ab}$, можно убедиться, что дополнительных ограничений на $\tilde{\chi}$ не возникает. Таким образом,

$$\tilde{\chi}(x) = (0,\ \dots\ , 0,\ V_1^1,\ \dots\ , V_d^d,\ \theta) \ , \tag{3.34}$$

где было учтено, что полярное разложение (3.30) должно сохранять количество степеней свободы в теории. Тогда, зная явное выражение для $\chi(x)$ и $\tilde{\chi}(x)$, можно найти $\gamma(x)$ из уравнения (3.30),

$$\gamma(x) = e^{i\bar{P}_a\psi^a(x)} \ . \tag{3.35}$$

Для получения эффективного действия, (3.30) необходимо подставить обратно в лагранжиан (3.27). Заметим, что лагранжиан (3.27) может быть переписан в терминах внешнего произведения 1–форм.[3] Это означает, что единственным намбу–голдстоуновским полем, присутствующем в теории, будет ψ^a, а его ковариантная производная находится из выражения

$$e^{-i\bar{P}_a\psi^a(x)}e^{-iP_{Vi}x^i}de^{iP_{Vi}x^i}e^{i\bar{P}_a\psi^a(x)} \ . \tag{3.36}$$

[3] Чтобы получить оператор $\Box$, необходимо также использовать оператор ковариантного дифференцирования $\mathcal{D}$, введённый в главе 1.

Таким образом, чтобы воспроизвести лагранжиан (3.28), следует рассматривать фактор–пространство

$$g_H = e^{iP_i x^i} e^{i\bar{P}_a \psi^a} \ . \tag{3.37}$$

Покажем, что подобное фактор–пространство действительно позволяет воспроизвести лагранжиан (3.29). Соответствующие ему формы Маурер–Картана имеют вид

$$\omega_P^i = dx^i \ , \quad \omega_{\bar{P}}^a = d\psi^a \ , \quad \omega_M^{ab} = \omega_L^{ij} = 0 \ . \tag{3.38}$$

Ковариантная производная поля ψ^a, таким образом, даётся обычной частной производной,

$$D_i \psi^a = \partial_i \psi^a \ . \tag{3.39}$$

Беря ковариантную производную $\mathcal{D}_j$ от $D_i\psi^a$, как если бы последнее было полем метерии, получаем

$$\mathcal{D}_j D_i \psi^a = \partial_j \partial_i \psi^a \ . \tag{3.40}$$

Данное выражение позволяет полностью воспроизвести члены в эффективном лагранжиане (3.29), содержащие поле ψ^a,

$$-\frac{1}{2}(\mathcal{D}^i D_i \psi^a)^2 + \lambda\theta V_j^i D_i \psi^j \ . \tag{3.41}$$

Оставшиеся члены эффективного лагранжиана воспроизводятся тривиально, если рассмотреть поля θ и V_a^i как поля материи. Таким образом показано, что лагранжиан (3.29) может быть воспроизведён в рамках конструкции смежных классов при использовании фактор–пространства (3.37).

Рассмотренный пример может быть легко обобщён. А именно, пусть задано $\chi(x)$ и вакуумное состояние теории. Пусть далее $LS(S_n)$ является линейной оболочной генераторов, аннигилирующих вакуум в начале координат, и S_n формирует базис в данном пространстве.[4] Пусть далее генераторы B_α дополняют набор генераторов S_n до полного набора базисных генераторов алгебры G, элементы которого будет обозначаться как Z_a. Заметим, что все генераторы B_α не аннигилируют вакуум в начале координат. В силу этого, генератор $S \in S_n$ нарушен тогда и только тогда, когда существует генератор $B \in B_\alpha$ такой, что

$$[\tilde{P}_\mu, S] \ni B \ , \tag{3.42}$$

где $\tilde{P}_\mu$ – генераторы трансляций в нарушенной фазе теории.[5] Действительно, действие S в точке x^μ связано с действием S в начале координат следующим образом,

$$S(x) = e^{-i\tilde{P}_\mu x^\mu} S(0) e^{i\tilde{P}_\mu x^\mu} \ . \tag{3.43}$$

Поскольку действие $S(0)$ аннигилирует вакуум, то S нарушено тогда и только тогда, когда выполнено условие (3.42). Таким образом, нарушение S_n всегда является следствием нарушения генераторов B_α. В дальнейшем, генераторы типа S_n будут называться частично нарушенным, а типа B_α — строго нарушенными.

Рассмотрим далее аналог уравнения (3.30), используемого в общем случае для определения $\gamma(x)$. Поскольку все B_α независимы, уравнения (3.32) с Z_a, заменёнными на B_α, также независимы. Для частично нарушенных генераторов ситуация иная. А именно, поскольку действие S_n на вакуум сводится к действию B_α на вакуум, подстановка подобных генераторов в уравнение (3.32) не накладывает новых ограничений на $\tilde{\chi}(x)$. Следовательно, чтобы исключить намбу–голдстоуновские моды из $\chi(x)$, достаточно выбрать $\gamma(x)$ в

---

[4] Стоит отметить, что базис алгебры G определён неоднозначно. В частности, в алгебре $ISO(d)_{int}$ в качестве базисных векторов можно выбрать генераторы вида $e^{-i\bar{P}_k a^k} \bar{M}_{ab} e^{i\bar{P}_i a^i}$ при любом значении вектора a^k. Благодаря этому количество генераторов S_n, в соответствии с данным выше определением, не зависит от конкретного выбора вакуумного решения в теории, а также от выбора точки начала координат.

[5] Как мы видели на приведённых примерах, генераторы $\tilde{P}_\mu$ могут отличаться от P_μ. Случай, когда количество $\tilde{P}_\mu$ меньше, чем количество P_μ (например, такая возможность реализуется, когда вакуум — скалярная доменная стенка), будет рассмотрен далее.

виде

$$\gamma = e^{iB_\alpha \xi^\alpha} \,, \tag{3.44}$$

где ξ^α — намбу–голдстоуновские поля для строго нарушенных генераторов B_α. Далее, дословно повторяя рассуждение из рассмотренного выше примера, можно сделать вывод, что в фактор–пространство должны быть включены экспоненты только от строго нарушенных генераторов. Данный результат означает, что в эффективной теории будут присутствовать только намбу–голдстоуновские поля ξ^a.

В разделе 2.5 будет показано, что последовательное применение метода индуцированных представлений введёт к такому же заключению — в используемое для построения эффективной теории фактор–пространство следует включать экспоненты только от строго нарушенных генераторов. Тем не менее, приведённые рассуждения, основанные на формализме полярного разложения, уже достаточны для обоснования предложенного правила. Заметим также, что из результатов настоящего раздела следует, что обратный эффект Хиггса не может быть настоящим физическим эффектом, поскольку соответствующие избыточные поля просто не должны были быть введены с самого начала, ни как условие фиксации калибровки.

В заключении этого раздела сделаем замечание по поводу определения начала координат. В качестве такового, конечно, может быть выбрана произвольная точка многообразия, на котором определена теория. В связи с этим может казаться, что определение частично и строго нарушенных генераторов плохо определено. Однако, это не так. Действительно, при выборе точки начала координат также фиксируется и действие её группы стабильности на поля в данной точки. Последнее не зависит от выбора начала координат, а в произвольной точке многообразия даётся выражением (3.43). В силу этих двух фактов классификация нарушенных генераторов на частично и строго нарушенные не зависит от выбора точки начала координат.

3.3.3. Интерпретация обратного эффекта Хиггса

Из приведенных выше рассуждений следует следующее заключение: при последовательном применении конструкции смежных классов избыточные поля не вводятся ни на одном из шагов конструкции. Однако, при этом остаётся следующая проблема — получаемые подобным образом эффективные лагранжианы не подходят для изучения эффективной теории с точки зрения низкоэнергетического наблюдателя. А именно, низкоэнергетический наблюдатель не смог бы классифицировать поля с точки зрения частично нарушенных генераторов, поскольку для него они предстают как нарушенные. Чтобы решить эту проблему, необходимо некоторым образом сделать все поля, кроме намбу–голдстоуновских мод, незаряженными под действием частично нарушенных генераторов. Чтобы этого добиться, требуется подобрать замену переменных вида

$$V^i_a \ \to \ \Omega^b_a \tilde{V}^i_b \ , \tag{3.45}$$

где Ω^b_a является элементом $SO(d)_{int}$, зависящим от ψ^a, единственного Намбу–Голдстоуновского поля. Подобная замена переменных, если возможна, достигает поставленной цели: под действием $SO(d)_{int}$ преобразовывалась бы только Ω^b_a, в то время как поле $\tilde{V}^i_b$ оставалось неизменным. Предложенная замена переменных позволила бы также "разрядить" V^i_a под действием $SO(d)_{ST}$, поскольку любое подобное преобразование всегда может быть представлено в виде комбинации действий векторной подгруппы $SO(d)_V$ и внутренней группы вращений $SO(d)_{int}$. Таким образом, для решения обозначенной проблемы необходимо найти подходящий элемент Ω^b_a.

Покажем, что требуемое выражение существует и, на самом деле, процедура "разряжения" полей материи под действием $SO(d)_{int}$ соответствует применению обратного эффекта Хиггса. Для этого заметим сначала, что если бы ω^{ab} было настоящим, не избыточными намбу–голдстоуновскими полем, то Ω^a_b можно было бы взять в виде $\Omega(\omega)^a_b$. Следовательно, чтобы осуществить искомую замену переменных, необходимо найти такую комбинацию поля ψ^a и его производных, что она преобразовывались бы также, как и ω^{ab}. Очевидно, подобное выражение можно найти при изучении фактор–пространство (3.18), в котором ω^{ab} рассматривается как вспомогательные поля, введённые только для нахождения подходящей функции Ω^b_a. Тогда применение обратного эффекта Хиггса как раз и решает требуемую задачу. Таким образом, искомая замена переменных найдена.

Заметим, что искомое выражение для Ω^a_b может быть найдено при помощи любого фактор–пространства, включающего ω^{ab}. Фактор–пространство (3.18) выделено только тем, что получаемое из него выражение наиболее просто, в то время как выражения, получаемые из других фактор–пространств, могут, в общем случае, содержать координаты и другие поля [13]. Как следует из приведенного выше анализа, получаемые при этом теории эквивалентны, поскольку от одной к другой можно перейти соответствующей заменой параметризации полей.

В целях иллюстрации полученных результатов полезно сравнить параметризацию поля V^i_a в эффективных теориях из предыдущего и настоящего разделов. В последнем случае параметризация V^i_a даётся выражением (3.45), в то время как в секции 3.1 итоговое переопределение поля V^i_a, выделяющее однородно преобразующуюся часть, имело вид

$$V^i_a \to \Omega^c_a(\psi)\Omega^b_c(\tilde{\omega}^{kl})\delta^i_b M \ , \tag{3.46}$$

где $\tilde{\omega}^{kl} = \tilde{A}^{kl}/M$. Таким образом, разница между рассмотренными примерами заключается в следующем: в первом примере, с массивными намбу–голдстоуновскими полями, присутствие поля $\tilde{\omega}^{ab}$ необходимо для описания полного спектра возможных флуктуаций вакуума, в то время как во втором примере поле ω^{ab} играет лишь вспомогательную роль.

Заметим также следующее различие примеров из предыдущего и настоящего разделов, связанное с построением ултрафиолетового пополнения соответствующих теорий. Поскольку во втором примере все поля, в итоге, должны быть разряжены под действием частично нарушенных симметрий, то для построения однородно преобразующихся величин необходимо действительно рассматривать фактор–пространство (3.18) с последующим применением обратного эффекта Хиггса. Однако, поскольку в подобной конструкции поле ω^{ab} играет только вспомогательную роль, с ним не ассоциирован никакой масштабный параметр. Как следствие, в подобных теориях не возникает энергетического масштаба, при котором поле ω^{ab} было бы необходимо ввести в теорию для восстановления унитарности.

3.4. Доменные стенки

В целях развития изложенных выше идей рассмотрим ещё два примера — построение эффективных действий для скалярной и векторной доменных стенок. Данные примеры позволяют проиллюстрировать, как могут быть получены эффективные действия в случаях, когда количество ненарушенных трансляций в ненарушенной и спонтанно нарушенных фазах различно. Будет показано, что в подобных случаях эффективное действие может быть построено как погружение эффективной теории меньшей пространственно–временной размерности в полное пространство–время. При этом в построении не будет использован обратный эффект Хиггса, как это было сделано в разделе 1.7. Указанный факт отличает предложенный метод от стандартного способа получения эффективного действия в подобных случаях, но полностью согласуется с методом, разработанным в предыдущем разделе. В частности, векторная доменная стенка является примером ещё одной теории, эффективное действие которой содержит массивную намбу–голдстоуновскию моду.

В настоящем разделе латинские индексы $m, n, ..$ и $i, j, ..$ обозначают $(d+1)$– и d–мерные величины соответственно, а также принято соглашение $x^{d+1} \equiv z$. Также, хотя теория со скалярной доменной стенкой уже была рассмотрена в разделе 1.5 настоящей работы, для удобства чтения необходимые формулы приведены ещё раз.

3.4.1. Скалярная доменная стенка

Простейшая теория, допускающая решение в виде скалярной доменной стенки, имеет вид

$$\mathcal{S} = \int d^{d+1}x \left(\frac{1}{2}\partial_m\varphi\partial^m\varphi - \frac{\lambda}{4}\left(\varphi^2 - v^2\right)^2 \right) \ , \tag{3.47}$$

где φ — действительное скалярное поле и $\lambda, v > 0$. При помощи подходящей замены координат общее решение может быть представлено в виде

$$\varphi_z = v \tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} vz \right) \ . \tag{3.48}$$

Спектр возмущений теории (3.47) над решением (3.48) в квадратичном порядке состоит из одной массивной и одной безмассовой моды. Первая из перечисленных мод представляет собой массивное связное состояние,[6] в то время как второе, безмассовое, является намбу–голдстоуновской модой для нарушенного генератора трансляций вдоль оси z. Эффективный лагранжиан, как известно, имеет вид

$$\mathcal{L}_\psi = \int dz(\partial_z\varphi_z)^2\sqrt{|h|}\,, \quad h = \det h_{ij}\,, \quad h_{ij} = \eta_{ij} + \partial_i\psi\partial_j\psi \ , \tag{3.49}$$

где $\psi(x) \equiv \varphi(x) - \varphi_z$ и η_{ij} является метрикой Минковского.

Рассмотрим, как вышеуказанный эффективный лагранжиан может быть получен в рамках конструкции смежных классов. Стандартный способ его построения включает применение обратного эффекта Хиггса [14, 59]. Ниже будет изложен новый способ, основанный на той же логике, что была использована в предыдущем разделе.

[6] Стоит заметить, что количество подобных мод зависит от формы потенциала. В частности, подходящим выбором последнего можно добиться отсутствия подобных мод вплоть до масштаба сильной связи. По этой причине данная мода не может являться намбу–голдстоуновской модой для нарушенных генераторов преобразований Лоренца.

Прежде всего заметим, что намбу–голдстоуновское поле, ассоциированное с нарушенными генераторами Лоренца L_{iz}, является избыточными (L_{iz} — частично нарушенные генераторы). По этой причине, по аналогии с примером из раздела 3.3.1, они не будут включены в фактор–пространство, используемое для построения эффективного действия. В этом смысле допустимо сказать, что схема нарушения симметрий для скалярной доменной стенки имеет вид

$$ISO(1,d) \to e^{iP_i x^i} \times SO(1,d) \ . \tag{3.50}$$

Соответствующее данной схеме фактор–пространство имеет вид

$$g_H = e^{iP_i x^i} e^{iP_z \psi} \ , \tag{3.51}$$

где параметр при P_z, $\psi(x)$, является намбу–голдстоуновским полем, в то время как параметры при остальных генераторах трансляций являются координатами. Формы Маурер–Картана для фактор–пространства (3.51) имею вид

$$\omega_P^i = dx^i \ , \qquad \omega_P^z = d\psi \ . \tag{3.52}$$

Для перехода к построению эффективного действия заметим, что последнее описывает флуктуации скалярной доменной стенки вдоль оси z. Следовательно, эффективное действие должно получаться как вложение доменной стенки в полное пространство–время Минковского. В свою очередь это означает, что все ковариантные величины для построения эффективного действия могут быть построены как проекции с полного пространства–времени на поверхность доменной стенки. В частности, инвариантный элемент объёма имеет вид [77]

$$\mathrm{Vol.} = \epsilon_{i_1..i_d}(\lambda^{i_1}_{n_1} dx^{n_1}) \wedge ... \wedge (\lambda^{i_d}_{n_d} dx^{n_d}) \ , \quad \lambda^i_j = \delta^i_j \ , \quad \lambda^i_z = \eta^{ij} \frac{\delta}{\delta dx^j} \ , \tag{3.53}$$

где λ^i_n — оператор проекции на поверхность доменной стенки. Всюду далее символы x^n и y^i будут использованы для обозначения величин в пространстве

Минковского и на поверхности доменной стенки соответственно. d мерные тетрады определяются при помощи соотношения

$$\tilde{e}^i_j dy^j = \lambda^j_n dx^n \, . \tag{3.54}$$

Приведенное определение ведёт к стандартному выражению для индуцированной на поверхности доменной стенки метрики,

$$h_{ij} = \eta_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial y^i} \frac{\partial x^n}{\partial y^j} = \eta_{ij} + \partial_i \psi \partial_j \psi \, . \tag{3.55}$$

Далее, поскольку инвариантная форма объёма (3.53) является определителем $\tilde{e}^i_j$, который, в свою очередь, является корнем из определителя индуцированной метрики, имеем

$$\mathcal{L}_\psi = C\sqrt{|h|} \, , \tag{3.56}$$

где C является некоторой постоянной. Наконец, положив C

$$C = \int dz (\partial_z \varphi_z) \tag{3.57}$$

можно воспроизвести эффективное действие (3.49).

Приведенное построение показывает, что эффективное действие для скалярной доменной стенки может быть получено без применения обратного эффекта Хиггса. В частности, принцип построения эффективного действия имеет ясную геометрическую интерпретацию — вложение теории меньшей пространственно–временной размерности в изначальную. Стоит также заметить, что, поскольку только лагранжиан (3.56) имеет требуемую симметрию Пуанкаре, то, в силу симметрийных соображений, стандартный метод получения эффективного действия также должен был привести к правильному ответу.

3.4.2. Векторная доменная стенка

Рассмотрим теперь пример векторной доменной стенки. В отличии от скалярной доменной стенки, часть из независимых флуктуаций векторной доменной стенки порождены действием нарушенных генераторов группы Лоренца на вакуум. Как будет показано ниже, данные моды являются массивными, а их эффективное действие воспроизводится при помощи конструкции смежных классов.

Лагранжиан рассматриваемой теории имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{mn}^2 - \frac{\lambda}{4}\left(A_m A^m - v^2\right)^2 , \quad F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m \ . \tag{3.58}$$

Следуя работе [78], параметризуем поле A_m следующим образом:

$$A_m = A(a_n x^n)\mathfrak{n}_m \ , \tag{3.59}$$

где a_n и $\mathfrak{n}_m$ являются некоторыми векторами единичной длины. Потенциал теории имеет минимум при $A = v$ и произвольном $\mathfrak{n}_m$. Подставляя параметризацию (3.59) в уравнения движения, следующие из лагранжиана (3.58), получаем уравнения движения:

$$a_m \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}} = 0 \ , \qquad A'' - \lambda A(A^2 - v^2) = 0 \ , \tag{3.60}$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу. Уравнения (3.60) показывают, что решением является поперечный вектор, модуль которого подчиняется такому же уравнению, что и скалярная доменная стенка из предыдущего раздела. В силу данной аналогии, в рассматриваемой модели также имеется решение. Не уменьшая общности, можно положить $\mathfrak{n}_m = \delta_{my}$, $a_m = \delta_{mz}$, где $y \equiv x_{d-1}$ и $z \equiv x_d$. В дальнейшем прописные латинские буквы из середины алфавита, $i, j, ...$, будут использоваться для обозначения координат $x_1, .., x_{d-2}$. Заметим, что векторная доменная стенка нестабильна [78]. Тем не менее, конструкция смежных классов применима для выделения действия намбу–голдстоуновских мод. Тогда, в рамках стандартного определения нарушенных генераторов, векторная доменная стенка нарушает следующие генераторы:

$$P_z \ , \quad M_{yi} \ , \quad M_{zy} \ , \quad M_{zi} \ . \tag{3.61}$$

Однако можно легко убедиться, что M_{zi} не являются нарушенными в строгом смысле, и потому соответствующее намбу–голдстоуновское поле является избыточным.

Получим сначала намбу–голдстоуновский сектор рассматриваемой теории при помощи прямого вычисления эффективного лагранжиана. С этой целью параметризуем поля следующим образом [79],

$$A_m = \Lambda_{my}(w)A(z+\psi(w)), \quad \Lambda_{my} \in SO(d+1), \quad \Lambda_{my} \simeq \delta_{my} + \omega_{my}\ , \tag{3.62}$$

где $\omega_{my}(w)$ и $\psi(w)$ являются намбу–голдстоуновскими полями для нарушенных генераторов M_{my} и P_z соответственно, w^i обозначает первые $(d-2)$ координаты, и $A(z)$ — профиль доменной стенки, задаваемый правой частью уравнения (3.48). При использовании подобной параметризации намбу–голдстоуновские моды в прямом вычислении и вводимые в конструкции смежных классов будут совпадать. Стоит также заметить, что предложенная параметризация A_m в уравнении (3.62) описывает всевозможные флуктуации доменной стенки. Данное наблюдение еще раз подтверждает сделанный ранее вывод о том, что намбу–голдстоуновское поле для M_{zi} является избыточными. Подставляя (3.62) обратно в лагранжиан, с точностью до членов квадратичного порядка по полям, получаем следующий эффективный лагранжиан,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\psi,\omega} = -\frac{1}{4}\big((A'(z))^2(\partial_\mu\psi)^2 + A(z)^2(\partial_\nu\omega_{\mu y})^2\big) + \\ + \frac{1}{4}\big(A'(z)(\omega_{zy} + \partial_y\psi) + A(z)(\partial^\mu\omega_{\mu y})\big)^2\ , \end{aligned} \tag{3.63}$$

где греческие индексы принимают значение от 1 до $d-1$. Как видно из приведенного выражения, поле ω_{zy} массивно и представляет собой массивное Намбу–

Голдстоуновское поле. Поля же ψ и ω_{iy} безмассовы и являются обычными намбу–голдстоуновскими модами.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как данное эффективное действие воспроизводится в рамках конструкции смежных классов. Поскольку генераторы M_{zi} не нарушены в строгом смысле, следует рассмотреть фактор–пространство вида

$$g_H = e^{iP_\mu x^\mu} e^{iP_z\psi} e^{iL_\mu\omega^\mu} \ , \tag{3.64}$$

где $L_\mu \equiv M_{\mu y}$. Формы Маурер–Картана,

$$g_H^{-1}dg_H = iP_\mu\omega_P^\mu + iP_z\omega_{P_z} + iL_\mu\omega_L^\mu + iM_{\mu\nu}\omega_M^{\mu\nu} \ , \tag{3.65}$$

имеют вид

$$\begin{gathered}\omega_{P_z} = \Lambda_n^z dx^n = \Lambda_z^z d\psi + \Lambda_\mu^z dx^\mu \ , \quad \omega_P^\mu = \Lambda_z^\mu d\psi + \Lambda_\nu^\mu dx^\nu \ , \\ \omega_L^\mu = \frac{\sinh\omega}{\omega} d\omega^\mu - (\omega d\omega)\frac{\sinh\omega - \omega}{\omega^3}\omega^\mu \ ,\end{gathered} \tag{3.66}$$

где $\omega = \sqrt{-\omega_\mu\omega^\mu}$ и [12]

$$\begin{gathered}\Lambda_z^z = \cosh\omega \ , \quad \Lambda_z^\mu = \omega^\mu\frac{\sinh\omega}{\omega} \ , \\ \Lambda_\mu^z = \omega_\mu\frac{\sinh\omega}{\omega} \ , \quad \Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu - \omega^\mu\omega_\nu\frac{\cosh\omega - 1}{\omega^2} \ ,\end{gathered} \tag{3.67}$$

и явный вид $\omega_M^{\mu\nu}$ нам не понадобится. Полученные выражения позволяют воспроизвести эффективный лагранжиан (3.63). С точностью до членов квадратичного порядка наиболее общий вид эффективного лагранжиана может быть записан в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\psi,\omega} = c_1(z)(\partial_\mu\psi)^2 &+ c_2(z)(\partial_\mu\omega^{\mu y})^2 + c_3(z)(\partial_\mu\omega^{\nu y})^2 + \\ &+ c_4(z)(\partial_y\psi + \omega_{zy})\partial_\mu\omega^{\mu y} + c_5(z)(\partial_y\psi + \omega_{zy})^2 \ .\end{aligned} \tag{3.68}$$

Заметим, что последние два члена разрешены в рамках конструкции смежных классов, поскольку генераторы M_{ym} нарушены. Далее, положив

$$c_5 = -c_1 = \frac{1}{4}\int dz\big(A'(z)\big)^2 \ , \quad c_2 = -c_3 = \frac{1}{4}\int dz A^2(z) \ , \quad c_4 = \int dz\frac{1}{2}A'(z)A(z) \ , \tag{3.69}$$

лагранжиан (3.68) совпадёт с лагранжианом (3.58).

Рассмотренные выше примеры показывают, что предложенная в предыдущем разделе техника применения конструкции смежных классов позволяет воспроизвести эффективные лагранжианы меньшей размерности, а также позволяет привести ещё один пример массивных намбу–голдстоуновских мод. Заметим также, что для получения удобной с точки зрения низкоэнергетического наблюдателя параметнризации полей будет необходимо также применить обратный эффект Хиггса.

3.5. Метод индуцированных представлений и спонтанное нарушение пространственно-временных симметрий

В настоящем разделе устанавливаются правила применения конструкции смежных классов в случае спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий исходя из основополагающего метода — метода индуцированных представлений. Как будет показано ниже, последовательное применение данного метода приводит к правилам использования конструкции смежных классов, сформулированных в предыдущем разделе. Всюду далее предполагается, что группа симметрий G не является калибровочной и не содержит дискретных элементов.

3.5.1. Метод индуцированных представлений и конструкция смежных классов

Как было описано в главе 1, для применения метода индуцированных представлений, в первую очередь необходимо задать область определения полей. Предположим, что рассматриваемая теория определена на многообразии $\mathcal{A}$ и имеет некоторый нетривиальный вакуум. Тогда, поскольку эффективная теория описывает флуктуации вакуума, с геометрической точки зрения эффективная теория определена над $\mathcal{A}$, дополненным вакуумными значениями полей. В дальнейшем последнее пространство будет обозначаться как $\tilde{\mathcal{A}}$. Например, если вакуумное значение некоторого скалярного поля φ равно φ_0 и не зависит от координат, то $\tilde{\mathcal{A}}$ является набором точек вида (x^μ, φ_0). В этом случае $\tilde{\mathcal{A}}$ изоморфна орбите любой из точек $\mathcal{A}$ под действием генераторов трансляций, определенных для $\mathcal{A}$. В случае спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий ситуация становится более сложной, поскольку поля могут иметь координатно–зависимое вакуумное решение. Проиллюстрируем этот факт на примере теории, рассмотренной в разделе 3.2. В этом случае $\tilde{\mathcal{A}}$ являлось набором точек вида $(x^\nu,\ \mu^2 x^\nu,\ M\delta^\nu_a)$. Очевидно, что теперь действие генераторов трансляций P_μ на этом пространстве не транзитивно, и потому требуется найти новые "эффективные" генераторы трансляций $\tilde{P}_\mu$, которые бы действовали транзитивно на $\tilde{\mathcal{A}}$. Для рассматриваемой теории подобные генераторы легко найти — они задаются ненарушенной комбинацией пространственно–временных и внутренних трансляций. Заметим, что именно эти генераторы были использованы при параметризации фактор–пространства (3.18). В общем случае, однако, нового набора генераторов $\tilde{P}_\mu$, действующего транзитивно на $\tilde{\mathcal{A}}$, может не существовать. Например, подобная ситуация реализуется для скалярной и векторной доменных стенок, рассмотренных выше. В настоящем разделе будет предполагаться, что набор генераторов $\tilde{P}_\mu$ существует, а случай, когда это не так, будет рассмотрен в следующем разделе.

Прежде чем продвинуться далее, установим обозначения. Пусть $\tilde{\mathcal{A}}$ будет набором точек вида $(x^\mu, \varphi(x))$ для некоторого поля $\varphi(x)$, H_0 обозначает группу стабильности начала координат $\tilde{\mathcal{A}}$, и набор генераторов Z_a дополняет $\tilde{P}_\mu$ до полного набора базисных генераторов алгебры G. Заметим теперь, что область значений флуктуаций вакуума в начале координат, $\vec{0}$, состоит из точек вида $(\vec{0}, \psi)$, где ψ принимает всевозможные значения из области значений φ. Данное наблюдение мотивирует рассмотрение фактор–пространства $G/(H_0 \times \mathcal{A})$,

$$g_{H_0} = e^{iZ_a\xi^a}\ , \tag{3.70}$$

которое устанавливает взаимно однозначное соответствие между ξ^a и ψ. Стоит отметить аналогию данного шага с введением координат на $\mathcal{A}$ в методе индуцированных представлений. Тогда ключевое наблюдение состоит в том, что вид (3.70) однозначно фиксирует все намбу–голдстоуновские поля (на настоящий момент являющиеся пока только векторами), которые необходимы для описания всевозможных флуктуаций вакуума. Иначе говоря, набор полей ξ^a задаёт все поля, которые необходимы для построения неоднородной реализации G. Таким образом, воспроизводится вывод, сделанный в предыдущем разделе при помощи полярного разложения: в фактор–пространство необходимо включать экспоненты только от строго нарушенных генераторов. Хотя подобное заключение может казаться контринтуитивным, оно естественным образом следует из метода индуцированных представлений.

Закончим теперь начатое построение. Действие элемента $h_0 \in H_0$ на ξ^a реализуется как левое действие H_0 на фактор–пространство (3.70),

$$g_{H_0} \to h \cdot g_{H_0} \cdot h_0^{-1}(h, g_{H_0}) : \quad \xi^a \to \xi'^a(h, g_{H_0}) \ , \tag{3.71}$$

где $h_0 \in H_0$ таково, что $h \cdot g_{H_0} = g'_{H_0} \cdot h_0$. В частности, действие всех элементов $h_0 \in H_0$ на ξ^a линейно, как это следует из выражения

$$h_0 \cdot g_{H_0} = (h_0 \cdot g_{H_0} \cdot h_0^{-1}) \cdot h_0 \ . \tag{3.72}$$

Полученное представление H_0 следует далее индуцировать до представления G. Для этого необходимо выполнить стандартное действие — пополнить фактор–пространство (3.70) экспонентами от генераторов эффективных трансляций и сделать ξ^a полями,

$$g_H = e^{i\tilde{P}_\mu x^\mu} e^{iZ_a \xi^a(x)} \ . \tag{3.73}$$

Полученные таким образом поля ξ^a являются ничем иным, как намбу–голдстоуновскими полями для строго нарушенных генераторов.

Описанная конструкция демонстрирует, как из основополагающего метода, метода индуцированных представлений, следует правильное применение конструкции смежных классов в случае спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий. А именно, в фактор–пространство для построения эффективных теорий необходимо включать генераторы только строго нарушенных генераторов, что также автоматически исключает все избыточные намбу–голдстоуновские поля.

В заключении этого раздела сравним применение метода индуцированных представлений в случаях спонтанного нарушения внутренних и пространственно–временных симметрий. В первом случае действие группы не зависит от координат точки на многообразии $\mathcal{A}$, вследствие чего все нарушенные генераторы являются автоматически нарушенными в строгом смысле. В случае спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий это уже не так. Действительно, рассмотрим действие некоторого генератора пространственно–временных симметрий и обозначим через S его действие в начале координат или, что то же самое, до индуцирования представления на всё $\mathcal{A}$. Тогда после индуцирования действие данного генератора в произвольной точке x^μ даётся выражением

$$S(x) = e^{-i\tilde{P}_\mu x^\mu} S e^{i\tilde{P}_\mu x^\mu} \ . \tag{3.74}$$

Поскольку коммутатор S и $\tilde{P}^\mu$ не обращается в ноль (S — генератор пространственно–временных симметрий), то $S(x)$, в отличии от S, может уже не занулять вакуум. Таким образом, прямолинейный перенос определения нарушенных генераторов со случая спонтанного нарушения внутренних симметрий на случай спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий и стал причиной, по которой в построениях стали возникать избыточные поля. Как показано выше, подобные моды не должны вводиться вообще, а в рамках обратного эффекта Хиггса они выступают лишь как вспомогательные поля, позволяющие найти удобную замену переменных.

3.5.2. Эффективные теории меньшей размерности

Рассмотрим теперь случай, когда не существует набора генераторов, которые бы действовали транзитивно на $\tilde{\mathcal{A}}$. Чтобы разработать технику применения метода индуцированных представлений в подобных случаях, удобно вернуться к примеру скалярной доменной стенки. Для этого случая пространство $\tilde{\mathcal{A}}$ является набором точек вида $(x^\mu\,,\,z\,,\,\varphi_z(z))$. Очевидно, что в силу вида φ_z, орбита ни одной из точек $\tilde{\mathcal{A}}$ под действием группы Пуанкаре $ISO(1,d)$ не покрывает $\tilde{\mathcal{A}}$ целиком. Однако $\tilde{\mathcal{A}}$ изоморфна орбите гиперповерхности

$$\mathcal{B} = \{\,(0\,,z\,,\varphi_z(z))\,,\ z \in (-\infty, +\infty)\,\} \tag{3.75}$$

под действием генераторов трансляций P_μ. Данное наблюдение предлагает следующий способ построения подобных эффективных теорий. Сначала следует применить конструкцию смежных классов в каждой точке $\mathcal{B}$, что даёт d–мерное эффективное действие в фиксированной точке $\mathcal{B}$. По построению, это соответствует лагранжевым плотностям полной $(d+1)$–мерной теории в каждой из точек $\mathcal{B}$. После интегрирования данных плотности по $\mathcal{B}$, получается полный эффективный лагранжиан. В частности, эффективное действие для скалярной доменной стенки было получено ранее именно таким образом.

Остановимся более подробно на вопросе о том, как следует строить лагранжевы плотности. Заметим сначала, что применение метода индуцированных представлений в каждой из точек $\mathcal{B}$ не позволяет воспроизвести действие группы Пуанкаре, включающее преобразование координаты z. Однако действие подобных преобразований можно определить для полного пространства–времени, и перенести его без изменений в спонтанно нарушенную фазу. Подобное определение не приводит к противоречиям, поскольку в рамках конструкции смежных классов действие группы однозначно фиксировано законом композиции элементов группы. Далее, для каждой из точек $z \in \mathcal{B}$ обозначим через $\mathcal{B}_z$ и H_z орбиту данной точки под действием P_μ и группу стабильности z соответственно. Поскольку полное действие получается как интегрирование по z, то группой стабильности $H_{\mathcal{B}}$ полной теории является пересечение всех H_z. Например, для рассматриваемого случая доменной стенки $H_{\mathcal{B}}$ является группой Лоренца. Тогда, поскольку P_μ образуют набор d мерных эффективных трансляций, единственным строго нарушенным генератором является P_z. Таким образом, для построения эффективного действия скалярной доменной стенки необходимо использовать фактор–пространство (3.51), которое и было использовано в предыдущем разделе. Поскольку лагранжевы плотности получаются как вложения $\mathcal{B}_z$ в $\tilde{\mathcal{A}}$, то в каждой фиксированной точке z лагранжева плотность имеет вид

$$\mathcal{L}_z = C(z)\sqrt{h}\ . \tag{3.76}$$

Интегрируя лагранжевы плотности по всем z, получаем полное эффективное действие, (3.56).

Описанная выше процедура может быть легко обобщена следующим образом. В случаях, когда не существует набора генераторов, действующих транзитивно на $\tilde{\mathcal{A}}$, следует найти гиперповерхность $\mathcal{B}$ минимально возможной размерности n и генераторы $\tilde{P}_\mu$ такие, что орбита $\mathcal{B}$ под действием $\tilde{P}_\mu$ покрывает $\tilde{\mathcal{A}}$ целиком. Действие группы симметрий вдоль n измерений $\mathcal{B}$ следует положить таким, каковым оно является в полной теории. $\tilde{P}_\mu$ являются эффективными генераторами трансляций, действие которых на фиксированную точку $b \in \mathcal{B}$ даёт некоторую $(d-n)$ мерную гиперповерхность $\mathcal{B}_b$. Группой стабильности эффективной теории $H_{\mathcal{B}}$ является пересечение групп стабильности всех точек $\mathcal{B}$. Для построения эффективных теорий в каждой точке $\mathcal{B}$ необходимо рассмотреть фактор–пространство $G/H_{\mathcal{B}}$ и применить конструкцию смежных классов для построения $(d-n)$–мерных лагранжевых плотностей. Наконец, интегрируя лагранжевы плотности вдоль $\mathcal{B}$, можно воспроизвести полный лагранжиан эффективной теории.

Соответствующие лагранжевы плотности получаются как вложения $\mathcal{B}_b$ в $\tilde{\mathcal{A}}$. А именно, обозначим через y^μ координаты на $\mathcal{B}_b$. Тогда уравнения $x^m =$

$x^m(y)$ определяют закон вложения $\mathcal{B}_b$ в $\tilde{\mathcal{A}}$. Это позволяет получить все необходимые величины для построения лагранжевых плотностей на $\mathcal{B}_b$ как проекции соответствующих величин из $\tilde{\mathcal{A}}$. Например, инвариантный элемент объёма $\mathcal{B}_b$ имеет вид [77]

$$\text{Vol.} = \epsilon_{\mu_1..\mu_d}\lambda^{\mu_1}_{n_1}...\lambda^{\mu_d}_{n_d}\omega^{n_1}_P \wedge ... \wedge \omega^{n_d}_P \ , \tag{3.77}$$

где λ^μ_n является оператором проектирования касательных векторов из $\tilde{\mathcal{A}}$ на $\mathcal{B}_b$. Тетрады e^n_m на $\tilde{\mathcal{A}}$ связаны с тетрадами $\tilde{e}^\mu_\nu$ на $\mathcal{B}_b$ соотношением

$$\epsilon_{\mu_1..\mu_d}(\lambda^{\mu_1}_{n_1}e^{n_1}_{\nu_1}dx^{\nu_1}) \wedge ... \wedge (\lambda^{\mu_d}_{n_d}e^{n_d}_{\nu_d}dx^{\nu_d}) = \epsilon_{\mu_1..\mu_d}\tilde{e}^{\mu_1}_{\nu_1}...\tilde{e}^{\mu_d}_{\nu_d}dy^{\nu_1} \wedge ... \wedge dy^{\nu_d} \ . \tag{3.78}$$

Из этого выражения следует, что

$$\tilde{e}^\rho_\mu dy^\mu = \lambda^\rho_n e^n_m dx^m \ . \tag{3.79}$$

В свою очередь, приведённое выражение позволяет выразить инвариантную метрику на $\mathcal{B}_b$ через метрику полного пространства, g_{nm},

$$h_{\mu\nu} = g_{nm}\frac{\partial x^n}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^m}{\partial y^\nu} \ , \tag{3.80}$$

которая, как и ожидалось, совпадает со стандартным выражением. Остальные однородно преобразующиеся величины могут быть получены аналогичным образом.

3.6. Свойства эффективных теорий

Перед обсуждением свойств эффективных теорий, возникающих вследствие спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий, перечислим полученные результаты. Как было показано, только генераторам, нарушенным в строгом смысле (то есть не аннигилирующим вакуум в начале координат), соответствуют независимые намбу–голдстоуновские моды. Данное утверждение является обобщением теоремы Намбу–Голдстоуна для случая спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий. Однако, в отличие от классического случая спонтанного нарушения внутренних симметрий, в обсуждаемом ситуации часть намбу–голдстоуновских мод может оказать массивными. Поля, соответствующие частично нарушенным генераторам, являются вспомогательными. Обратный эффект Хиггса не является физическим явлением, а применяется для поиска удобной с точки зрения низкоэнергетического наблюдателя параметризации полей. Заметим, что уравнение (3.42) гарантирует, что подходящая замена переменных всегда существует. Различные параметризации фактор–пространства будут, в общем случае, соответствовать различным способам переопределения полей. Однако, все возможные параметризации эквивалентны, поскольку от одной к другой можно перейти путём замены переменных.

Для подсчёта количества массивных намбу–голдстоуновских мод заметим, что в процессе получения форм Маурер–Картана все 1–формы, содержащие намбу–голдстоуновские поля без дифференциала, получаются из выражения

$$e^{-iZ_a\xi^a}(e^{-i\tilde{P}_\mu x^\mu}de^{i\tilde{P}_\mu x^\mu})e^{iZ_a\xi^a} \ \in \ g_H^{-1}dg_H \ . \tag{3.81}$$

Как было доказано в [12], взаимодействие между различными полями через производные не меняет количества массивных и безмассовых мод. Следовательно, количество массивных намбу–голдстоуновских мод равно количеству намбу–голдстоуновских полей, входящих в (3.81) без производных. Однако данное правило может иметь исключение. А именно, если намбу–голдстоуновское поле входит без дифференциала в 1–форму для ненарушенных трансляций, то, в зависимости от структуры группы, подобные поля могут оказаться безмассовыми. Действительно, может оказаться так, что они исчезают из ковариантной метрики и потому будут безмассовыми (конечно, при условии, что во все оставшиеся 1-формы они входят со знаком дифференциала). Таким образом, вопрос о массивности или безмассовости подобных полей должен изучаться отдельно. Стоит также отметить, что некоторые поля могут образовывать канонически сопряженные пары координата–импульс, что приводит к дальнейшему уменьшению степеней свободы в теории [15, 17, 70, 74].

В силу присутствия массивных намбу–голдстоуновских полей, характерные спектры теорий со спонтанно нарушенными пространственно–временными и внутренними симметриями различаются. В обоих случаях в эффективных теориях присутствует масштаб сильной связи, выше которого теория должны быть ултрафиолетово пополнена. Однако, в случае спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий, в эффективных теориях возникает также масштаб, связанный с массой намбу–голдстоуновских полей. При энергии много меньше их массы, последние могут быть отынтегрированы. В этом случае получается низкоэнергетическая теория в её стандартном понимании, то есть описывающая поведение только безмассовых мод [11, 13]. Заметим, что знать о существовании массивных намбу–голдстоуновских мод важно, поскольку для построения ультрафиолетово полной теории их будет необходимо ввести на некотором масштабе энергий [10]. В общем случае, соотношение между масштабом сильной связи и массой намбу–голдстоуновских полей может быть произвольным. Например, в модели из секции 3.2, масштабом сильной связи является M, в то врем как масса векторного поля $\varkappa$ может быть как больше, так и меньше M. В случае $\varkappa \gtrsim M$, векторное поле остаётся нединамическим вплоть до масштаба сильной связи.

Как было показано в [11], массивные намбу–голдстоуновские моды можно всегда переопределить так, что они преобразуются однородно под действием всех элементов группы. Действительно, пусть некоторое массивное намбу–голдстоуновское поле A входит в 1-форму Маурер–Картана Ω_A без знака дифференциала (индексы опущены с целью упрощения обозначений). Тогда можно сделать замену переменных

$$A' = \Omega_A \, . \tag{3.82}$$

Приведенное уравнение задаёт допустимую замену переменных, поскольку обе его части содержат поля без производных. Далее, поскольку форма Маурер–Картана Ω_A пребразуется однородно под действием всех элементов группы симметрий, то A' также всегда преобразуется однородно. В данной параметризации поле A' проебразуется как обычное поле материи и является ничем иным, как массивной нерадиальной модой, обсуждаемой в [10]. Приведенный выше аналог теоремы Намбу–Голдстоуна устанавливает критерий, когда подобное поле будет присутствовать в эффективной теории. Этот результат дополняет выводы работы [11] и показывает, что обратный эффект Хиггса не связан с переопределением полей вида (3.82).

Одним из интересных следствий проведенного анализа является следующее утверждение: если генераторы некоторой группы всегда действуют тривиально на поля в начале координат, то им никогда не соответствуют (неизбыточные) намбу–голдстоуновские поля [79]. В частности, поскольку генераторы специальных конформных преобразований всегда зануляют квази–примарные поля, то в случае спонтанного нарушения конформной группы им никогда не будут соответствовать намбу–голдстоуновские поля. Данный результат подтверждает заключение главы 1 настоящей работы. Приведённое следствие может оказаться интересным также в контексте изучения полиномиальных симметрий [80, 81].

3.7. Сравнение с литературой

Сравним сначала приведенный результаты с выводами работ [8, 12]. Как было показано в последних работах, некоторые из намбу–голдстоуновских полей являются избыточными тогда, когда действие нарушенных генераторов на вакуум не является линейно независимыми. Рассмотрим более подробно данное утверждение на примере теорий, описываемых лагранжианами (3.3) и (3.27) из раздела 3.3. Обозначим через Φ вакуумное значение полей и рассмотрим следующее уравнение на $\Delta\psi^a$, $\Delta\omega^a_b$,

$$\delta\Phi \equiv (\Delta\psi^a \bar{P}_a + \frac{1}{2}\Delta\omega^a_b \bar{M}^b_a)\Phi = 0 \; . \tag{3.83}$$

Если приведённое уравнение имеет нетривиальные решения, то конфигурации полей (ψ^a, ω^a_b) и $(\psi^a + \Delta\psi^a, \omega^a_b + \Delta\omega^a_b)$ описывают одно и то же возмущение вакуума, и поэтому набор полей (ψ^a, ω^a_b) является избыточным. Как можно легко убедиться, для ваккума (3.6) не существует нетривиальных решений уравнения (3.83). С другой стороны, для второй теории решения уравнения (3.83) имеют вид

$$\Delta\psi^a(x) = x^b \alpha^a_b(x) \, , \qquad \Delta\omega^a_b(x) = \alpha^a_b(x) \; , \tag{3.84}$$

где $\alpha^a_b(x)$ является произвольным антисимметричным по своим индексам полем. Существование данного решения обусловлено тем фактом, что в данной теории генераторы $\bar{M}^a_b$ не являются нарушенными в строгом смысле: действие $\bar{M}^a_b$ в начале координат на вакуум равно нулю, но становится нетривиальным при ненулевых значений координат (в силу ненулевого коммутатора с нарушенным генератором $\bar{P}_a$). Как следствие, уравнение (3.83) имеет решение (3.84). Как показывает приведённый в настоящей работе анализ, намбу–голдстоуновское поле ω^{ab} является вспомогательным, и его нельзя рассматривать как настоящую, пускай и избыточную, степень свободы в теории. К подобному выводу можно также прийти, заметив, что подходящим выбором $\alpha^a_b(x)$ всегда можно занулить ω^{ab} во всём пространстве. Таким образом, соответствующее поле не является динамическим и независимым. Наоборот, для зануления ψ^a во всём пространстве поле α^a_b должно быть сингулярным в начале координат. Последнее наблюдение также показывает, что обратный эффект Хиггса не может рассматриваться как фиксация калибровки в эффективных теориях, допускающих описание одного и того же возмущения вакуума с помощью различных конфигураций полей.

Заметим далее, что предлагаемый в настоящей работе поход находится в полном согласии с работой [17]. В последней работе было показано, что если между Нётеровскими токами, соответствующими нарушенным генераторам, имеется функциональная зависимость, то часть из намбу–голдстоуновских полей является избыточными. В предложенном в настоящей работе подходе соответствующие поля являются вспомогательными и также отсутствуют в эффективной теории. Чтобы продемострировать, каким образом обсуждаемые конструкции совпадают, рассмотрим некоторую теорию со скалярным полем, вакуумное значение которого зависит от координат. Для определенности предположим, что вакуумное решение зависит только от координаты z. Тогда, поскольку действие нарушенных генераторов на вакуум в начале координат тривиально (генераторы группы Лоренца всегда аннигилируют скаляр), то, в соответствии с предложенным в настоящей работе критерием, намбу–голдстоуновское поле для нарушенных генераторов Лоренца является избыточными. Чтобы прийти к такому же выводу при помощи метода работы [17], заметим, что для скалярного поля имеется следующая функциональная зависимость между тензорами момента импульса и импульса–энергии:

$$M^{\lambda}_{z\nu} = zT^{\lambda}_{\nu} - x_{\nu}T^{\lambda}_{z} \ . \tag{3.85}$$

Таким образом, критерий работы [17] также указывает на то, что намбу–голдстоуновское поле для нарушенных генераторов Лоренца являются избыточными.

В заключении этого раздела обсудим связь результатов раздела 3.4 с работой [10]. Из приведенных в предыдущем разделе рассуждений следует, что “новый” масштаб сильной связи, обнаруженный в [10], является ничем иным как энергетическим масштабом, при котором нельзя принебречь динамикой массивных намбу–голдстоуновских мод. Действительно, в работе [10] пространственная и внутренняя группы Лоренца были нарушены до диагональной подгруппы. Далее, поскольку действие внутренней группы не зависит от рассматриваемой точки, и она предполагается нарушенной, то соответствующая намбу–голдстоуновская мода обязана быть физической. Более того, явным вычислением форм Маурер–Картана можно убедиться, что она будет массивной. Таким образом, “массивные нерадиальные моды” являются ничем иным, как массивными намбу–голдстоуновскими полями.

Заключение

Подведём итоги представленной работы. В настоящей диссертации были получены следующие результаты:

1. В главе 2 настоящей работы была разработана техника применения конструкции смежных классов для построения конформно–инвариантных теорий. Ключевую роль в построении играл правильный учёт дискретной симметрии инверсии координат. Корректный учёт данной симметрии привёл к заключению, что для построения конформно–инвариантных лагранжианов необходимо использовать фактор–пространство, содержащие экспоненты как от генераторов трансляций, так и от генераторов специальных конформных преобразований. При этом параметры при генераторах специальных конформных преобразований должны рассматриваться как поля, чья зависимость от координат однозначно фиксирована симметриями. Требование, чтобы конструируемые лагранжианы удовлетворяли этому требованию, гарантирует известное свойство конформных теорий поля, а именно, что их вириальный ток является дивергенцией от некоторого тензора. С точки зрения метода индуцированных представлений, разработанная техника позволяет расширить область применения конструкции смежных классов на теории, определенные на многообразиях, чей атлас должен содержать более одной карты.

2. В главе 2 также было разработано математически строгое применение конструкции смежных классов для построения конформно–инвариантных лагранжианов в спонтанно нарушенной фазе. Было показано, что намбу–голдстоуновские поля для специальных конформных преобразований никогда не являются физических степеней свободы, а их роль аналогична таковой в ненарушенной фазе. Также была доказана экви-

валентность разработанного подхода и стандартной техники, включающего применение обратного эффекта Хиггса. А именно, было показано, что хотя стандартный подход не согласован с симметрией инверсии координат, он формально позволяет получить всевозможные конформно–инвариантные эффективные лагранжианы.

3. В главе 3 был установлен аналог теоремы Намбу–Голдстоуна для случая спонтанного нарушения пространственно–временных симметрий. А именно, было показано, что всем генераторам, не аннигилирующим вакуум в начале координат, соответствуют независимые намбу–голдстоуновские поля. Остальным нарушенным генераторам не соответствуют независимые поля, и от них необходимо избавиться посредством применения обратного эффекта Хиггса. Также был предложен критерий, позволяющий установить является ли намбу–голдстоуновская мода массивной или нет. Кроме того, было также показано, что массивные намбу–голдстоуновские поля соответствуют массивным нерадиальным модам, обсуждавшимся ранее в литературе.

4. В главе 3 была установлена физическая интерпретация обратного эффекта Хиггса. Было показано, что он соответствует поиску такой параметризации полей, что все поля в эффективной теории становятся разряженными под действием всех нарушенных генераторов симметрий. Таким образом, обратный эффект Хиггса не является реальным физическим эффектом, уменьшающим количество степеней свободы в теории, а также не может рассматриваться как фиксация калибровки для выбора способа описания возмущений вакуума.

В будущем, результаты Главы 2 настоящей работы могут быть применены для построения экзотических теорий с конформной инвариантностью, а также могут оказаться интересными в контексте AdS/CFT дуальности. Ожидается, что результаты Главы 3 позволят изучить возможность ультрафиолетового пополнения теорий с массивным гравитоном. Также, поскольку установленный аналог теоремы Намбу-Голдстоуна для спонтанного нарушения пространственно-временных симметрий позволяет предсказать низкоэнергетический спектр различных теорий (включая массивные моды), то полученные результаты могут оказаться интересными в области физики конденсированных сред или твёрдого тела.

Автор хотел бы выразить благодарность научному коллективу отдела теоретической физики ИЯИ РАН и лично Валерию Анатольевичу Рубакову за уникальную творческую и рабочую атмосферу.

Список литературы

1. Mackey G. W. Induced representations of groups and quantum mechanics. W. A. Benjamin Inc., Editore Boringhieri, 1969.
2. Hermann Robert. Lie groups for physicists. WA Benjamin New York, 1966. Т. 5.
3. Wigner Eugene. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group // Annals of mathematics. 1939. С. 149–204.
4. Wigner EP. Unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group including reflections // The Collected Works of Eugene Paul Wigner. Springer, 1993. С. 564–607.
5. Coleman Sidney R., Wess J., Zumino Bruno. Structure of phenomenological Lagrangians. 1. // Phys. Rev. 1969. Т. 177. С. 2239–2247.
6. Structure of phenomenological Lagrangians. 2. / Curtis G. Callan, Jr., Sidney R. Coleman, J. Wess [и др.] // Phys. Rev. 1969. Т. 177. С. 2247–2250.
7. Ogievetsky V.I. Nonlinear realization of internal and space-time symmetries // X-th winter school of theoretical physics in Karpacz, Poland. 1974.
8. Low Ian, Manohar Aneesh V. Spontaneously broken space-time symmetries and Goldstone's theorem // Phys. Rev. Lett. 2002. Т. 88. С. 101602.
9. Ivanov E. A., Ogievetsky V. I. The Inverse Higgs Phenomenon in Nonlinear Realizations // Teor. Mat. Fiz. 1975. Т. 25. С. 164–177.
10. Endlich Solomon, Nicolis Alberto, Penco Riccardo. Ultraviolet completion without symmetry restoration // Phys. Rev. 2014. Т. D89, № 6. С. 065006.
11. Brauner Tomáš, Watanabe Haruki. Spontaneous breaking of spacetime symmetries and the inverse Higgs effect // Phys. Rev. 2014. Т. D89, № 8. С. 085004.
12. More on gapped Goldstones at finite density: More gapped Goldstones / Alberto Nicolis, Riccardo Penco, Federico Piazza [и др.] // JHEP. 2013.

T. 11. C. 055.

13. Klein Remko, Roest Diederik, Stefanyszyn David. Spontaneously Broken Spacetime Symmetries and the Role of Inessential Goldstones // JHEP. 2017. T. 10. C. 051.
14. McArthur I. N. Nonlinear realizations of symmetries and unphysical Goldstone bosons // JHEP. 2010. T. 11. C. 140.
15. Watanabe Haruki, Murayama Hitoshi. Effective Lagrangian for Nonrelativistic Systems // Phys. Rev. 2014. T. X4, № 3. C. 031057.
16. Nicolis Alberto, Piazza Federico. Implications of Relativity on Nonrelativistic Goldstone Theorems: Gapped Excitations at Finite Charge Density // Phys. Rev. Lett. 2013. T. 110, № 1. C. 011602. [Addendum: Phys. Rev. Lett.110,039901(2013)].
17. Watanabe Haruki, Brauner Tomáš, Murayama Hitoshi. Massive Nambu-Goldstone Bosons // Phys. Rev. Lett. 2013. T. 111, № 2. C. 021601.
18. Maldacena Juan Martin. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity // Int. J. Theor. Phys. 1999. T. 38. C. 1113–1133. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].
19. Large N field theories, string theory and gravity / Ofer Aharony, Steven S Gubser, Juan Maldacena [и др.] // Physics Reports. 2000. T. 323, № 3-4. C. 183–386.
20. Shaposhnikov Mikhail, Zenhausern Daniel. Scale invariance, unimodular gravity and dark energy // Phys. Lett. 2009. T. B671. C. 187–192.
21. Shaposhnikov Mikhail, Zenhausern Daniel. Quantum scale invariance, cosmological constant and hierarchy problem // Phys. Lett. 2009. T. B671. C. 162–166.
22. Mack G, Salam Abdus. Finite-component field representations of the conformal group // Selected Papers Of Abdus Salam: (With Commentary). World Scientific, 1994. C. 255–283.
23. Salam Abdus, Strathdee J. A. Nonlinear realizations. 2. Conformal

symmetry // Phys. Rev. 1969. T. 184. C. 1760–1768.

24. Ivanov E. A., Niederle J. Gauge Formulation of Gravitation Theories. 2. The Special Conformal Case // Phys. Rev. 1982. T. D25. C. 988.
25. Wehner Andre. Symmetric spaces with conformal symmetry. 2001.
26. Hinterbichler Kurt, Joyce Austin, Khoury Justin. Non-linear Realizations of Conformal Symmetry and Effective Field Theory for the Pseudo-Conformal Universe // JCAP. 2012. T. 1206. C. 043.
27. Volkov Dmitri V. Phenomenological Lagrangians // Fiz. Elem. Chast. Atom. Yadra. 1973. T. 4. C. 3–41.
28. Kharuk Ivan. Coset space construction for the conformal group // Phys. Rev. 2018. T. D98, № 2. C. 025006.
29. Kharuk I. Coset space construction for the conformal group. II. Spontaneously broken phase and inverse Higgs phenomenon. 2017.
30. Kharuk I. On the Application of the Method of Induced Representations to the Conformal Group // Physics of Particles and Nuclei. 2018. T. 49, № 5. C. 969–971.
31. Kharuk Ivan, Shkerin Andrey. Solving puzzles of spontaneously broken spacetime symmetries // Phys. Rev. 2018. T. D98, № 12. C. 125016.
32. Kharuk Ivan, Shkerin Andrey. On massive Nambu-Goldstone fields // EPJ Web Conf. 2018. T. 191. C. 06012.
33. Ortin Tomas. Gravity and Strings. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2015.
34. Weinberg Steven. The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications. Cambridge University Press, 2013.
35. AdS(d+1) —> AdS(d) / T. E. Clark, S. T. Love, Muneto Nitta [и др.] // J. Math. Phys. 2005. T. 46. C. 102304.
36. Nambu Yoichiro. Quasiparticles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity // Phys. Rev. 1960. T. 117. C. 648–663. [,132(1960)].
37. Goldstone J. Field Theories with Superconductor Solutions // Nuovo Cim.

1961. Т. 19. С. 154–164.

38. Goldstone Jeffrey, Salam Abdus, Weinberg Steven. Broken Symmetries // Phys. Rev. 1962. Т. 127. С. 965–970.
39. Ivanov E. A., Ogievetsky V. I. Gauge Theories as Theories of Spontaneous Breakdown // Lett. Math. Phys. 1976. Т. 1. С. 309–313.
40. Goon Garrett, Joyce Austin, Trodden Mark. Spontaneously Broken Gauge Theories and the Coset Construction // Phys. Rev. 2014. Т. D90, № 2. С. 025022.
41. Yang Chen-Ning, Mills Robert L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance // Physical review. 1954. Т. 96, № 1. С. 191.
42. Ivanov E. A., Niederle J. Gauge Formulation of Gravitation Theories. 1. The Poincare, De Sitter and Conformal Cases // Phys. Rev. 1982. Т. D25. С. 976.
43. (Re-)Inventing the Relativistic Wheel: Gravity, Cosets, and Spinning Objects / Luca V. Delacrétaz, Solomon Endlich, Alexander Monin [и др.] // JHEP. 2014. Т. 11. С. 008.
44. Einstein Gravity, Massive Gravity, Multi-Gravity and Nonlinear Realizations / Garrett Goon, Kurt Hinterbichler, Austin Joyce [и др.] // JHEP. 2015. Т. 07. С. 101.
45. Anderson Philip W. Plasmons, gauge invariance, and mass // Physical Review. 1963. Т. 130, № 1. С. 439.
46. Higgs Peter W. Broken symmetries, massless particles and gauge fields // Physics Letters. 1964. Т. 12, № 2. С. 132–133.
47. Guralnik Gerald S, Hagen Carl R, Kibble Thomas WB. Global conservation laws and massless particles // Physical Review Letters. 1964. Т. 13, № 20. С. 585.
48. Stueckelberg E. C. G. Interaction energy in electrodynamics and in the field theory of nuclear forces // Helv. Phys. Acta. 1938. Т. 11. С. 225–244.
49. Ruegg Henri, Ruiz-Altaba Marti. The Stueckelberg field // Int. J. Mod. Phys. 2004. Т. A19. С. 3265–3348.

50. Dubovsky S. L. Phases of massive gravity // JHEP. 2004. T. 10. C. 076.
51. de Rham Claudia, Gabadadze Gregory, Tolley Andrew J. Ghost free Massive Gravity in the Stúckelberg language // Phys. Lett. 2012. T. B711. C. 190–195.
52. de Rham Claudia. Massive Gravity // Living Rev. Rel. 2014. T. 17. C. 7.
53. Wess Julius, Zumino Bruno. Consequences of anomalous Ward identities // Phys. lett. B. 1971. T. 37, № CERN-TH-1398. C. 95–97.
54. Witten Edward. Global aspects of current algebra // Nuclear Physics B. 1983. T. 223, № 2. C. 422–432.
55. D'Hoker Eric, Weinberg Steven. General effective actions // Phys. Rev. 1994. T. D50. C. R6050–R6053.
56. D'Hoker Eric. Invariant effective actions, cohomology of homogeneous spaces and anomalies // Nucl. Phys. 1995. T. B451. C. 725–748.
57. de Azcarraga J. A., Macfarlane A. J., Perez Bueno J. C. Effective actions, relative cohomology and Chern Simons forms // Phys. Lett. 1998. T. B419. C. 186–194.
58. Chern Shiin-Shen, Simons James. Characteristic forms and geometric invariants // Annals Math. 1974. T. 99. C. 48–69.
59. Ivanov E. A., Kapustnikov A. A. Super p-branes from a supersymmetric field theory // Phys. Lett. 1990. T. B252. C. 212–220.
60. Ivanov E. A., Krivonos S. O. Nonlinear Realization of the Conformal Group in Two-dimensions and the Liouville Equation // Theor. Math. Phys. 1984. T. 58. C. 131–140. [Teor. Mat. Fiz.58,200(1984)].
61. Callan Jr. Curtis G., Coleman Sidney R., Jackiw Roman. A New improved energy - momentum tensor // Annals Phys. 1970. T. 59. C. 42–73.
62. Morse JM. Calculus of variations in the Large (American Mathematical Society Colloquium Publications, XVIII) American Mathematical Society // Providence, RI. 1996.
63. Browder William. Surgery on simply-connected manifolds. Springer Science & Business Media, 2012. T. 65.

64. Blattner R. J. On Induced Representations // Amer. J. of Math. 1961. Январь. Т. 83, № 1. С. 79–98.
65. Belavin A. A., Polyakov Alexander M., Zamolodchikov A. B. Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory // Nucl. Phys. 1984. Т. B241. С. 333–380. [,605(1984)].
66. Ginsparg Paul H. APPLIED CONFORMAL FIELD THEORY // Les Houches Summer School in Theoretical Physics: Fields, Strings, Critical Phenomena Les Houches, France, June 28-August 5, 1988. 1988. С. 1–168.
67. Schottenloher Martin. A mathematical introduction to conformal field theory. Springer, 2008. Т. 759.
68. Francesco Philippe, Mathieu Pierre, Sénéchal David. Conformal field theory. Springer Science & Business Media, 2012.
69. El-Showk Sheer, Nakayama Yu, Rychkov Slava. What Maxwell Theory in D<>4 teaches us about scale and conformal invariance // Nucl. Phys. 2011. Т. B848. С. 578–593.
70. Watanabe Haruki, Murayama Hitoshi. Redundancies in Nambu-Goldstone Bosons // Phys. Rev. Lett. 2013. Т. 110, № 18. С. 181601.
71. Isham C. J., Salam Abdus, Strathdee J. A. Spontaneous breakdown of conformal symmetry // Phys. Lett. 1970. Т. 31B. С. 300–302.
72. Weinberg Steven. The quantum theory of fields. Vol. 3: Supersymmetry. Cambridge University Press, 2013.
73. Coleman Sidney R., Mandula J. All Possible Symmetries of the S Matrix // Phys. Rev. 1967. Т. 159. С. 1251–1256.
74. Watanabe Haruki, Murayama Hitoshi. Unified Description of Nambu-Goldstone Bosons without Lorentz Invariance // Phys. Rev. Lett. 2012. Т. 108. С. 251602.
75. (Re-) inventing the relativistic wheel: gravity, cosets, and spinning objects / Luca V Delacrétaz, Solomon Endlich, Alexander Monin [и др.] // Journal of High Energy Physics. 2014. Т. 2014, № 11. С. 8.

76. Salam Abdus, Strathdee J. A. Nonlinear realizations. 1: The Role of Goldstone bosons // Phys. Rev. 1969. T. 184. C. 1750–1759.
77. Potential for general relativity and its geometry / Gregory Gabadadze, Kurt Hinterbichler, David Pirtskhalava [и др.] // Phys. Rev. 2013. T. D88, № 8. C. 084003.
78. Chkareuli J. L., Kobakhidze Archil, Volkas Raymond R. Vector-Field Domain Walls // Phys. Rev. 2009. T. D80. C. 065008.
79. Hidaka Yoshimasa, Noumi Toshifumi, Shiu Gary. Effective field theory for spacetime symmetry breaking // Phys. Rev. 2015. T. D92, № 4. C. 045020.
80. Nicolis Alberto, Rattazzi Riccardo, Trincherini Enrico. The Galileon as a local modification of gravity // Phys. Rev. 2009. T. D79. C. 064036.
81. Scalar Field Theories with Polynomial Shift Symmetries / Tom Griffin, Kevin T. Grosvenor, Petr Horava [и др.] // Commun. Math. Phys. 2015. T. 340, № 3. C. 985–1048.