

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ РОССИЙСКОЙ
АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Ерошенко Юрий Николаевич

**Нелинейные гравитационно-связанные
структуры в ранней Вселенной**

01.04.02 – теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2016

Содержание

Введение	6
Глава 1. Сгустки темной матери (случай стандартных возмущений плотности)	47
1.1. Сгустки минимальных масс	47
1.1.1. Кинетическое отщепление частиц темной материи	48
1.1.2. Диффузионное обрезание спектра возмущений	52
1.1.3. Свободный разлет	54
1.1.4. Сравнение с результатами других исследований	56
1.1.5. Минимальная масса M_{\min} для сверхтяжелых нейтрино	58
1.2. Формирование функции масс сгустков в процессах раннего иерархического сгущивания с учетом приливных разрушений	60
1.2.1. Приливные процессы	62
1.2.2. Иерархическое сгущивание с учетом разрушений	65
1.2.3. Сравнение с результатами численного моделирования	69
1.3. Разрушение сгустков в Галактике	70
1.3.1. Структура Галактики, орбиты сгустков и разрушение по- лем диска	72
1.3.2. Разрушение сгустков звездами	77
1.3.3. Доля избежавших разрушения сгустков	82
1.3.4. Трансформация функции распределения сгустков	86
1.3.5. Гравитационные удары от диска и роль отдельных звезд	88
1.4. Профиль плотности сгустков	89
1.4.1. Ограничения на радиус ядра из теоремы Лиувилля	89
1.4.2. Влияние приливных сил на профиль плотности	92
1.5. Аннигиляция частиц в сгустках	95
1.5.1. Параметризация аннигиляционного сигнала	96
1.5.2. Усиление аннигиляционного сигнала	97
1.5.3. Усиление сигнала в скоплениях галактик	100
1.5.4. Анизотропия аннигиляции в гало	103

1.5.5.	Можно ли объяснить данные PAMELA, ATIC и др. аннигиляцией в сгустках?	107
Глава 2.	Сверхплотные сгустки темной материи	111
2.1.	Сферическая модель эволюции возмущений	111
2.1.1.	Постановка задачи	111
2.1.2.	Сферическая модель для адиабатических возмущений на стадии радиационного доминирования	113
2.2.	Несферическая модель	116
2.3.	Сверхплотные сгустки - ограничения по первичным черным дырам	123
2.4.	О возможности регистрации сгустков гравитационно-волновыми детекторами	124
2.5.	Нейтральные звезды и микролинзирование	125
2.6.	Вторичная аккреция и “ультракомпактные минигало”	129
2.7.	Аннигиляция темной материи в сверхплотных сгустках	133
2.7.1.	Аннигиляционный критерий для радиуса ядра	133
2.7.2.	Аннигиляция нейтралов в сверхплотных сгустках	134
2.7.3.	Гравитермическая катастрофа в ядре для сверхтяжелых частиц	135
2.7.4.	Аннигиляция сверхмассивных частиц в сверхплотных сгустках	139
2.7.5.	Ограничения на аннигиляцию частиц по реликтовому излучению и первичному нуклеосинтезу	142
2.8.	Сгустки вокруг топологических дефектов	143
2.8.1.	Формирование сгустков вокруг петель космических струн	144
2.8.2.	Аннигиляция в сгустках вокруг петель космических струн	150
Глава 3.	Темная материя и черные дыры	153
3.1.	Квазистационарная аккреция на первичные черные дыры и кротовые норы	153
3.2.	Темная материя вокруг первичных черных дыр, аннигиляция	158
3.2.1.	Эволюция плотности вокруг первичных черных дыр до кинетического отщепления	160

3.2.2.	Разлет частиц темной материи после кинетического отщепления	164
3.2.3.	Аннигиляция темной материи вокруг первичных черных дыр, наблюдательные ограничения	168
3.3.	Индукцированные гало вокруг единичных первичных черных дыр	172
3.3.1.	Структура гало вокруг первичных черных дыр	172
3.3.2.	Корреляции $\sigma - M_{\text{ВН}}$ между центральными черными дырами и балджами галактик	174
3.4.	Скопления первичных черных дыр	176
3.4.1.	Раннее образование квазаров	177
3.4.2.	Раннее образование галактик	184
3.4.3.	Всплески гравитационных волн от столкновений черных дыр в скоплениях	189
3.5.	Темная материя вокруг сверхмассивной черной дыры в центре Галактики	195
3.5.1.	Прецессия звезд	197
3.5.2.	Аннигиляция темной материи	200
Глава 4.	Нелинейные гравитационные структуры	205
4.1.	“Гравитационные пузыри” и другие решения в конформной гравитации	205
4.1.1.	Вывод уравнений Баха	206
4.1.2.	Уравнения Баха в сферически-симметричном случае	208
4.1.3.	Общая структура вакуумных решений	210
4.1.4.	Восстановление радиальной координаты	213
4.1.5.	Решения с постоянной кривизной	215
4.1.6.	Общая структура тензора энергии-импульса и векторное уравнение	218
4.1.7.	Решение вида решения Вайдья и электровакуумное решение	220
4.2.	Квантовые уровни электронов в заряженных черных дырах	223
4.2.1.	Уравнение Дирака в метрике Рейсснера–Нордстрема	225
4.2.2.	Не экстремальная черная дыра с $ Q < M$	227

4.2.3.	Решение для экстремальной черной дыры	229
4.2.4.	Атомарные ЧД как частицы темной материи	232
4.3.	Задача Вайдья в диагональных координатах	236
4.3.1.	Решение в координатах кривизн (t, r)	238
4.3.2.	Световые лучи в диагональной метрике, время движения фотонов	242
4.3.3.	Геометрический смысл поверхностей $y = y_1$ и $y = y_2$	244
4.3.4.	Аккреция с $\alpha \geq 1/8$	248
4.3.5.	Природа $f_0 \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow 0$	248
4.3.6.	Координаты (η, y)	250
4.3.7.	Построение глобальной геометрии	252
Заключение		261
Список сокращений и условных обозначений		265
Литература		266

Введение

Общая характеристика диссертации

Диссертационная работа посвящена теоретическому исследованию образования во Вселенной гравитационно-связанных объектов различного типа в ранние догалактические эпохи. Центральной темой являются мелкомасштабные сгустки темной материи (ТМ) с массами, меньшими масс звезд. В наиболее консервативном сценарии такие сгустки темной материи (СТМ) образуются на пылевидной стадии эволюции Вселенной. В других сценариях СТМ могут рождаться раньше – на радиационно-доминированной стадии при наличии дополнительных локальных максимумов в спектре космологических возмущений плотности, либо вокруг первичных черных дыр (ЧД) или топологических дефектов. В диссертации рассматривается проблема выживания сгустков темной материи (СТМ) в процессах их гравитационного взаимодействия со звездами.

Первичные черные дыры (ПЧД) рассмотрены в диссертации в различных аспектах: как возможный компонент ТМ и как затравки для образования ранних галактик или квазаров. Кроме того, исследованы гравитационные всплески от столкновений ПЧД в скоплениях. Рассмотрены нелинейные гравитационные объекты, структура которых определяется релятивистской теорией гравитации, и которые могли рождаться во Вселенной на ранней стадии ее эволюции.

Несмотря на то, что рассматриваемые в диссертации объекты, в основном, догалактические, они могли сохраниться до наших дней (в том числе, в нашей Галактике), и иметь наблюдательные проявления. Поиск этих проявлений дает возможность проверки предлагаемых моделей. Перспективным направлением является поиск сигналов от аннигиляции частиц ТМ в плотных СТМ. Рассчитанные в диссертации аннигиляционные сигналы сравниваются с наблюдаемым гамма-фоном. Из условия того, что рассчитанный сигнал не превышает фон, находятся совместные ограничения на свойства СТМ и свойства частиц ТМ.

Одним из наблюдательных проявлений ПЧД могут быть гравитационно-волновые сигналы от столкновений ПЧД в скоплениях. В диссертации рассчитан ожидаемый темп гравитационных всплесков. Эта модель может быть про-

верена с помощью следующего поколения детекторов гравитационных волн. Также образовавшиеся рано ПЧД могли принимать участие в процессе формирования, по крайней мере, части сверхмассивных ЧД в ядрах галактик. При этом вокруг центральных ЧД должен нарастать пик плотности ТМ, характеристики которого зависят от эволюционной истории ЧД. В диссертации рассмотрен метод измерения массы ТМ в центре Галактики на основе прецессии звезд. Этот метод в будущем может помочь реконструировать историю образования центральной ЧД, в том числе, в модели слияний менее массивных ПЧД.

Диссертационная работа основана на результатах, полученных, в основном, в 2001-2016 гг. По теме диссертации опубликованы три обзора на русском языке в журнале Успехи физических наук.

Методы

Результаты, представленные в диссертации, получены путем аналитических и численных расчетов. При исследовании нелинейных структур в ранней Вселенной применялись методы гравитационной динамики как в ньютоновском приближении, так и в рамках общей теории относительности и конформной теории гравитации. Для получения ограничений на параметры моделей применяется метод сравнения рассчитанных величин с верхними наблюдательными пределами по гамма-фону, полученными на гамма-телескопах. При разработке теоретических моделей требовалась их непротиворечивость и согласие со всем массивом астрофизических и космологических данных, известных из наблюдений, а также, где это возможно, выделялись эффекты, на основе которых в будущем можно выполнить наблюдательную проверку моделей.

Цель диссертации

Основными целями диссертационной работы является:

а) Исследование процессов образования и разрушения мелкомасштабных СТМ. Расчет начальной функции масс СТМ и трансформированной функции масс СТМ, избежавших приливного разрушения при столкновениях со звездами. Расчет усиления сигнала от аннигиляции ТМ в СТМ по сравнению с

сигналом в диффузно распределенной ТМ (без СТМ).

б) Обоснование возможности образования СТМ из адиабатических возмущений плотности на радиационно-доминированной стадии эволюции Вселенной. Исследование нарастания несферичности формирующегося объекта и ее влияния на число образующихся СТМ. Исследование возможных наблюдательных проявлений сверхплотных СТМ, образовавшихся на стадии радиационного доминирования.

в) Исследование моделей, в которых ПЧД служат затравками для образования плотных пиков плотности ТМ или гало ТМ. Для маломассивных ПЧД эти пики плотности могут являться источниками аннигиляционного сигнала, поэтому производился расчет возможных сигналов и сравнение их с имеющимися ограничениями по гамма-фону. В моделях со скоплениями ПЧД рассчитан темп гравитационных всплесков от столкновений ПЧД в скоплениях.

г) Исследование свойств гравитационных нелинейных структур в ранней Вселенной. В том числе, изучаются их свойства в конформной теории гравитации, которая может предшествовать общей теории относительности. Исследование некоторых аспектов аккреции излучения на ПЧД, имевшей место на радиационно-доминированной стадии. Исследование ПЧД с зарядами на внутренних орбиталях и возможности их образований в ранней Вселенной.

Актуальность диссертации

Хотя ТМ составляет примерно 27% от полной плотности вещества во Вселенной, ее природа до сих пор остается неизвестной. Среди предложенных вариантов наиболее популярной является модель новых элементарных частиц. Поэтому в настоящее время очень актуальны и привлекают большое внимание проблемы прямой и непрямой регистрации частиц ТМ. В некоторых экспериментах уже сообщалось о возможной регистрации частиц ТМ, в том числе, о наблюдении сезонных вариаций отсчетов детекторов, которые могут объясняться изменением направления движения Земли в течение года. Однако сообщения различных групп пока не согласуются между собой или не подтверждаются в независимых экспериментах. Частицы ТМ не удалось пока получить и иден-

тифицировать на Большом адронном коллайдере или на других ускорителях, поэтому остается актуальной попытка их не прямой регистрации. Разработка новых подходов к не прямой регистрации частиц ТМ может сыграть принципиальную роль в выяснении природы ТМ и поэтому в ближайшие годы будет оставаться одной из наиболее актуальных проблем астрофизики. Обнаружение продуктов аннигиляции частиц ТМ (фотонов, нейтрино или заряженных частиц) может в будущем дать важную информацию о свойствах частиц ТМ и разрешить противоречия в данных по прямой регистрации, в связи с чем научная значимость данной проблемы весьма велика.

Ключ к пониманию природы ТМ может дать изучение нелинейных самогравитирующих структур в ранней Вселенной, таких как СТМ, ПЧД и др. Эти структуры могут как сами представлять ТМ, так и влиять на ее распределение, создавая вокруг себя плотные сгущения. В этих сгущениях эффективность аннигиляции частиц ТМ выше, чем в среднем, если ТМ состоит из аннигилирующих частиц. Теоретические расчеты усиления потоков излучения от аннигиляции частиц в СТМ являются одним из главных результатов диссертации.

В последние годы было обнаружено несколько квазаров на больших красных смещениях $z > 6$, высокая светимость которых говорит о наличии ЧД большой массы. Раннюю квазарную активность трудно объяснить в рамках обычных астрофизических сценариев, поскольку они требуют достаточно большого времени. В связи с этим, разработка новых теорий образования сверхмассивных ЧД на больших красных смещениях и их наблюдательная проверка являются актуальными задачами. Представляются перспективными модели с сильно нелинейными структурами – ПЧД и их скоплениями, которые могут образовываться еще на стадии доминирования во Вселенной излучения по различным механизмам и рано эволюционировать в сверхмассивные ЧД.

Другой актуальной проблемой астрофизики является необходимость объяснения наблюдаемого из центра Галактики избытка гамма-излучения. Аннигиляция частиц ТМ может решить эту проблему, и в рамках данной диссертационной работы выполнены исследования по этой теме. Рассмотрены особенности распределения ТМ, обусловленные наличием в центре Галактики сверхмассивной ЧД. Здесь в единой физической ситуации сочетаются как проблема ТМ и

ее аннигиляция, так и вопрос о происхождении сверхмассивных ЧД.

Исследование ПЧД приобрело особую актуальность в связи с регистрацией всплесков гравитационных волн гравитационно-волновым интерферометром LIGO. Наличие гравитационных волн еще раз подтвердило справедливость общей теории относительности в слабых полях, а их источник – слияние ЧД в двойной системе обосновывает существование ЧД и дает проверку теории гравитации в сильных полях. ПЧД, наряду с ЧД звездного происхождения, могут быть непосредственным источником этого сигнала, поскольку они могут формироваться связанными парами или в скоплениях.

Научная новизна и практическая значимость

Научная новизна диссертации заключается в разработке новых подходов и методов исследования и в получении с их помощью ряда новых физических результатов. По теме аннигиляции частиц ТМ были сформулированы и решены ряд оригинальных задач. А именно, впервые были рассмотрены процессы формирования функции масс мелкомасштабных СТМ в процессах раннего иерархического сгущения ТМ с учетом приливных разрушений, и исследована трансформация функции масс СТМ при их последующих столкновениях со звездами в Галактике. Впервые поставлен и решен вопрос о возможности выживания плотных центральных сердцевин СТМ в процессе приливных разрушений внешних частей СТМ. С использованием этих результатов вычислено усиление аннигиляционных сигналов и исследована их анизотропия. Эти результаты могут оказаться полезными для непрямого поиска частиц ТМ. Обоснована модель образования сверхплотных СТМ и найдены их возможные свойства. Установлена связь параметров СТМ с ПЧД при их совместном образовании из единого спектра адиабатических возмущений плотности. Впервые исследована аннигиляция частиц в сверхплотных СТМ. Исследовано образование и выполнен расчет параметров гало из ТМ вокруг ПЧД. Впервые была рассмотрена динамика кластеров ПЧД совместно с динамикой ТМ. Исследованы физические приложения этого сценария для раннего формирования галактик и квазаров, а также выполнен расчет темпа гравитационных всплесков от слияния ПЧД в скопле-

ниях. Исследовано возможное влияние гало ТМ вокруг ЧД в центре Галактики на прецессию звезд, и получены новые аналитические выражения для угла прецессии. Впервые рассмотрены свойства ряда нелинейных гравитационных структур (гравитационных пузырей, ЧД с зарядами на внутренних орбиталях и др.), которые могли образовываться в ранней Вселенной.

Практическая значимость диссертации состоит, во-первых, в том, что разработанные модели и методы могут применяться в последующих работах для расчета свойств СТМ, для изучения процессов их разрушения и для предсказания аннигиляционных сигналов, что, в свою очередь, может помочь в прямом и косвенном методах регистрации частиц ТМ. Полученные результаты могут помочь в интерпретации данных наблюдений, выполняемых в настоящее время на космических гамма-телескопах. Во-вторых, если будет подтверждено существование мелкомасштабных СТМ (через наблюдения аннигиляции частиц ТМ или другими методами), то на основе свойств СТМ можно будет судить о форме спектра возмущений в малых масштабах и о процессах на стадии инфляции, ответственных за генерацию соответствующих возмущений. В частности, можно будет фиксировать параметры в лагранжианах конкретных полевых моделей инфляции. В-третьих, сделанные предсказания о структуре ранних объектов во Вселенной могут помочь в поиске и возможной идентификации этих объектов по данным астрономических наблюдений. В том числе, сделаны конкретные предсказания о всплесках гравитационных волн от столкновений ЧД в скоплениях и о профилях плотности ранних галактик. В-четвертых, расчет угла прецессии звезд может помочь в выявлении распределенной массы вокруг центральной ЧД в центре Галактики. В-пятых, выполненное исследование нелинейных гравитационных структур представляет интерес также с точки зрения разработанных в этой части работы математических методов, которые могут найти применение в других работах.

Структура диссертации

Диссертационная работа состоит из Введения, четырех основных глав, Заключение и списка литературы, включающего 429 наименований.

Во Введении приведена общая характеристика диссертации, ее цель, актуальность, научная новизна. Перечислены положения, выносимые на защиту, описан личный вклад автора в полученные результаты и описана апробация в докладах на научных конференциях. Также перечислены публикации по теме диссертационной работы в рецензируемых журналах и материалах конференций. Кроме того, во Введении дан краткий обзор области исследования.

С 1-й главы начинается основная часть диссертации, в которой описаны формулировки и методы решения поставленных задач и обсуждение полученных результатов. Главным содержанием 1-й главы является рассмотрение различных аспектов формирования и эволюции СТМ в случае стандартного степенного спектра космологических возмущений плотности, нормированных на основе наблюдательных данных по анизотропии реликтового излучения. Выполнен расчет минимальных масс СТМ в модели нейтрально как частицы ТМ. Исследовано формирование функции масс СТМ в процессах раннего иерархического скучивания с учетом их приливных гравитационных разрушений. Исследованы процессы разрушения СТМ в Галактике при взаимодействиях со звездами и найдена функция масс СТМ в современную эпоху. Вычислено усиление аннигиляционного сигнала и его анизотропия по отношению к диску Галактики.

В главе 2 рассматриваются сверхплотные СТМ, образующиеся на космологической стадии радиационного доминирования при условии наличия максимума в спектре возмущений. Разработаны как сферическая, так и несферическая модели нелинейной эволюции адиабатических возмущений и выполнен расчет числа образующихся СТМ. Рассмотрены ограничения на параметры СТМ по эффекту перепроизводства ПЧД. Исследована возможность образования СТМ вокруг замкнутых петель космических струн. Обсуждаются возможности обнаружения сверхплотных СТМ по эффектам аннигиляции частиц (в том числе, сверхтяжелых), по наблюдениям событий гравитационного микролинзирования, а также по возможному возмущающему влиянию пролетов СТМ на детекторы гравитационных волн. Рассмотрен процесс вторичной аккреции ТМ и формирования гало вокруг сверхплотных СТМ, сформулирован критерий окончания аккреции и найдены итоговые характеристики гало.

В 3-й главе рассматривается круг вопросов, посвященных совместным эф-

фектам, обусловленным ТМ и ЧД. Исследовано накопление ТМ вокруг ПЧД в пиках плотности и выполнено сравнение гамма-излучения от аннигиляции частиц ТМ в пиках с данными наблюдений. Рассмотрена модель образования отдельного класса плотных галактик и ранних квазаров вокруг ПЧД и их скоплений. Исследована совместная динамика скопления и ПЧД. В частности, показано, что в моделях со вторичной аккрецией можно объяснить наблюдаемые корреляции между центральными ЧД и дисперсией скоростей в балджах галактик. Рассчитан ожидаемый темп всплесков гравитационных волн от столкновений ПЧД в их скоплениях. Исследована прецессия звезд, обусловленная наличием распределенной ТМ вокруг центральной сверхмассивной ЧД в центре Галактики и исследована аннигиляция ТМ вокруг центральной ЧД.

В главе 4 исследованы нелинейные гравитационные структуры различных типов. В рамках теории конформной гравитации исследованы решения типа “гравитационные пузырей”, а также решения с переменным скаляром кривизны. Выполнено исследование уравнения Дирака в гравитационном поле заряженной ЧД и показано, что внутри ЧД могут существовать стационарные электронные орбитали. Частным случаем является заряженная ЧД с компенсацией ее заряда зарядами противоположного знака на внутренних орбиталях. Обсуждается возможность того, что эти системы составляют ТМ. Исследована аккреция излучения на ПЧД, а именно, задача Вайдья рассмотрена в диагональных координатах и построена глобальная геометрия решений.

В конце дано краткое Заключение и приведен Список литературы, использовавшейся в работе.

Положения, выносимые на защиту

1. На ранней иерархической стадии формирования структур в процессах приливного гравитационного разрушения выживают 0.1 – 0.5 % СТМ в каждом логарифмическом интервале масс $\Delta M/M \sim 1$. Внешние слои СТМ, не разрушившихся на иерархической стадии, затем эффективно разрушаются при гравитационном взаимодействии со звездами гало и диском Галактики. В итоге, доля массы гало Галактики в форме СТМ с мас-

сами $\leq 10^2 M_\odot$ составляет $\sim 3\%$. Однако в галактической окрестности Солнца выживает доля $P \sim 1$ центральных сердцевин СТМ. Эти избежавшие разрушения сердцевины могут являться основными источниками аннигиляционного сигнала. Усиление аннигиляционного сигнала (по сравнению с моделями без СТМ) зависит от спектра первичных космологических возмущений плотности и может достигать примерно одного порядка величины. Данный эффект делает более жесткими ограничения на сечение аннигиляции, следующие из сравнения вычисленного и наблюдаемого гамма-фона.

2. На космологической стадии доминирования излучения возможно формирование сверхплотных СТМ при наличии на малых масштабах локального максимума в спектре возмущений. В случае адиабатических возмущений плотности принципиальную роль в формировании СТМ играет несферичность начальных возмущений. Рост несферичности приводит к дезинтеграции большинства СТМ на стадии их образования. Выживают лишь СТМ, образующиеся из возмущений, форма которых изначально была близка к сферически-симметричной. Однако даже в небольшом количестве СТМ, которые смогли сформироваться, плотность столь велика, что эти объекты могут на несколько порядков усилить аннигиляционный сигнал. Сверхплотные СТМ могут образовываться также вокруг замкнутых петель космических струн и ПЧД. Сравнение с наблюдаемым Fermi-LAT гамма-фоном дают совместное ограничение на свойства частиц ТМ и на источники начальных возмущений плотности. В случае ТМ в форме нейтралитона с массами $m \sim 100 \text{ ГэВ}/c^2$ сравнение расчетов с данными Fermi-LAT допускает сечение аннигиляции $\langle\sigma v\rangle \simeq 10^{-26} \text{ см}^3\text{с}^{-1}$ при пороге рождения ПЧД $\delta_{\text{th}} \geq 1/3$. При величине сечения аннигиляции $\langle\sigma v\rangle \simeq 10^{-26} \text{ см}^3\text{с}^{-1}$ исключается диапазон $0.05 < G\mu/(10^{-8}c^2) < 0.51$ для массового параметра μ космических струн.
3. На догалактической стадии вокруг ПЧД и их скоплений возможно формирование плотных пиков и гало из ТМ. Пики плотности могут являться яркими источниками аннигиляционного гамма-излучения. Сравнение

рассчитанного сигнала с данными Fermi-LAT ограничивает сверху современный космологический параметр плотности ПЧД с массами $M_{\text{ВН}} \geq 10^{-8} M_{\odot}$ величинами от $\Omega_{\text{ВН}} \leq 1$ до $\Omega_{\text{ВН}} \leq 10^{-8}$, в зависимости от массы ПЧД $M_{\text{ВН}}$. Гало вокруг больших ПЧД и их скоплений могут представлять особый класс плотных галактик и ранних квазаров на красных смещениях $z > 6$. В этой модели также можно объяснить наблюдаемые корреляции между массами центральных сверхмассивных ЧД и дисперсией скоростей в балджах галактик. Слияние ПЧД в скоплениях сопровождается всплесками гравитационных волн, поиск таких сигналов дает принципиальную возможность проверки предлагаемых моделей на будущих детекторах гравитационных волн.

4. Исследование свойств нелинейных гравитационных структур различных типов. Если существовал период, когда действовала конформная гравитация, могли рождаться “гравитационные пузыри” и другие объекты, описываемые найденными точными сферически-симметричными решениями уравнений конформной гравитации. В ранней Вселенной могли образовываться заряженные ЧД с электронами на внутренних (под горизонтом Коши) квантовых уровнях. Эти системы могут представлять новый тип частиц-кандидатов ТМ. Исследована глобальная структура пространства-времени в задаче Вайдья.

Личный вклад автора

Автору в большинстве основных работ по теме диссертации принадлежит постановка задач и выполнение основного объема математических вычислений. Автор разработал программы на языке C++, в пакетах Mathematica и Maxima, предназначенные для численного решения задач, вычисления различных выражений и построения графиков. Автором выполнены все расчеты по теме пиков плотности вокруг ПЧД. Вместе с соавторами проводились расчеты взаимодействия нейтралино с фермионами, аккреции вещества на ЧД, прецессии звезд вокруг ЧД, и изучались нелинейные гравитационные структуры.

В частности, вклад автора является определяющим в следующих совмест-

ных работах:

- Вывод и решение кинетического уравнения для исследования процессов кинетического отщепления, свободного разлета нейтрално и вычисления минимальной массы СТМ.
- Постановка задач и расчет процессов приливного разрушения СТМ в иерархических структурах и при взаимодействиях со звездами в Галактике. Автор выдвинул основную идею и выполнил расчеты по теме анизотропии аннигиляционного сигнала.
- Обоснование возможности образования СТМ из адиабатических возмущений плотности на космологической стадии радиационного доминирования. Вывод начальных условий для уравнения нелинейной эволюции из линейной теории роста возмущений и численное решение уравнений. Вывод ограничений по ПЧД на параметры сверхплотных СТМ.
- Разработка формализма, позволяющего учесть нарастание несферичности при эволюции сверхплотных СТМ на радиационно-доминированной стадии (важность учета этого эффекта была указана автору А.Г. Дорошкевичем во время доклада автора на научной конференции).
- Разработка методов расчета совместной гравитационной динамики скопления ПЧД и окружающего его гало ТМ и вычисление профилей плотности получающихся объектов. Расчет темпа всплесков гравитационных волн от столкновений ПЧД в скоплениях.
- Постановка задачи о возможности наличия квантовых орбиталей для заряженных частиц внутри ЧД. Исследование стационарных решений уравнения Дирака в метрике заряженной ЧД Рейснера–Нордстрема. Автором также была предложена идея рассматривать эти ЧД с внутренними зарядами как возможные кандидаты в частицы ТМ.

Публикации по теме диссертационной работы

Полученные по теме диссертационной работы результаты опубликованы в 39 статьях в рецензируемых журналах (в том числе в 3 обзорах) и в 18 трудах и материалах конференций.

Публикации в рецензируемых журналах:

1. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Small-scale clumps in the galactic halo and dark matter annihilation // Phys. Rev. D. 2003. Vol. 68. P. 103003. arXiv:astro-ph/0301551.
2. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Dark Matter Annihilation in Small-Scale Clumps in the Galactic Halo // Ядерная физика. 2004. Т. 67. С. 1217–1219.
3. Berezhinsky V., Dokuchaev V. and Eroshenko Yu. Destruction of small-scale in the hierarchical structures and galaxies // Phys. Rev. D. 2006. Vol. 73. P. 063504. arXiv:astro-ph/0511494.
4. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Dark matter annihilation in the Galaxy // Physics of Atomic Nuclei. 2006. Vol. 69. P. 2068-2077.
5. Березинский В. С., Докучаев В. И. и Ерошенко Ю. Н. Аннигиляция темной материи в Галактике // Известия РАН. Серия физическая. 2007. Т. 71. С. 936-937.
6. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Anisotropy of dark matter annihilation with respect to the Galactic plane // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2007. Vol. 07. P. 011. arXiv:astro-ph/0612733.
7. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Remnants of dark matter clumps // Phys. Rev. D. 2008. Vol. 77. P. 083519. arXiv:0712.3499 [astro-ph].
8. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Small-scale clumps in the Galactic halo // Ядерная физика. 2010. Vol. 73. P. 183-194.

9. Березинский В. С., Докучаев В. И. и Ерошенко Ю. Н. Мелкомасштабные сгустки тёмной материи // УФН. 2014. Т. 184. С. 3–42. arXiv:1405.2204 [astro-ph.HE]. [обзорная статья].
10. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. О едином происхождении нейтральных звезд и сверхмассивных черных дыр // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2002. Т. 121, С. 5-13. arXiv:astro-ph/0202021.
11. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N., Kachelries M., and Solberg M. Aa. Superdense cosmological dark matter clumps // Phys. Rev. D. 2010. Vol. 81. P. 103529. arXiv:1002.3444 [astro-ph.CO].
12. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N., Kachelries M., and Solberg M. Aa. Annihilations of superheavy dark matter in superdense clumps // Phys. Rev. D. 2010. Vol. 81. P. 103530. arXiv:1002.3445 [astro-ph.GA].
13. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Dense DM clumps seeded by cosmic string loops and DM annihilation // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2011. Vol. 12. P. 007. arXiv:1107.2751 [astro-ph.HE].
14. Березинский В. С., Докучаев В. И. и Ерошенко Ю. Н., Кахелрис М., Сольберг М. О. Сверхплотные сгустки темной материи из сверхтяжелых частиц // Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 170. С. 102-109.
15. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Formation of Superdense Dark Matter Lumps at the Radiation-Dominated Cosmological Stage // Gravitation and Cosmology. 2012. Vol. 18. P. 57–60.
16. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Formation and internal structure of superdense dark matter clumps and ultracompact minihaloes // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2013. Vol. 11. P. 059. arXiv:1308.6742 [astro-ph.CO].
17. Березинский В. С., Докучаев В. И. и Ерошенко Ю. Н. Формирование сверхплотных сгустков темной материи // Ядерная физика и инжиниринг. 2013. Т. 4. С. 922–925.

18. Babichev E. O., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Black Hole Mass Decreasing due to Phantom Energy Accretion // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93. P. 021102. arXiv:gr-qc/0402089.
19. Бабичев Е. О., Докучаев В. И. и Ерошенко Ю. Н. Аккреция темной энергии на черную дыру // *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* 2005. Т. 127. С. 597–609. arXiv:astro-ph/0505618.
20. Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Accretion with back reaction // *Phys. Rev. D.* 2011. Vol. 84. P. 124022. arXiv:1107.3322 [gr-qc].
21. E. Babichev, V. Dokuchaev and Yu. Eroshenko. Backreaction of accreting matter onto a black hole in the Eddington–Finkelstein coordinates // *Classical and Quantum Gravity.* 2012. Vol. 29. P. 115002. arXiv:1202.2836 [gr-qc].
22. Бабичев Е. О., Докучаев В. И. и Ерошенко Ю. Н. Чёрные дыры в присутствии тёмной энергии // *УФН.* 2013. Т. 183. С. 1257–1280. arXiv:1406.0841 [gr-qc]. [обзорная статья].
23. Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Non-orientable wormholes as portals to the mirror world // *Phys. Rev. D.* 2014. Vol. 90. P. 024056. arXiv:1308.0896 [gr-qc].
24. Ерошенко Ю. Н. Пики плотности темной материи вокруг первичных черных дыр // *Письма в Астрономический журнал.* 2016. Т. 42. С. 389-398.
25. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Стохастическая модель корреляций между массами центральных черных дыр и дисперсией скоростей в балджах // *Письма в Астрономический журнал.* 2001. Т. 27. С. 883-889. arXiv:astro-ph/0202019.
26. Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Origin of Correlations between Central Black Holes Masses and Galactic Bulge Velocity Dispersions // *Astronomical and Astrophysical Transactions.* 2003. Vol. 22. P. 727-730. arXiv:astro-ph/0209324.
27. Dokuchaev V., Eroshenko Yu., Rubin S. Quasars formation around clusters of primordial black holes // *Grav. Cosmol.* 2005. Vol. 11. P. 99-104. arXiv:astro-ph/041

28. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н., Рубин С. Г. Раннее формирование галактик, инициированное скоплениями черных дыр // *Астрономический журнал*. 2008. Т. 85. С. 867-878. arXiv:0801.0885 [astro-ph].
29. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. и Рубин С. Г. Всплески гравитационных волн от столкновений черных дыр в скоплениях // *Письма в Астрономический журнал*. 2009. Т. 35. С. 163-170. arXiv:1003.4158 [astro-ph.CO].
30. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н., Рубин С. Г. Самарченко Д. А. Механизм подавления черных дыр промежуточных масс // *Письма в Астрономический журнал*. 2010. Т. 36, С. 816–822. arXiv:1010.5325 [astro-ph.CO].
31. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Взвешивание темной материи в центре Галактики // *Письма в ЖЭТФ*. 2015. Т. 101. С. 875-880. arXiv:1508.05725 [astro-ph.HE].
32. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Физическая лаборатория в центре Галактики // *УФН*. 2015. Т. 185. С. 829–843. arXiv:1512.02943 [astro-ph.HE]. [обзорная статья].
33. Berezin V. A., Dokuchaev V. I., and Eroshenko Yu. N. Conformal gravity and gravitational bubbles // *Int. J. Mod. Phys. A*. 2016. Vol. 31. P. 1641004. arXiv:1509.00212 [gr-qc].
34. Berezin V. A., Dokuchaev V. I., and Eroshenko Yu. N. Spherically symmetric conformal gravity and gravitational bubbles // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2016. Vol. 01. P. 019. arXiv:1412.2917 [gr-qc].
35. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Стационарные решения уравнения Дирака в гравитационном поле заряженной черной дыры // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2013. Т. 144. С. 85-91. arXiv:1308.5927 [gr-qc].
36. Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Black Hole Atom as a Dark Matter Particle Candidate // *Advances in High Energy Physics*. 2014. Vol. 2014. P. 434539. arXiv:1403.1375 [astro-ph.CO].

37. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Квантовые уровни электрона в поле заряженной черной дыры // Ядерная физика и инжиниринг. 2014. Т. 5. С. 810–812.
38. Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Quantum electron levels in the field of a charged black hole // Physics of Atomic Nuclei. 2015. Vol. 78. P. 1520-1522.
39. Berezin V. A., Dokuchaev V. I., and Eroshenko Yu. N. On maximal analytical extension of the Vaidya metric // Class. Quantum Grav. 2016. Vol. 33 P. 145003. arXiv:1603.00849 [gr-qc].

Публикации в трудах и материалах конференций:

1. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Dark matter annihilation in small scale clumps // Proceedings 13th Intern. Seminar on High Energy Physics Quarks-2004, Pushkinskie Gory, Russia, May 24-30, 2004 (Eds. V.A. Matveev, V.A. Rubakov, S.M. Sibiryakov, A.N. Tavkhelidze) (Inst. for Nucl. Research, RAS, 2004).
2. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Neutralino annihilation in small-scale galactic halo clumps // Proceedings of the 11th Lomonosov Conf. on Elementary Particle Physics. Particle Physics in Laboratory, Space and Universe. Moscow, Russia 21-27 Aug. 2003 (Ed. Alexander Studenikin) (World Scientific, 2005). P. 92-97.
3. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Small-scale Dark Matter Clumps // Proceedings of the Fifth International Workshop. “The identification of dark matter” Edinburgh, UK 6 - 10 September 2004 (Eds. N.J.C. Spooner, V. Kudryavtsev) (University of Sheffield, UK, 2005). P. 81-86.
4. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Small-scale dark matter clumps in the Galactic halo // Proceedings of the International conference “Problems of Practical Cosmology”, 23-27 June 2008, Sant Peterburg, Russia (Eds. Yu.V. Baryshev, I.N. Taganov, P. Teerikorpi) (Russian Geographical Society, Sant Peterburg, 2008). P. 159-162.

5. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Destruction of dark matter clumps in Galaxy // 15th Intern. Seminar on High Energy Physics QUARKS-2008 Sergiev Posad, Russia, May 23-29, 2008, Труды конф. 2010 г.
6. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Dark matter annihilation in the Galactic halo // Proceedings XL1st Rencontres de Moriond. La Thuile, Aosta Valley, Italy, March 11–18, 2006, *From Dark Halos to Light* (Eds. S. Maurogordato, J.T. Thanh, V.L. Tresse). (The Gi'oi Publishes, Vietnam, 2008). P. 423-424.
7. Dokuchaev V., Berezhinsky V., Eroshenko Yu. Anisotropy of dark matter annihilation and remnants of dark matter clumps in the galaxy // Proceedings 13th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics, “Particle Physics on the eve of LHC”, 23-29 August, 2007, Moscow State University, Moscow (Ed. A.I. Studenikin) (World Scientific, Singapore, 2009). P. 229-236.
8. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Destruction of dark matter clumps in Galaxy // Proceedings of the 15th international seminar Quarks-2008 (Eds. V.A. Duk, V.A. Matveev, V.A. Rubakov) (INR RAS, Moscow 2010) Vol. 1. P. 307-311.
9. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Dark matter annihilation in the Galaxy // Proceedings of the 14th Lomonosov Conf. on Elementary Particle Physics, Moscow State University and JINR (Dubna), Russia, 19-25 August 2009 (Ed. A.I. Studenikin) (World Scientific, 2011). P. 229-231.
10. Babichev E. O., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Accretion of dark energy onto black holes // The Third International Conference “Mathematical Physics and Its Applications”, Samara, August 27 - September 1, 2012 (Eds. I.V. Volovich, V.P. Radchenko) (Samara State Technical University, 2012). P. 47-48.
11. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Dark matter annihilation in the Galaxy // J. Phys.: Conf. Ser. 2013. Vol. 409. P. 012117.

12. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. SUSY dark matter annihilation in the Galactic halo // Proceedings of the 1st International Kaidalov Workshop on the Phenomenology of High Energy Particle Physics, Moscow, 21-25 July 2013, J. Phys.: Conf. Ser. 2015. Vol. 607. P. 012015.
13. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Superdense dark matter clumps from nonstandard perturbations // Particle Physics at the Tercentenary of Mikhail Lomonosov Fifteenth Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics Moscow, Russia, 18 – 24 August 2011, Proceedings. 2013. P. 267-269.
14. Бабичев Е. О., Докучаев В. И. и Ерошенко Ю. Н. Аккреция тёмной энергии на чёрные дыры // Труды Третьей Международной конференции “Математическая физика и её приложения”, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. Т. 2(31). С. 223-227.
15. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Гидродинамическая проходимость кротовых нор // 15-я Российская гравитационная конференция – Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике (RUSGRAV15), Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет (КФУ), 30 июня - 5 июля 2014 г., Материалы конференции под ред. Ю.Г. Игнатьева (Фолиант, Казань, 2014). С. 172-175.
16. Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N., Klimkov K. S. Precession of fast S0 Stars in the vicinity of supermassive black hole in the Galactic Center // Physics Procedia (Fundamental Research in Particle Physics and Cosmophysics). 2015. Vol. 74. P. 292–296.
17. Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Dark matter distribution and annihilation at the Galactic center // Journal of Physics: Conference Series. 2016. Vol. 675. P. 012004.
18. Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Precession of stars in the Galactic center and dark matter annihilation limits // Proceedings of the Twelfth Asia-Pacific International Conference on Gravitation, Astrophysics, and Cosmology, Moscow, 28 Jun – 5 July 2015 (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2016). P. 142-146.

Апробация

Полученные в диссертационной работе основные результаты представлены в форме устных докладов на международных и российских конференциях, а также на научных семинарах. В том числе результаты представлены лично автором на конференциях:

1. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Neutralino annihilation in small-scale galactic halo clumps // 11-я Ломоносовская конференция по физике элементарных частиц, Москва, МГУ, 21-27 августа 2003 г.
2. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Small-scale clumps in the galactic halo // Астрофизика и космология после Гамова - теория и наблюдения. Международная научная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Г.А. Гамова, (Одесса, Украина, 8 - 14 августа 2004 г.).
3. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Small-scale clustering in the galactic halo // Albert Einstein Century International Conference. Palais de l'Unesco, Paris, France, 18-23 July, 2005.
4. Березинский В. С., Докучаев В. И. и Ерошенко Ю. Н. Аннигиляция темной материи в гало Галактики // Всероссийская астрофизическая конф. "Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра 2005 (HEA-2005)", Москва, ИКИ РАН, 26-28 дек. 2005 г.
5. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Formation and destruction of small-scale dark matter clumps in Galaxy // Международная конференция по гравитации, космологии, астрофизике и нестационарной газодинамике (посвященная 90-летию со дня рождения профессора К.П.Станюковича), 1-6 марта 2006 года, Москва, РУДН-МГТУ, Россия.
6. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Dark matter distribution in Galaxy // QUARKS-2006. 14th Intern. Seminar on High Energy Physics St. Petersburg, Russia, 19-25 May, 2006.

7. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I., Eroshenko Yu. N. Anisotropy of dark matter annihilation with respect to the Galactic plane // 13-я Ломоносовская конференция по физике элементарных частиц, 23–29 августа 2007 г., Москва, МГУ.
8. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I., Eroshenko Yu. N. Small-scale dark matter clumps in the Galactic halo // Proc. of the International conference “Problems of Practical Cosmology” held at Russian Geographical Society 23-27 June 2008.
9. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Destruction of dark matter clumps in Galaxy // 15th Intern. Seminar on High Energy Physics QUARKS-2008 Sergiev Posad, Russia, May 23-29, 2008.
10. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. First objects in the Universe // 13-я Российская Гравитационная Конференция. международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике 23-28 июня 2008 г., РУДН, Москва, Россия.
11. Березинский В. С., Докучаев В. И. и Ерошенко Ю. Н. Наблюдательные следствия мелкомасштабной кластеризации темной материи // Всероссийская астрофизическая конференции “Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра - 2008”, ИКИ РАН, Москва 24-26 декабря 2008 г.
12. Dokuchaev V., Berezhinsky V., Eroshenko Yu. Dark matter annihilation in the Galaxy // 14th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics, Particle Physics on the eve of LHC, 19-25 August, 2009, Moscow State University, Moscow.
13. Березинский В. С., Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Мелкомасштабные сгустки темной материи // конференция «Актуальные проблемы внегалактической астрономии», 21-23 апреля 2009 г., Пушчинская радиоастрономическая обсерватория, г. Пушино.
14. Ерошенко Ю. Н. Аннигиляция темной материи в пиках плотности вокруг первичных черных дыр // XXXIII конференция «Актуальные проблемы

внегалактической астрономии», 19-22 апреля 2016 г., Пушинская радиоастрономическая обсерватория, г. Пушино.

15. Eroshenko Yu. N. Annihilation of dark matter in the density spikes around primordial black holes // DAWN – 2016. Dark Ages and White Nights (Spectroscopy of the CMB), Saint Petersburg, 20-24 June, 2016.
16. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Superdense dark matter clumps from superheavy particles // 16th International Seminar on High Energy Physics QUARKS-2010, Kolomna, Russia, 6-12 June, 2010.
17. Березинский В. С., Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Формирование сверхплотных сгустков темной материи на космологической стадии радиационного доминирования // 14-я Российская гравитационной конференция – Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, 27 июня – 2 июля 2011 года.
18. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Superdense dark matter clumps from nonstandard perturbations // 15th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics, Moscow State University, 18 – 24 August, 2011.
19. Березинский В. С., Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Сверхплотные сгустки темной материи // XXIX конференция “Актуальные проблемы внегалактической астрономии”, Пушинская радиоастрономическая обсерватория, г.Пушино, 17-19 апреля 2012 года.
20. Березинский В. С., Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Влияние несферичности начальных возмущений на эволюцию сгустков темной материи // XXX конференция “Актуальные проблемы внегалактической астрономии”, Пушинская радиоастрономическая обсерватория АКЦ ФИАН, Пушино, 8-11 апреля 2013 г.
21. Березинский В. С., Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Мелкомасштабные сгустки темной материи: механизмы формирования и возможные наблюдательные проявления // Доклад на Всероссийской астрономической кон-

ференции «Многоликая Вселенная» (ВАК-2013), 23-27 сентября 2013 г., Park Inn Pulkovskaya, Санкт-Петербург.

22. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Мелкомасштабные сгустки темной материи // Международная сессия-конференция Секции ядерной физики ОФН РАН «Физика фундаментальных взаимодействий», 12-16 ноября 2012 г., НИЯУ МИФИ, г. Москва.
23. Babichev E. O., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Dark energy accretion onto Black Hole // 12-ая Российская гравитационная конференция, Казань, КГПУ, 20-26 июня 2005.
24. Бабичев Е. О., Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Аккреция темной энергии на черные дыры // (E.O. Babichev, V.I. Dokuchaev, Yu.N. Eroshenko 'Accretion of dark energy onto black holes'), The Third International Conference 'Mathematical Physics and Its Applications', Samara, August 27 - September 1, 2012; Editors: I.V. Volovich, V.P. Radchenko, pages 47-48. Samara State Technical University 2012.
25. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Неориентируемые кротовые норы и зеркальная материя // XXXI конференция “Актуальные проблемы внегалактической астрономии”, Пушчинская Радиоастрономическая обсерватория, 22-25 апреля 2014 г.
26. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Гидродинамическая проходимость кротовых нор // 15-я Российская гравитационная конференция – Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике (RUSGRAV15), Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет (КФУ), 30 июня - 5 июля 2014 г.

Семинары с докладами автора проводились в ИЯИ РАН, ФИАНе и в Институте прикладной астрономии РАН.

Также многочисленные доклады с отдельными результатами диссертационной работы делались соавторами научных статей.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность Докучаеву В. И. за многолетнее сотрудничество и всестороннюю помощь. Автор благодарен Бабичеву Е. О., Березинскому В. С., Березину В. А., Дубровичу В. К., Лукашу В. Н. и Рубину С. Г. за совместную работу и многочисленные обсуждения, а также ИЯИ РАН – за создание благоприятных условий для научной деятельности.

Краткий обзор области исследования

Выполненное в рамках диссертационной работы исследование затрагивает ряд аспектов современной астрофизики и космологии, введением в которые могут служить монографии [1–6]. Приведем краткий обзор области исследований, следуя, в основном, нашей обзорной работе [7].

Темная материя

Центральной темой работы является мелкомасштабная кластеризация ТМ, составляющей $\simeq 27\%$ массы Вселенной и называемой иначе “скрытой массой”.

Вывод о наличии во Вселенной ТМ имеет серьезные наблюдательные и теоретические основания. Гравитация ТМ дает объяснение динамике звезд и форме кривых вращения в галактиках, высокой температуры газовых гало в галактиках и скоплениях галактик, а также скоростям движения галактик в малых группах и скоплениях галактик. Влияние ТМ обеспечивает согласие расчетов первичного нуклеосинтеза с наблюдаемой распространенностью химических элементов. С помощью ТМ объясняется устойчивость и спиральная структура галактических дисков. Неоднородности в распределении ТМ проявляются в сильном и слабом гравитационном линзировании [8]. Хотя состав ТМ неизвестен, теория инфляции дает естественную модель генерации возмущений плотности в ТМ, из которых в дальнейшем образовались гало галактик, а к центрам этих гало в потенциальные ямы оседала обычная барионная материя по мере ее охлаждения, что привело к образованию звезд.

Обзор возможных частиц-кандидатов ТМ представлен, например, в [1, 9]. Как наиболее вероятные кандидаты чаще всего рассматриваются слабовзаимо-

действующие массивные частицы — вимпы (WIMPs — weakly interacting massive particles), которые могли рождаться в ранней Вселенной как раз в таком количестве, которое необходимо для объяснения ТМ. Среди вимпов очень популярно нейтралино — легчайшая суперсимметричная частица [10]. К числу других кандидатов относятся стерильные нейтрино [11, 12], аксионы [13], гравитино [14, 15], сверхтяжелые частицы [16–19] и ПЧД [20].

Открытие легкого хиггсовского бозона с массой $m_H \simeq 125$ ГэВ [21], [22] укрепило статус нейтралино как вероятного кандидата в частицы ТМ, поскольку суперсимметрия решает проблему массы бозона Хиггса. Суперсимметричные частицы не обнаружены пока в ЛHC экспериментах ATLAS и CMS, возможно, не потому, что они слишком массивны а из-за слабости их взаимодействия [23]).

Проблема ТМ имеет хорошую перспективу быть решенной уже в ближайшие годы. Частицы ТМ, проходящие сквозь Землю, могут быть обнаружены на существующих и будущих детекторах, либо эти частицы могут быть получены и зарегистрированы на ускорителях.

Прямая регистрация [24, 25] или обнаружение в экспериментах на ускорителях частиц ТМ могут представить наиболее достоверные данные об их природе, однако важны и косвенные методы их поиска по продуктам аннигиляции частиц и на основе других эффектов. Прежде всего, нет гарантии, что частицы ТМ удастся в обозримом будущем зарегистрировать напрямую. В случае же успешной регистрации появятся “прикладные” задачи, связанных с ролью этих частиц в астрофизике, с влиянием продуктов их аннигиляции на состав космических лучей, состояние межзвездной среды и другие процессы. То есть, с уже известными частицами ТМ будут развиваться множество из тех задач, которые сейчас затрагиваются в исследованиях по косвенной регистрации ТМ.

Наиболее перспективным методом косвенной регистрации считается поиск гамма-фотонов от аннигиляции частиц ТМ. Темп аннигиляции пропорционален квадрату концентрации частиц, поэтому сигнал от плотных сгущений ТМ может превышать сигнал от ее диффузной компоненты. Областями повышенной плотности по сравнению со средней плотностью вещества во Вселенной являются гало галактик. Самой далекой из известных галактик в настоящее время является обнаруженная телескопом Хаббла галактика при красном смещении

$z \approx 11,9$. Но в еще более ранние эпохи должны были образоваться протогалактики, похожие на современные карликовые галактики. Характер кластеризации ТМ и время образования этих протогалактик, а также эффективность их слияний и увеличения массы за счет аккреции вещества зависит от спектра космологических возмущений плотности. Считается наиболее вероятным, что возмущения возникли из квантовых флуктуаций на стадии инфляции. Спектр возмущений в больших масштабах был получен из анизотропии реликтового возмущения, измерявшейся недавно на спутниках WMAP [26] и Planck [27].

Сгустки темной материи

Согласно инфляционной теории, спектр первичных возмущений плотности продолжается в гораздо меньшие масштабы, чем масштабы галактик, и ограничен снизу размером космологического горизонта на момент окончания инфляции. Это означает, что задолго до образования галактик могли образовываться СТМ с массами, меньшими массы Солнца.

Сгусток ТМ — это “облако” из движущихся частиц ТМ, удерживаемых вместе силами гравитации, но не падающих на центр масс из-за наличия у частиц ТМ угловых моментов. Сгусток имеет приблизительно сферическую форму и находится в квазиравновесном состоянии, если на него не действуют внешние приливные силы. Сильная перестройка структуры СТМ возможна при гравитационных ударах, происходящих при взаимодействии СТМ друг с другом или со звездами. В некоторых случаях СТМ может захватить внутрь себя другой сгусток или, наоборот, войти в состав сгустка большего масштаба [28].

Для СТМ используют также термины “clumps”, “DM objects”, “haloes”, “mini-haloes”, “microhalos”. Последние три варианта отражают то обстоятельство, что во многих отношениях СТМ являются аналогом больших гало ТМ в галактиках. Если отвлечься от газодинамических процессов, имеющих место в галактиках, то основные процессы образования мелкомасштабных СТМ и гало галактик окажутся по сути одинаковы, различаясь лишь масштабами и формой спектра возмущений на этих масштабах. В области малых масштабов спектр более плоский, что ведет к быстрой агрегации СТМ — их вхождению в состав больших сгустков, при этом времена гравитационного сгущивания порядка характерного времени формирования внутреннего профиля плотности в СТМ.

Напротив, на масштабах галактик сливаются чаще всего объекты с уже сформировавшимся профилем плотности.

Образование и эволюция мелкомасштабных СТМ исследовались во множестве работ [29–46]. Обзоры отдельных аспектов этой проблемы см. в [47], [7].

Спектр масс СТМ начинается с некоторой минимальной массой M_{\min} , которая зависит от характера взаимодействия частиц ТМ с космической плазмой на стадии доминирования излучения [48]. Образование СТМ минимальных масс происходит не за счет слияний других СТМ, а из обособленных возмущений плотности, не имеющих существенных внутренних неоднородностей. Поэтому СТМ с минимальными массами по характеру их формирования можно выделить в отдельный класс СТМ, которые описываются аналитической моделью Гуревича–Зыбина [49], [50], [51].

Предсказываемая величина M_{\min} для нейтралитно менялась в пределах от 10^{-11} до $10^{-3} M_{\odot}$ [35, 37, 40, 52, 53]. Минимальная масса M_{\min} определяется столкновительными и бесстолкновительными процессами сглаживания возмущений плотности [35]. Также на обрезание спектра масс оказывают влияние акустические волны [54] [55] и моды возмущений с размером горизонта [56]. Для сглаживания мелкомасштабных возмущений важны процессы трения между частицами ТМ и космической плазмой, аналогично эффекту Силка [40]. Неопределенности M_{\min} обусловлены наличием свободных параметров в моделях нейтралитно. Для примера выпишем характеристики СТМ с массой $M \sim 10^{-6} M_{\odot}$ в случае степенного начального спектра космологических возмущений с показателем $n_s = 0,96$ и нормировкой на данные по анизотропии реликтового излучения. СТМ в этом случае формируются при $z \sim 60$ (для 2σ возмущений) со средней плотностью $\bar{\rho} = 2.6 \times 10^{-23}$ г см $^{-3}$. Эти СТМ имеют вириальный радиус $R = 8.6 \times 10^{-3}$ пк и внутреннюю дисперсию скоростей частиц $v = 71$ см с $^{-1}$.

Эволюция СТМ происходит в иерархической картине, когда важны слияния СТМ друг с другом и вхождение их в состав больших СТМ. Принципиальную роль в этих процессах являются приливные силы, под влиянием которых на ранних иерархических стадиях разрушается большинство СТМ [33]. СТМ, которые пережили эти стадии, затем теряли массу и разрушались за счет взаимодействия со звездами в галактиках.

Возможно, удастся напрямую зарегистрировать гамма-излучение от аннигиляции частиц ТМ в СТМ. Мелкие СТМ в совокупности должны создавать сплошной гамма-фон, а достаточно крупные СТМ можно в принципе видеть как обособленные источники [57–59], если в будущем сигнал от аннигиляционный удастся выделить над уровнем фона. Аннигиляция частиц ТМ в СТМ рассматривалась, например, в [60–66]. Вклад СТМ в полный аннигиляционный сигнал характеризуется коэффициентом усиления (буст-фактором), который по определению равен отношению полного сигнала с учетом ТМ к сигналу от диффузно распределенной ТМ.

Внутренняя структура сгустков

Для расчетов аннигиляции важен вопрос о внутренней структуре СТМ, особенно в их центральных областях, где аннигиляция частиц ТМ может идти наиболее эффективно ввиду высокой плотности. Теоретические исследования [49], [50], [51] предсказывают степенной профиль плотности гало из ТМ $\rho_{\text{int}}(r) \propto r^{-\beta}$, где $\beta \simeq 1,8 - 2$. Полученные в численных моделированиях профиль Наварро-Френка-Уайта [67] и профиль Мура и др. [68] также имеют расходящуюся плотность в центре. Близкий по форме к изотермическому профиль (1) с $\beta \simeq 2$ был получен в численном моделировании формирования мелкомасштабных СТМ [69]. В [45] было выяснено, что если объект образуется в процессе иерархического сгущивания, то его профиль плотности близок к профилю Наварро-Френка-Уайта. А если объект образуется из обособленного возмущения плотности, то он имеет в центре $\beta \simeq 1,4$. Таким образом, обособленные СТМ, которые не испытывали слияний, с большей точностью соответствуют профилю Гуревича-Зыбина [49], [50], [51].

Модель галактик с плотностью, нарастающей к центру по степенному закону, была разработана в [70], [71] и [72] в теории “вторичной аккреции”. В этом подходе предполагается, что ТМ натекает на центральный компактный объект или “затравочную массу”, которой может быть какое-то компактное сгущение или ЧД. Модель бездиссипативной гравитационной сингулярности [49], [50], [51] также дает степенной профиль плотности, причем в [49], [50], [51] расчеты выполнены методом адиабатических инвариантов в многопоточковой области, позволяющим проследить эволюцию в нелинейной области. Отметим принци-

пиально новое достижение [49], [50], [51] по сравнению с моделью вторичной аккреции. В [49], [50], [51] было показано, что возмущение плотности с изначально гладким профилем под действием собственной гравитации принимает степенной вид без необходимости в затравочной центральной массе:

$$\rho_{\text{int}}(r) = \begin{cases} \rho_c, & r < R_c; \\ \rho_c \left(\frac{r}{R_c}\right)^{-\beta}, & R_c < r < R; \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (1)$$

где R_c — радиус, на котором останавливается нарастание плотности, ρ_c — плотность в центре СТМ, а R — вириальный радиус, т.е. радиус последнего слоя, обособившегося от космологического расширения, $\beta = 1, 7-1, 9$. Через среднюю плотность $\bar{\rho}$ этот профиль при $R_c < r < R$ можно записать в виде

$$\rho_{\text{int}}(r) = \frac{3-\beta}{3} \bar{\rho} \left(\frac{r}{R}\right)^{-\beta}. \quad (2)$$

Поскольку гауссовы первичные возмущения плотности как раз и дают гладкие начальные условия, подход [49], [50], [51] более реалистично описывает формирование СТМ, но слияния объектов в процессе иерархического сгущивания ТМ могут несколько модифицировать профиль плотности (1).

Процессы вириализации, определяющие радиус R , представляют собой перемешивание потоков и неоднородностей ТМ до достижения объектом состояния равновесия. Вириализация происходит благодаря радиальным осцилляциям, присутствию неоднородностей и несферичных движений ТМ. Эти процессы называются “бурной релаксацией” [73], [74]. Нерадиальные движения во время слияния объектов также создают переменный гравитационный потенциал, который ведет к бурной релаксации [75].

В сценарии вторичной аккреции [70–72] вокруг затравочной точечной массы формируется универсальный профиль $\rho \propto r^{-9/4}$. Однако в случае некомпактной центральной массы профиль плотности может быть иным.

Масса гало, образовавшегося по механизму вторичной аккреции, растет со временем, поскольку все более и более удаленные области отделяются от космологического расширения и вириализуются вокруг затравочной массы. Рост гало прекращается в ту эпоху, когда на нелинейную стадию выходят обычные

(образовавшиеся из инфляционных флуктуаций) возмущения плотности ТМ с массами, равными массе рассматриваемого гало [76], [77]. В [78–83] условно (без расчетов) предполагалось, что окончания роста гало происходит при $z \sim 10–30$, когда начинают активно формироваться структуры в ТМ.

По механизму вторичной аккреции могли формироваться галактики и СТМ вокруг ПЧД [76–78, 81, 84]. Аннигиляция ТМ в пиках плотности вокруг ЧД звездного происхождения или образовавшихся в результате коллапсов газовых облаков в ранних гало рассматривалась в [85], а аннигиляция ТМ вокруг ПЧД изучалась в работах [86], [81], [87], [88].

В ряде работ [78–83, 85, 89–94] рассматривались так называемые ультракомпактные минигало, представляющие собой СТМ, образовавшиеся в начале пылевидной стадии эволюции Вселенной из больших возмущений плотности. Ограничения по аннигиляции позволяют ограничить спектр первичных возмущений, из которых формируются СТМ [90] и [91].

Ультракомпактное минигало может сформироваться и вокруг сверхплотного СТМ, который образовался на стадии радиационного доминирования и который в этом случае служит центральным ядром минигало. Для расчета средней плотности центрального СТМ требуется формализм расчета эволюции СТМ на стадии радиационного доминирования [95], [96], [97], [98].

У галактик с малой поверхностной яркостью и карликовых сфероидов наблюдается не сингулярный профиль плотности, а достаточно большая сердцевина с постоянной или медленно нарастающей плотностью. В [99] это объясняется начальной энтропией, связанной с пекулярными скоростями малых возмущений и генерацией энтропии в процессе иерархического сгущивания ТМ. В расчетах [99] начальная энтропия была найдена аналитически, а сгенерированная энтропия взята из численного моделирования методом N -тел, и путем объединения начальной и сгенерированной энтропии были рассчитаны профили плотности гало ТМ галактических масштабов. Учет энтропийных эффектов позволил значительно улучшить согласие теоретического профиля плотности с наблюдаемым.

Численное моделирование крупномасштабной структуры

Численное моделирование методом N -тел в настоящее время оперирует

массивами из $N \sim 10^9$ частиц, достигая разрешения по массе в 3 порядка величины. Моделирование показало, что на масштабе галактик и их скоплений формируются гало с универсальными профилями. Профиль Наварро-Френка-Уайта [67] записывается в виде

$$\rho_{\text{H}}(r) = \frac{\rho_0}{(r/R_s)(1+r/R_s)^2}. \quad (3)$$

Для Галактики $R_s = 20$ кпк и ρ_0 находится из условия $\rho_{\text{H}}(8,5 \text{ кпк}) = 0,3 \text{ ГэВ/см}^3$. Другими профилями являются профиль Мура [68], [100], Эйнасто [101] и Буркерта [102].

В [103] формирование универсального профиля объяснялось конкуренцией процесса динамического трения и приливного обдирания меньших гало, вошедших в состав больших. Динамическое трение стремится сместить мелкие плотные гало к центру содержащего их большого гало, увеличивая плотность в центре, а приливное разрушение ведет к потере массы мелких гало по мере их движения к центру, что приводит к увеличению массы на периферии.

Численное моделирование (см., например, [104]) показали наличие в галактиках субструктур (больших сгустков) вплоть до масштабов $\sim 10^6 M_{\odot}$ динамического разрешения расчетов. Функция масс этих сгустков имеет вид $\propto M^{-1,9}$, причем в центре гало доля сгустков в составе ТМ меньше, чем на периферии. Это объясняется более эффективным разрушением сгустков приливными гравитационными силами в центральных плотных областях гало.

Применительно к большим гало галактик и скоплений было выполнено много детальных численных моделирований, однако маломассивным СТМ в настоящее время посвящены лишь работы [69], [45], [38], [105]. Численное моделирование мелких СТМ не доводится до эпохи формирования галактик. В [45] расчет ограничен интервалом $z \sim 500 - 30$. Это связано с тем, что исследуемая область пространства при $z \sim 30$ уже сама выходит на нелинейный режим. В численном моделировании получено, что функция масс мелкомасштабных (меньше масс звезд) СТМ близка к степенной функции $\propto M^{-1,9}$, полученной ранее для больших субструктур.

В численном моделировании [69] был получен, в частности, внутренний профиль плотности в единичном СТМ минимальной массы, который хорошо

аппроксимируется степенным законом $\propto r^{-\beta}$ с $\beta = 1,5 - 2,0$, что согласуется с теоретическим предсказанием $\beta = 1,7 - 1,8$ [49], [50], [51]. В [105] было получено $\beta = 1,5$. В [45] установлено, что применительно к профилю плотности граница между иерархическим и неиерархическим режимами проходит при $\sim 10^2 M_{\min}$.

В численном моделировании галактик найдена зависимость концентрации $C_{\text{NFW},200} = R_{200}/r_s$ в профиле Наварро-Френка-Уайта (3) от массы гало M в виде $C_{\text{NFW},200} = 8,45 \times (M/10^{12} M_{\odot})^{-0,11}$. Но в работе [45] установлено, что эта зависимость неприменима для СТМ малых масс, для которых хорошим приближением служит более сложная нестепенная зависимость [106]. Если не учесть этого обстоятельства и применять зависимость $\propto M^{-0,11}$ (как это делалось в некоторых работах), то усиление аннигиляционного сигнала можно переоценить на 2-3 порядка [45].

Также в моделировании [45] прослежены каустики в сформировавшихся СТМ, аналогичные каустикам ТМ в моделях [72] и [49], [50], [51]. Согласно [45], присутствие этих каустик может в полтора раза увеличить аннигиляционную светимость СТМ сразу после его формирования, но это усиление уменьшается со временем по мере разрушения каустик при перемешивании ТМ.

Центральная плотность

Одна из нерешенных пока проблем – это величина центральной плотности СТМ или радиус его ядра R_c . Не исключено, что для СТМ с различными массами механизмы формирования ядра могут различаться. Возможно, что строение центральной области СТМ определяется мелкомасштабными неоднородностями внутри формирующегося СТМ. Применительно к галактикам это обсуждалось в рамках энтропийной теории [99, 107]. Из энергетического критерия следует оценка $x_c \equiv R_c/R \simeq \delta_{\text{eq}}^3$, где δ_{eq} – возмущение плотности в момент перехода на стадию доминирования вещества [51]. Для СТМ минимальных масс $\sim 10^{-6} M_{\odot}$, образовавшихся из 2σ пиков ($\delta_{\text{eq}} \simeq 0.013$) в плоском спектре возмущений Гэрисона-Зельдовича, эта оценка дает $x_c \simeq 1,8 \times 10^{-5}$.

В настоящее время численное моделирование имеет довольно малое пространственное разрешение в центральных областях СТМ для того, чтобы выявить сердцевину и определить ее радиус. Единственным примером, когда по-

лучены указание на наличие сердцевин с $x_c \simeq 10^{-2}$, является моделирование [69] (см. Рис. 2 в [69]). Однако в [45, 105] сердцевина не разрешена вплоть до относительного радиуса $x_c \simeq 10^{-3}$. Для прояснения этой проблемы требуются новые численные моделирования с большим разрешением.

Согласно расчетам [34], почти все СТМ в Галактике разрушаются при взаимодействиях со звездами и трансформируются в “минипотоки” ТМ. Характеристики этих минипотоков важны для прямого детектирования частиц ТМ. Однако в [108] было показано, что центральные сердцевинки СТМ как правило выживают в приливных взаимодействиях. Хотя внешние слои СТМ теряются и переходят в минипотоки ТМ, сердцевинки выживают благодаря сохранению адиабатического инварианта и остаются источниками аннигиляционных сигналов. В центральных областях СТМ генерируется основная часть аннигиляционного излучения, поэтому общий аннигиляционный сигнал слабо затрагивается приливным разрушением СТМ [33, 37].

Изменение профиля плотности на этапе формирования СТМ возможно под действием приливных сил со стороны окружающих возмущений. Под их влиянием частицы ТМ приобретают угловые моменты, что ведет к уменьшению плотности в центре СТМ [33, 109–113].

В [114], [115], [116] максимальная плотность в центре СТМ была оценена на основе эффекта аннигиляции частиц ТМ за время, прошедшего с момента t_f образования СТМ:

$$\rho_{\max} \simeq \frac{m}{\langle \sigma v \rangle (t_0 - t_f)}, \quad (4)$$

где t_0 — настоящий момент времени. По этой оценке, центральная плотность уменьшается со временем из-за аннигиляционных потерь частиц. Этот подход предполагает, что орбиты частиц вблизи центра СТМ вновь не заполняются. Значение (4) применялось для расчета аннигиляционного сигнала от ультракомпактных минигало [79–83, 90, 91]. Противоположный случай, в котором рассматривалась компенсацией потерь частиц, был изучен в [114] и [115].

Сверхтяжелые частицы с массами $m \geq 10^{11}$ ГэВ могли рождаться в ранней Вселенной в эпоху рехитинга и играть роль частиц ТМ [16–18, 117, 118]. Если сверхплотный СТМ состоит из сверхтяжелых частиц, то в нем может иметь место эффект “гравитермической катастрофы” [97, 119], который известен в

звездной динамике применительно к шаровым скоплениям.

Кроме стандартного сценария образования СТМ были предложены также модели образования сверхплотных СТМ на стадии доминирования излучения из энтропийных [95, 120] и адиабатических [96] возмущений плотности. Источником энтропийных возмущений могут, в частности, служить ПЧД или петли космических струн. Малое сечение аннигиляции сверхтяжелых частиц ТМ может быть скомпенсировано большой плотностью в сверхплотных СТМ, и в результате возможно наличие аннигиляционных сигналов даже в области сверхвысоких энергий.

Спектр возмущений на малых масштабах

Для формирования СТМ принципиально важна форма спектра возмущений плотности в малых масштабах. От формы спектра зависят свойства СТМ и сама возможность образования. Необходимым условием образования СТМ является наличие неоднородностей ТМ в достаточно ранние эпохи. Структуры образуются из возмущений плотности $\delta(\mathbf{x}, t) = \delta\rho/\bar{\rho} = [\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}]/\bar{\rho}$, которые могут быть адиабатическими (возмущения кривизны), энтропийными (возмущения с постоянной кривизной) или быть смесью тех и других. Согласно наблюдениям анизотропии реликтового излучения, статистическое распределение возмущений с большой точностью является гауссовым и адиабатическими, а вклад энтропийных возмущений, если он есть, не превышает несколько %.

Статистические свойства крупномасштабных структур обычно рассматриваются в рамках двух основных подходов: путем подсчета максимумов поля плотности [121] и в рамках теории Пресса-Шехтера и ее обобщений (см. [28, 122, 123]). Синтез этих подходов предложен в работе [124].

В рамках теории инфляции возмущения кривизны возникают из квантовых флуктуаций скалярного поля (инфлатона). Их величина $|\delta\phi| = H(\phi)/2\pi$, где $H(\phi) = \dot{a}/a$ – параметр Хаббла во время инфляции [2]. Возмущения в момент пересечения горизонта [20]

$$\delta_H \sim M_{\text{Pl}}^{-3} V^{3/2} / (dV/d\phi), \quad (5)$$

где $V(\phi)$ — потенциал скалярного поля.

Простейшие инфляционные модели предсказывают спектр мощности воз-

мущений, близкий к плоскому степенному спектру $P(k) \equiv \delta_k^2 \propto k^{n_s}$ с $n_s \simeq 1$ с небольшим наклоном спектра, который принципиально важен для возможности образования СТМ, поскольку даже небольшой наклон спектра может заметно изменить величину возмущений в малых масштабах. Отличие величины n_s от единицы выражается через параметры медленного скатывания $\varepsilon = (V'/V)^2/(16\pi G)$ и $\eta = (V''/V)/(8\pi G)$:

$$n_s = 1 - 6\varepsilon + 2\eta. \quad (6)$$

А в R^2 -модели Старобинского получено $n_s \simeq 1 - 2/N$, где N – число е-фолдингов до окончания инфляции. Величина n_s теорией инфляции не фиксируется. Общую нормировочную постоянную и n_s находят из наблюдений анизотропии реликтового излучения и подсчетов галактик. Таким образом, наблюдения ограничивают в некотором диапазоне возможные параметры инфляции [125].

Непосредственно после инфляции возмущения имели размеры, много большие размера космологического горизонта, но по мере роста горизонта $\sim ct$ они входят под горизонт. Для исследования возмущений в масштабах $\geq ct$ применяются решения линеаризованных уравнений Эйнштейна [2]. Во время доминирования во Вселенной излучения линейные адиабатические возмущения $\delta \ll 1$ в масштабах меньше горизонта нарастают лишь логарифмически $\delta_k \propto \ln(t/t_i) + const$, а после перехода на пылевую стадию при $t > t_{eq}$ начинается их быстрый степенной рост $\delta_k \propto t^{2/3}$ [126].

Удобно нормировать спектр возмущений кривизны по наблюдательным данным об анизотропии реликтового излучения [2]

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = A_{\mathcal{R}} \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1}, \quad (7)$$

где $k_*/a_0 = 0,002 \text{ Мpc}^{-1}$, $A_{\mathcal{R}} = (2,46 \pm 0.09) \times 10^{-9}$, и $n_s = 0,9608 \pm 0,0080$ согласно данным WMAP [26] и $n_s = 0,9608 \pm 0,0054$ согласно данным Planck [27]. При этом $\Delta_{\mathcal{R}} \simeq 5 \times 10^{-5}$. Если ограничиваться малыми мультиполями, то данные WMAP [26] соответствуют постоянному n_s с точностью $dn_s/d \ln k = -0,019 \pm 0,025$, но учет высоких мультиполей показывает статистически незначительную тенденцию уменьшения n_s в направлении малых масштабов $dn_s/d \ln k = -0,022_{-0,011}^{+0,012}$. Данные Planck [125] также показывают статистически незначительное (на уровне всего $1,5\sigma$) уменьшение $dn_s/d \ln k = -0,0134 \pm 0,0090$. Если

это уменьшение действительно имеет место, то мелкомасштабные СТМ будут формироваться с меньшей вероятностью, чем при постоянном $n_s \approx 0,96$.

С учетом нормировки по реликтовому излучению среднеквадратичная величина возмущения в масштабе горизонта имеет вид [127]

$$\sigma_H(M) \simeq 9,5 \times 10^{-5} \left(\frac{M}{10^{56} \text{ г}} \right)^{\frac{1-n_s}{4}}, \quad (8)$$

откуда видно, что при $n_s < 1$ величина (8) уменьшается с уменьшением массы. Тем не менее, СТМ могут формироваться значительно раньше эпохи формирования галактик благодаря логарифмическому фактору в передаточной функции $T(k)$. Величина возмущений в масштабах $M \leq M_\odot$ в момент t_{eq} перехода на пылевидную стадию [33]:

$$\sigma_{\text{eq}}(M) \simeq 8,2 \times 10^{3,7(n_s-1)-3} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{\frac{1-n_s}{6}} \left[1 - 0,06 \log \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \right]^{\frac{3}{2}}. \quad (9)$$

На малых масштабах не исключены нестандартные спектры возмущений с локальными максимумами. Согласно (5), увеличение δ_H происходит в том случае, если инфляционный потенциал $V(\phi)$ имеет плоский участок $dV(\phi)/d\phi \rightarrow 0$ [20, 128]. СТМ могли формироваться в широком диапазоне масс, если спектр первичных возмущений имеет степенную форму или даже широкий максимум в спектре. Наоборот, если максимум локальный, то СТМ формируются в основном вблизи массы, которая соответствует положению этого максимума, а спектр вне области максимума может оставаться близким к спектру Гаррисона-Зельдовича, см. Рис. 1, и не затрагивать процессы образования галактик.

Максимуму на минимальном масштабе соответствуют СТМ с максимальной плотностью ТМ. Наличие максимумов могло привести также к эффективному рождению ПЧД с узким распределением по массе [20, 129]. Обнаружение таких СТМ или ПЧД могло бы дать информацию об инфляционном потенциале. Другим классом моделей, дающих спектры с максимумами, являются инфляционные модели с несколькими скалярными полями [130, 131]. См. также в [29, 31, 56, 79, 132–134] обсуждение моделей с нестандартными спектрами возмущений. Энтропийные возмущения могут генерироваться в аксионной ТМ и вести к образованию аксионных миникластеров [95, 120, 135]. Сильно несфе-

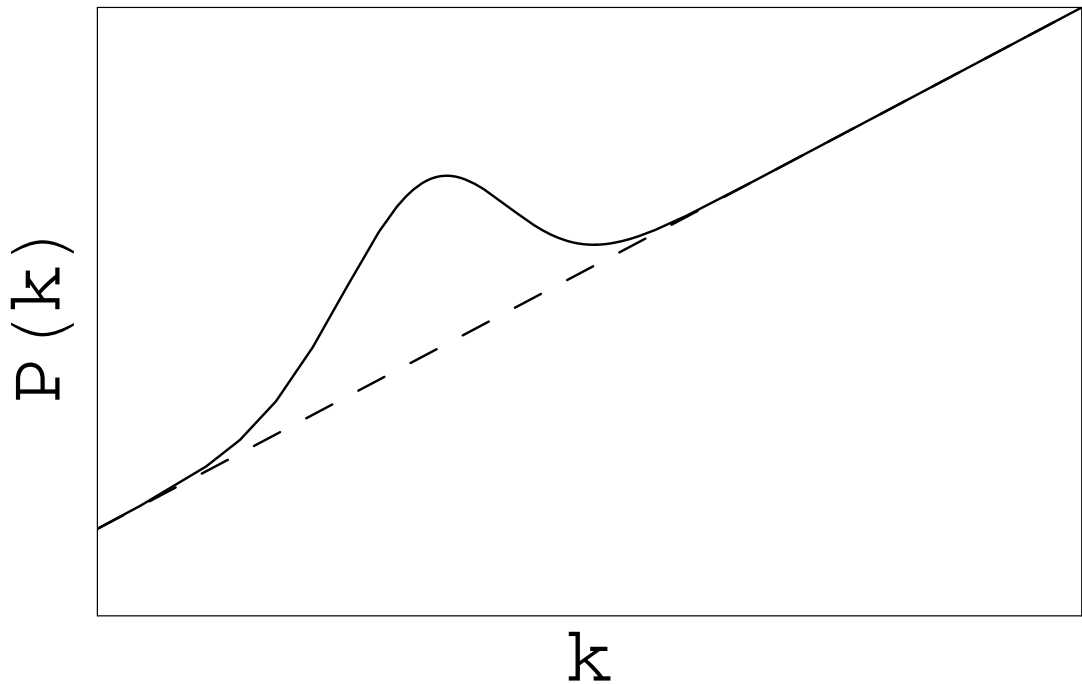


Рис. 1. Схематический вид локального максимума в спектре мощности первичных возмущений плотности.

рические возмущения, имеющие энтропийную природу, могут генерироваться бесконечными космическими струнами или текстурами [136].

Первичные черные дыры

Возможность образования ПЧД предсказана в работах [137], [138]. ПЧД могут дать ценную информацию о процессах в ранней Вселенной [139], [140], [141], в том числе, о возмущениях в малых масштабах [142]. Квантовое испарение ПЧД важно для исследования процессов при высоких энергиях [143], для теории первичного нуклеосинтеза и для гамма-астрономии. ПЧД могут играть роль при образовании квазаров на больших z [144] и для ранних объектов с особенностями химического состава [145], [146]. ПЧД могут оказывать влияние на эволюцию нейтронных звезд [147]. ПЧД могли формироваться за счет коллапса адиабатических возмущений плотности в момент пересечения возмущением космологического горизонта [148], а также на ранних пылевидных стадиях [149], [150] или при коллапсах доменных стенок [151], [152], [153].

ПЧД могут сами представлять всю ТМ [20], если они образуются в достаточно большом числе, но ПЧД также могут служить затравками для образования СТМ [154], [155], [78], [89], [86], [81].

Пороговое возмущение $\delta_{\text{th}} = 1/3$, приводящее к образованию ПЧД, найдена аналитическим путем в [148]. Численные расчеты [156, 157] подтверждают это значение, но указывают на более сложный характер гравитационного коллапса. Позже в численных экспериментах было обнаружено явление критического гравитационного коллапса [158, 159], когда масса ПЧД $M_{\text{BH}} = AM_{\text{H}}(\delta_{\text{H}} - \delta_{\text{th}})^\gamma$, где $A \sim 3$, $\gamma \simeq 0,36$, $\delta_{\text{th}} \simeq (0,65 \div 0,7)$. Эта масса может быть меньше M_{H} , хотя распределение ПЧД сконцентрировано вблизи $M_{\text{BH}} \sim M_{\text{H}}$ [160].

Доля массы Вселенной, которая трансформируется в ПЧД в момент времени t_{H} равна [148]

$$\beta = \int_{\delta_{\text{th}}}^1 \frac{d\delta_{\text{H}}}{\sqrt{2\pi}\Delta_{\text{H}}} \exp\left(-\frac{\delta_{\text{H}}^2}{2\Delta_{\text{H}}^2}\right) \simeq \frac{\Delta_{\text{H}}}{\delta_{\text{th}}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta_{\text{th}}^2}{2\Delta_{\text{H}}^2}\right), \quad (10)$$

где $\Delta_{\text{H}} \equiv \langle \delta_{\text{H}}^2 \rangle^{1/2}$, а современный параметр плотности ПЧД $\Omega_{\text{BH}} \simeq \beta a(t_{\text{eq}})/a(t_{\text{H}})$. Эти соотношения позволяют получить ограничения на Δ_{H} на основе наблюдательных ограничений на ПЧД [140, 148, 157]. Ограничения на спектр возмущений, в свою очередь, дают ограничения параметры образующихся СТМ.

Из ограничения на возраст Вселенной следует самое простое и надежное ограничение $\Omega_{\text{BH}} \leq 1$. Если ПЧД составляют преобладающую часть ТМ в Галактике, то они должны сталкиваться с шаровыми скоплениями, разрушая их. В [161] из этого эффекта получены ограничения $M_{\text{BH}} \leq 10^4 M_{\odot}$. При $\Omega_{\text{BH}} \sim 1$ ПЧД искажают спектр реликтового излучения, если они рождаются после момента ~ 1 сек аннигиляции e^+e^- пар [148]. Аккреция на ПЧД вещества дает вклад в фоновые излучения [162], и отсюда получено $\Omega_{\text{BH}} \leq 10^{-3} \div 10^{-1}$ для $M_{\text{BH}} \sim 10^5 M_{\odot}$. В [163] из отсутствия достоверных событий линзирования космических гамма-всплесков получено ограничение $\Omega_{\text{BH}} < 0.1$ для $10^5 M_{\odot} < M_{\text{BH}} < 10^9 M_{\odot}$. Более строгое ограничение по линзированию $\Omega_{\text{BH}} < 0.01$ при $10^6 M_{\odot} < M_{\text{BH}} < 10^8 M_{\odot}$ следует из наблюдений компактных радиоисточников [164]. Другие ограничения приведены в работе [140].

Формирование ПЧД происходит на хвосте гауссова распределения флуктуаций, а большинство СТМ образуются из флуктуаций порядка среднеквадратичной величины $\delta \sim \Delta_{\text{H}}$. Поэтому не каждая флуктуация, из которой возник СТМ, могла в момент пересечения горизонта t_{H} сколлапсировать в ПЧД. Из-за

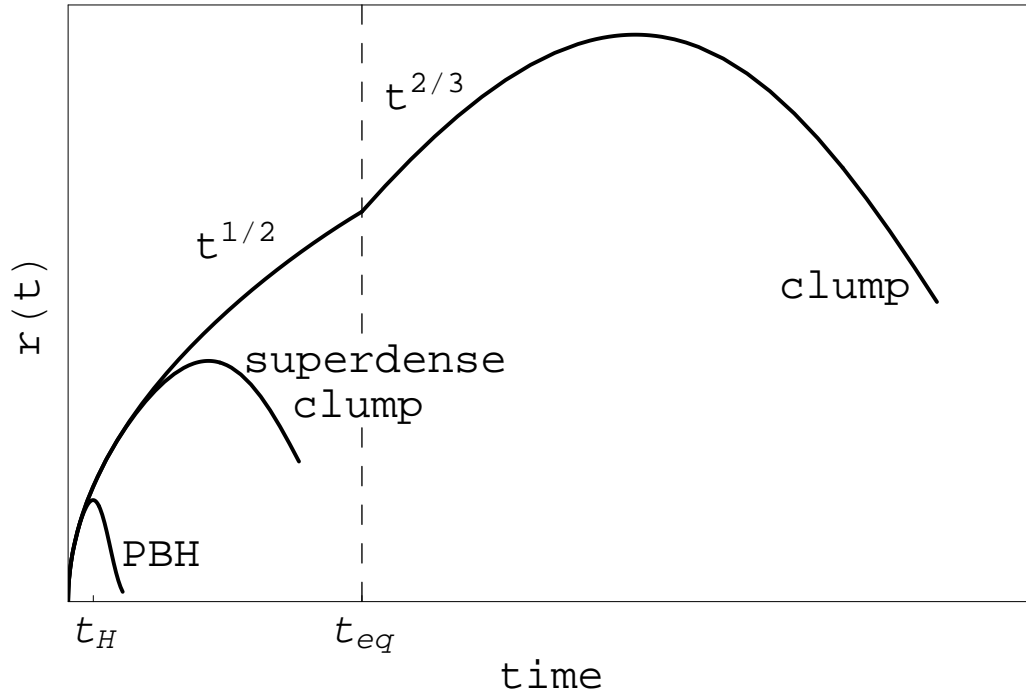


Рис. 2. Различные варианты эволюции радиуса СМ в зависимости от величины возмущения плотности. Возмущения, превосходящие пороговое значение, быстро коллапсируют в ПЧД после момента пересечения горизонта t_H . Если величина возмущения недостаточна для рождения ПЧД, но СМ стал самогравитирующим на стадии доминирования излучения ($t < t_{eq}$), то формируется сверхплотный сгусток. СМ с меньшими плотностями рождаются при $t > t_{eq}$.

высокого порога рождения ПЧД большая часть флуктуаций не коллапсировала, а продолжала эволюционировать, см. Рис. 2.

Раннее образование галактик и квазаров

Происхождение свехмассивных ЧД в центрах галактик пока не выяснено, хотя обсуждалось множество процессов, в результате которых могли бы родиться свехмассивные ЧД. Эта проблема стала более острой с открытием квазаров с красным смещением $z > 6$ [165]. Красное смещение $z = 6.41$ имеет квазар, эддингтоновская светимость которого соответствует аккреции газа на ЧД с массой $3 \times 10^9 M_\odot$ [166]. Раннее образование ЧД с массой $\sim 10^9 M_\odot$ является проблемой для галактических моделей образования ЧД, предполагающих коллапс центральных звездных скоплений в галактических ядрах [168–170], коллапсы свехмассивных звезд и газовых дисков [171, 172], слияния ЧД звездных масс [173, 174] и последующие слияния галактических ядер. Эти астро-

физические сценарии предсказывают достаточно позднее время формирования сверхмассивных ЧД. Поэтому сценарии с массивными догалактическими ПЧД, [137, 148, 153, 175, 176] стали актуальными. Эти ПЧД могут быть центрами конденсации барионной материи [177], а также ТМ [76] с последующим образованием протогалактик отдельного класса.

Эффективный механизм рождения массивных ПЧД и их кластеризации был предложен и развит в работах [153, 179, 180], где рассматривался лагранжиан скалярного поля с потенциалом типа “мексиканская шляпа с наклоном”. Было выяснено, что свойства формирующихся скоплений ПЧД сильно зависят от величины начальной фазы и от масштаба нарушения симметрии в начале инфляции, что приводит к существенным вариациям распределения по скоплениям ПЧД по их массам. Массивные скопления могли приводить к раннему образованию квазаров [144], а менее массивные скопления могут быть ответственны за сверхмассивные ЧД в структурированных галактиках.

Гравитационные пузыри и другие нелинейные гравитационные объекты

Помимо СТМ, ПЧД и топологических дефектов в ранней Вселенной могли образовываться и нелинейные структуры иного рода, в том числе (в случае неэйнштейновской гравитации), чисто гравитационной природы без материи.

История конформной теории гравитации начинается в 1918 г. со статьи Н. Weyl [181]. Его целью было построение единой теории электромагнитного и гравитационного поля. Поскольку общая теория относительности успешно прошла несколько наблюдательных проверок, отпала необходимость в более сложных теориях, дающих дифференциальные уравнения четвертого порядка. Интерес к конформной гравитации возник снова в 1989 г. после работы Р. D. Mannheim and D. Kazanas [182]. Они получили статическое сферически-симметричное решение, зависящее от трех произвольных параметров, которое обобщает решение Шварцшильда в общей теории относительности и могло бы объяснить кривые вращения галактик без ТМ [183, 184]. Вскоре Р. D. Mannheim показал [185], что вакуумные решения конформной гравитации допускают решение де Ситтера без космологической постоянной. Р. D. Mannheim нашел также множество других интересных приложений конформной гравитации (см.,

например, обзор [186, 187] и ссылки в нем). Причинная структура статического сферически-симметричного вакуумного решения в конформной гравитации исследовано в работе [188]. Специальная модификация вейлевской конформной гравитации было предложено недавно в работе [189]. Космологические теории с конформными симметриями перспективны в квантовой теории поля [190].

Вакуумное пространство-время является хорошим кандидатом для рождения Вселенной “из ничего” [191]. Идея того, что начальное состояние Вселенной было конформно-инвариантным, также обосновывалось Р. Пенроузом [192, 193] и G. 't Hooft [194]. Рождению безмассовых частиц напоминает волну детонации и выглядит как горение вакуума [195]. Я.Б. Зельдович показал [196] (см. также [197, 198]), что процесс рождения частиц ведет к изотропизации Вселенной, даже если эволюция начинается с сильно анизотропного (однородного) начального состояния Казнеровского типа. Однако проблемой является отсутствие изотропных и однородных решений в конформной гравитации, за исключением вакуумных. Это противоречие преодолевается путем принятия во внимание не только тензора энергии-импульса уже рожденных частиц, но также квантовыми поправками, появляющимися благодаря поляризации вакуума и наличию следовой аномалии [197, 199–201].

Другой класс нелинейных объектов, рассматриваемых в диссертации, – это “атомарные черные дыры”. Идея “атомарных черных дыр” имеет длительную историю с несколькими вариациями. М.А. Марков и др. предложили и детально исследовали модель максимонов (иначе называемых фридмонами) [202–205]. Эти объекты являются частицеподобными гравитационными объектами (полузамкнутыми мирами) с массами, близкими к планковской массе $M_{Pl} = \sqrt{\hbar c/G} \approx 10^{-5}$ г. Они могут иметь большой гравитационный дефект массы. Фридмоны в их связи с элементарными частицами рассматривались в [206]. Максимоны интересны с точки зрения их космологической роли, в частности, потому что они имеют свойства элементарных частиц и могут служить частицами ТМ. Возможная роль максимонных кластеров в космологии рассматривалась в [207]. Идея микро-ЧД, несущих электрический заряд и имеющих электроны или протоны на внешних орбитах (вне горизонта) обсуждалась С. Хоукингом [138]. Он впервые предположил, что заряженные ЧД могут играть роль,

аналогичную атомным ядрам. Позже идея атомарных ЧД была исследована в работах [208–210]. Возможным механизмом рождения таких ЧД с планковскими массами является образование стабильных остатков на конечных стадиях испарения первичных ЧД, см. например [204, 205, 211]. Остатки испарившихся ЧД могут играть роль частиц ТМ [139, 212–215].

Также представляет интерес аккреция излучения на ПЧД. Метрика Вайдья, описывающая радиальную аккрецию, имеет астрофизические и теоретические приложения. В частности, она описывает аккрецию излучения на ПЧД, применяется для описания квантового испарения ЧД [216–223] или излучения астрофизических объектов [224–228]. Существует, однако, проблема интерпретации результатов, полученных в этой метрике, поскольку она записана через координаты (r, v) , в которых v не является непосредственно физически измеримой переменной. В некоторых простых случаях можно найти формулы перехода к дважды нулевым координатам (v, u) [230], но переход к физическим диагональным координатам представляет математические трудности, и явный вид соответствующего преобразования неизвестен [231]. В работе [232] развивается метод получения координатных преобразований от координат метрики Вайдья (r, z) к диагональным координатам в случае линейной массовой функции. Метрика Вайдья (4.167) с линейной массовой функцией уже рассматривалась в множестве работ в различных аспектах [216, 217, 233, 234], но не были получены решения в диагональных координатах. Как известно, исходная метрика Вайдья геодезически не полна. Одно из расширений было сделано В. Израэлем [235] для глобальной геометрии вечного пространства-времени с бесконечными последовательностями черных и белых дыр. В работах [218, 236] строились дополнительные области пространства-времени, а в работах [229, 237, 238] предполагались специальные массовые функции. В работе [232] были введены новые диагональные координаты, что позволило выявить глобальную структуру пространства-времени в задаче Вайдья с линейной массовой функцией и построить конформные диаграммы Картера-Пенроуза.

Глава 1

Сгустки темной матери (случай стандартных возмущений плотности)

1.1. Сгустки минимальных масс

Хотя спектр возмущений, генерируемых на стадии инфляции, может тянуться до микроскопических масштабов, существуют эффекты, которые на более поздних этапах эволюции Вселенной приводят к подавлению возмущений в малых масштабах и, тем самым, препятствуют образованию СТМ с малыми массами. Вычислению минимально возможной массы M_{\min} было посвящено несколько работ, и результаты различных расчетов различались на несколько порядков величины даже в сходных предположениях о природе частиц ТМ.

Проиллюстрируем сначала на примере эффекта “свободного разлета” (free streaming), почему возникает обрезание спектра со стороны малых масс. Частицы холодной ТМ при высоких температурах $T > T_f \sim 0.05m$, где m – масса частицы ТМ, находятся в химическом равновесии с космической плазмой, когда их концентрация определяется только температурой. После закалки (см. [1]) при $T < T_f$, частицы ТМ остаются некоторое время в кинетическом равновесии с плазмой, при этом температура частиц T_χ равна температуре плазмы T , но концентрация n_χ определяется концентрацией при закалке и расширением Вселенной. На этой стадии частицы ТМ не полностью связаны с космической плазмой. Столкновения между частицами ТМ и быстрыми частицами окружающей плазмы приводят к обмену импульсами и пространственной диффузии частиц ТМ. Благодаря диффузии, частицы ТМ покидают мелкомасштабные возмущения и, таким образом, возникает обрезание спектра на массе M_D .

Когда время релаксации частиц ТМ по энергии τ_{rel} становится больше хаббловского времени $H^{-1}(t)$, частицы ТМ выходят из равновесия. Эти условия определяют время кинетического отщепления t_d . При $t \geq t_d$ частицы ТМ двигаются в режиме свободного разлета, и все возмущения сглаживаются в

масштабе

$$\lambda_{\text{fs}} = a(t_0) \int_{t_d}^{t_0} \frac{v(t') dt'}{a(t')} \quad (1.1)$$

и в меньших масштабах. Здесь $a(t)$ – масштабный фактор расширяющейся Вселенной и $v(t)$ – скорость частицы ТМ в эпоху t . Для нерелятивистской частицы $v(t) \propto 1/a(t)$. Соответствующая минимальная масса в момент t_0

$$M_{\text{fs}} = \frac{4\pi}{3} \rho_\chi(t_0) \lambda_{\text{fs}}^3 \gg M_D. \quad (1.2)$$

В масштабах, много меньших горизонта, для описания физики явлений достаточно нерелятивистского уравнения Больцмана. В начале этого раздела мы выполним расчеты в рамках уравнения Больцмана, следуя работе [33], а затем укажем, в каких ситуациях важны релятивистские эффекты.

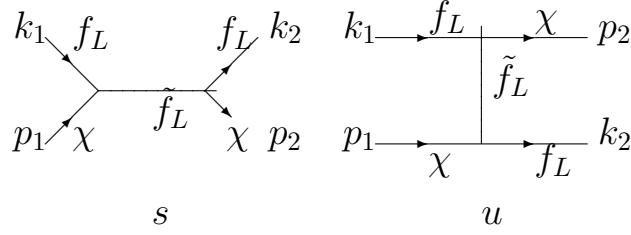
1.1.1. Кинетическое отщепление частиц темной материи

В данном разделе исследуется процесс кинетического отщепления частиц ТМ от космической плазмы. Предварительно приведем сечения рассеяния частиц на фермионах. Это сечение модельно зависимо. Предполагаем, что частицами ТМ являются нейтралино и в качестве нейтралино будем рассматривать чистое бино ($\chi = \tilde{B}$). Лагранжиан взаимодействия бино с левой и правой компонентой фермиона f [10]

$$\mathcal{L}_{f\tilde{f}\chi} = -g\sqrt{2} \tan \theta_W (e_f - T_{3f}^L) \bar{f} P_R \chi \tilde{f}_L + g\sqrt{2} \tan \theta_W e_f \bar{f} P_L \chi \tilde{f}_R, \quad (1.3)$$

где g – константа связи SU(2), θ_W – угол Вайнберга ($\sin^2 \theta_W = 0.231$), e_f – электрический заряд фермиона f в единицах заряда электрона, T_{3f}^L – проекция слабого изоспина для f_L , $P_R = 1/2(1 + \gamma_5)$ – проекция оператора, который обрезает левую компоненту оператора \bar{f} в (1.3); \tilde{f}_L – левый сфермион. Первый член в лагранжиане (1.3) равен $\mathcal{L}_{f_L \tilde{f}_L \chi}$, второй – $\mathcal{L}_{f_R \tilde{f}_R \chi}$. Когда f является ультрарелятивистским в системе покоя нейтралино, то интерференция рассеяний левых и правых компонент фермионов отсутствует (интерференционные члены пропорциональны m_f). Поэтому вычислим сечение $f\chi$ отдельно для левых f_L и правых f_R фермионов.

Рассеяние левого фермиона с $e_f = -1$ и $T_{3f} = -1/2$ (т. е., e, μ, τ) на бино описывается следующими двумя диаграммами в s - и u -каналах



Стандартные вычисления матричных элементов дают:

$$|M_s|^2 = \frac{1}{2}(g \tan \theta_W)^4 \frac{(k_1 p_1)(k_2 p_2)}{(s - \tilde{m}_L^2)^2}; \quad (1.4)$$

$$|M_u|^2 = \frac{1}{2}(g \tan \theta_W)^4 \frac{(p_1 k_2)(k_1 p_2)}{(s - \tilde{m}_L^2)^2}; \quad (1.5)$$

$$M_s M_u^* = -\frac{1}{4}(g \tan \theta_W)^4 \frac{m^2(k_1 k_2)}{(s - \tilde{m}_L^2)(u - \tilde{m}_L^2)}. \quad (1.6)$$

Из этих выражений получаем $|M|^2 = |M_s|^2 + |M_u|^2 + 2\text{Re}(M_s M_u^*)$. Сечение для рассеяний $f_L + \chi \rightarrow f_L + \chi$ на углы θ_{12} в системе покоя нейтралино

$$\left(\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega}\right)_{f_L \chi} = \frac{1}{64\pi^2 s} |M|^2 = \frac{\alpha_{\text{e.m.}}^2}{8 \cos^4 \theta_W} \frac{\omega^2(1 + \cos \theta_{12})}{(m^2 - \tilde{m}_L^2)^2}, \quad (1.7)$$

где $\omega \gg m_f$ – энергия фермиона f_L в системе покоя нейтралино, m – масса нейтралино, и \tilde{m}_L – масса левого сфермиона.

Рассмотрим теперь рассеяние $f_R + \chi \rightarrow f_R + \chi$, описываемое вторым членом в (1.3). Диаграммы идентичны приведенным выше с заменой $f_L \rightarrow f_R$ и $\tilde{f}_L \rightarrow \tilde{f}_R$. Поскольку следы не меняются, когда $P_L \rightarrow P_R$, выражения (1.4)-(1.6) остаются теми же самыми, изменяясь только посредством константы связи, которая увеличивается вдвое (см. (1.3)). Таким образом, получаем

$$\left(\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega}\right)_{f_R \chi} = 16 \left(\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega}\right)_{f_L \chi}, \quad (1.8)$$

при условии, что $m_L = \tilde{m}_R$, где \tilde{m}_L и \tilde{m}_R – масса левого и правого сфермиона, соответственно. Мы интересуемся процессами рассеяния $\nu + \chi \rightarrow \nu + \chi$ и $e + \chi \rightarrow e + \chi$. В первом случае сечение дается выражением (1.7), а в последнем – суммой

$f_L + \chi \rightarrow f_L + \chi$ и $f_R + \chi \rightarrow f_R + \chi$ рассеяний, т. е. оно в 17 раз больше, чем (1.7). Мы будем использовать \tilde{m} как для левых, так и для правых электронов и нейтрино и $\tilde{M}^2 = \tilde{m}^2 - m^2$.

Изучим процессы выхода частиц ТМ из кинетического равновесия с космической плазмой в формализме кинетического уравнения (см. описание этого метода в [239]). Следуя [126], вводим функцию распределения частиц $f(x, p, t)$ по сопутствующим координатам \mathbf{x} и импульсам $\mathbf{p} = ma^2\dot{\mathbf{x}}$ (определенный так импульс постоянен у свободно движущейся частицы). Плотность ТМ

$$\rho(x, t) = \frac{m}{a^3} \int d^3p f(x, p, t) = \bar{\rho}_\chi(t)(1 + \delta(x, t)). \quad (1.9)$$

Кинетическое уравнение с интегралом столкновений Фоккера-Планка [240]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_i}{ma^2} \frac{\partial f}{\partial x_i} - m \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} = D_p(t) \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{p_i}{mTa^2} f + \frac{\partial f}{\partial p_i} \right), \quad (1.10)$$

где ϕ – гравитационный потенциал, которым в рассматриваемую эпоху $t \leq t_{\text{eq}}$ можно пренебречь, $T(t)$ – температура плазмы

$$t = \frac{2.4}{\sqrt{g_*}} \left(\frac{T}{1 \text{ МэВ}} \right)^{-2} \text{ с}, \quad (1.11)$$

где g_* – число степеней свободы, а $D_p(t)$ – коэффициент диффузии в пространстве импульсов. Обозначим концентрацию релятивистских фермионов или бозонов с одной поляризацией и с энергией ω как

$$n_0(\omega) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\omega^2}{e^{\omega/T} \pm 1}, \quad (1.12)$$

Согласно [240],

$$D_p(t) = \frac{g_f}{3} \int d\Omega \int d\omega n_0(\omega) \left(\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} \right)_{fL\chi} (\delta p)^2, \quad (1.13)$$

где множитель $g_f = 40$ в (1.13) получается из подсчета степеней свободы при нейтрально-фермионных столкновениях: три нейтрино и антинейтрино (или ν_L^c в случае майорановского нейтрино) дают 6, e_L и e_L^c дают 2 и два правых (синглетных) состояния для e^- и e^+ дают 34, поскольку их сечение в 17 раз больше.

Уравнение (1.10) с коэффициентом диффузии (1.13) совпадает с уравнением (16) работы [239] за исключением численного коэффициента ~ 1 в D_p .

Рассмотрим выход нейтралино из кинетического равновесия (отщепление) в однородной Вселенной, когда членом $\partial/\partial x_i$ в (1.10) можно пренебречь. Температура газа нейтралино T_χ определяется как

$$\int p_i p_j f d^3 p = \bar{\rho}_\chi a^5 T_\chi(t). \quad (1.14)$$

Умножая уравнение (1.10) на $p_i p_j$ и интегрируя по $d^3 p$, получаем

$$\frac{dT_\chi}{dt} + 2\frac{\dot{a}}{a}T_\chi - \frac{2D_p(t)}{ma^2} \left(1 - \frac{T_\chi(t)}{T(t)}\right) = 0. \quad (1.15)$$

Начальное условие $T_\chi(t_i) = T(t_i)$ для уравнения (1.15) может быть выбрано в произвольный момент t_i из интервала $t_f < t_i \ll t_d$. Решение уравнения (1.15) имеет следующий вид

$$\frac{T_\chi(t)}{T_d} = \frac{1}{\tau} \left(\tau_i^{-1/2} e^{1/4\tau^2 - 1/4\tau_i^2} + \frac{1}{2} e^{1/4\tau^2} \int_{\tau_i}^{\tau} dx x^{-5/2} e^{1/4x^2} \right), \quad (1.16)$$

где введена безразмерная переменная $\tau = t/t_d$ и по определению

$$t_d = 3.5 \times 10^{-5} \left(\frac{m}{100 \text{ ГэВ}} \right)^{-1/2} \left(\frac{\tilde{M}}{1 \text{ ТэВ}} \right)^{-2} \left(\frac{g_*}{10} \right)^{-3/4} \text{ с}, \quad (1.17)$$

$$T_d = 150 \left(\frac{m}{100 \text{ ГэВ}} \right)^{1/4} \left(\frac{\tilde{M}}{1 \text{ ТэВ}} \right) \left(\frac{g_*}{10} \right)^{1/8} \text{ МэВ}. \quad (1.18)$$

Асимптотика решения (1.16) имеет вид $T_\chi/T_d = \tau^{-1/2}$ при $\tau \ll 1$ и $T_\chi/T_d = \tau^{-1} \Gamma(3/4)/2^{1/2}$ при $\tau \gg 1$. Из решения (1.16) можно видеть, что переход от кинетического равновесия нейтралино с релятивистскими фермионами к неравновесному режиму происходит очень быстро. По этой причине оправдано рассмотрение диффузии отдельно от свободного разлета.

Оценить момент времени t_d и температуру T_d кинетического отщепления нейтралино можно также из простого условия

$$\frac{1}{\tau_{\text{rel}}} \simeq H(t), \quad (1.19)$$

где $H(t) = 1/(2t)$ – постоянная Хаббла и $\tau_{\text{rel}}(T)$ – время релаксации по энергии при температуре электрон-нейтринного газа T . Время релаксации τ_{rel} определяется рассеяниями нейтралино на фермионах ν_L , e_L и e_R . Нейтралино может

быть рассмотрено в состоянии покоя, поскольку его система покоя совпадает с системой центра масс с точностью $\sqrt{T/m}$. Пусть δp – импульс, приобретаемый нейтралино в одном рассеянии:

$$(\delta p)^2 = 2\omega^2(1 - \cos \theta), \quad (1.20)$$

где ω и θ , соответственно, энергия и угол рассеяния фермиона. Тогда для времени релаксации τ_{rel} можно записать

$$\frac{1}{\tau_{\text{rel}}} = \frac{1}{E_k} \frac{dE_k}{dt} = \frac{gf}{2E_k m_\chi} \int d\Omega \int d\omega n_0(\omega) \left(\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} \right)_{fL\chi} (\delta p)^2, \quad (1.21)$$

где $E_k \simeq (3/2)T$ – средняя кинетическая энергия нейтралино, и $(d\sigma_{\text{el}}/d\Omega)_{fL\chi}$ дается выражением (1.7). После интегрирования в (1.21) получаем

$$\frac{1}{\tau_{\text{rel}}} = \frac{40\Gamma(7)\alpha_{\text{e.m.}}^2 T^6}{9\pi \cos^4 \theta_W \tilde{M}^4 m}. \quad (1.22)$$

Используя (1.11), из (1.19) получаем выражения (1.17) и (1.18).

1.1.2. Диффузионное обрезание спектра возмущений

Рассмотрим (1.10) до кинетического отщепления $t \ll t_d$. Можно найти первые два момента, сначала интегрируя (1.10) по $d^3 p$, а затем по $p_i d^3 p$. Подставляя первое получившееся выражение во второе, получаем следующее уравнение для фурье-компонент:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2\frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} + D_p(t) \frac{1}{m\Gamma a^2} \frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{k_i k_j}{\bar{\rho}_\chi a^7 m} \int p_i p_j f d^3 p. \quad (1.23)$$

Правая часть (1.23) имеет тензорный вид

$$\frac{1}{\bar{\rho}_\chi a^7 m} \int p_i p_j f d^3 p = E\delta_{ij} + Fk_i k_j, \quad (1.24)$$

где изотропная часть $E = T_\chi \delta_k / a^2 m$ для любого τ , в то время как F зависит от времени t . В пределе $\tau \ll 1$ мы можем положить $F = 0$ и пренебречь первым и вторым членами в (1.23). В результате получим диффузионное уравнение в сопутствующей системе отсчета

$$\frac{\partial \delta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{D(t)}{a^2(t)} \Delta_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x}, t) \quad (1.25)$$

с коэффициентом диффузии

$$D = \frac{3\pi \cos^4 \theta_W \tilde{M}^4}{40\Gamma(6)\alpha_{\text{e.m.}}^2 T^5}. \quad (1.26)$$

Коэффициент диффузии $D(t)$ зависит от времени через $T(t)$. В [239] был исследован только этот диффузионный предел кинетического уравнения (1.10).

Коэффициент диффузии можно было бы вычислить, используя метод, описанный в [240] (§12). Рассмотрим нейтралينو, движущееся с нерелятивистской скоростью \mathbf{v} . В системе покоя этой частицы распределение по импульсам релятивистских фермионов анизотропно:

$$n(\mathbf{p}) d^3p = \frac{d\Omega_\alpha p^2 dp}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{p(1+v \cos \alpha)/T} + 1}, \quad (1.27)$$

где α – угол между \mathbf{v} и импульсом налетающего фермиона. Передача импульса в одном рассеянии равна $\mathbf{p}(1 - \cos \theta)$ после усреднения по азимутальным углам. Соответствующая сила трения, испытываемая нейтралино, равна

$$\mathbf{f}_r = g_f \int d\Omega_\theta \int d^3p n(\mathbf{p}) \left(\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega_\theta} \right)_{f_i \chi} \mathbf{p} (1 - \cos \theta) = -B^{-1} \mathbf{v}, \quad (1.28)$$

где B – подвижность частицы. И тогда коэффициент диффузии (1.26) находится из выражения $D = BT$

Обратимся теперь к решению диффузионного уравнения (1.25). Вычислим минимальную массы в спектре возмущений, обусловленную диффузией нейтралино из области возмущения. Решение уравнения (1.25) для фурье-компонент

$$\delta_{\mathbf{k}}(t) = \delta_{\mathbf{k}}(t_f) \exp \left\{ -k^2 C g_*^{5/4} \tilde{M}^4 \left(t^{5/2} - t_f^{5/2} \right) \right\}, \quad (1.29)$$

где $C = \text{const}$. Множитель $C g_*^{5/4} \tilde{M}^4 (t^{5/2} - t_f^{5/2})$ перед k^2 в (1.29) – это квадрат диффузионной длины $\lambda_D^2(t)/a^2(t)$ в сопутствующих координатах. Эта величина определяет минимальную массу в спектре возмущений плотности, обусловленную диффузией нейтралино из флуктуации:

$$M_D = \frac{4\pi}{3} \rho_\chi(t_d) \lambda_D^3(t_d) = 4.3 \times 10^{-13} \left(\frac{m}{100 \text{ ГэВ}} \right)^{-15/8} \left(\frac{\tilde{M}}{1 \text{ ТэВ}} \right)^{-3/2} \left(\frac{g_*}{10} \right)^{-15/16} M_\odot. \quad (1.30)$$

Вид функциональной зависимости (1.29) и численное значение (1.30), полученное в диффузионном приближении, совпадают с соответствующим выражением, полученным другим методом в [239]. Однако итоговая M_{\min} определяется не эффектом диффузии частиц, а их свободным разлетом.

1.1.3. Свободный разлет

В случае $\tau \gg 1$, т. е. после кинетического отщепления, (1.10) принимает простой вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_i}{ma^2} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad (1.31)$$

с решением

$$f \propto \exp \left[\frac{ik_j p_j}{ma_d} g(t) \right], \quad (1.32)$$

где

$$g(t) = a(t_d) \int_{t_d}^t \frac{dt'}{a^2(t')}. \quad (1.33)$$

Решение (1.32) с хорошей точностью справедливо и при $\tau \geq 1$, потому что, согласно (1.16), кинетическое отщепление происходит очень быстро. Предполагая, что распределение по импульсам в момент отщепления является максвелловским

$$f(t_d) = (2\pi T_d m a_d^2)^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{p^2}{2T_d m a_d^2} \right\}, \quad (1.34)$$

и интегрируя произведение (1.32) и (1.34) по $d^3 p$, получаем

$$n_{\mathbf{k}}(t) = n_{\mathbf{k}}(t_d) e^{-(1/2)k^2 g^2(t) T_d / m_\chi}, \quad (1.35)$$

т. е., до момента t за счет свободного разлета сглаживаются все возмущения в физическом масштабе

$$\lambda_{\text{fs}}(t) = a(t) g(t) \left(\frac{T_d}{m_\chi} \right)^{1/2}. \quad (1.36)$$

Этот масштаб соответствует СТМ минимальных масс

$$M_{\text{fs}}(t) = \frac{4\pi}{3} \rho_\chi(t) \lambda_{\text{fs}}^3(t), \quad (1.37)$$

где $\rho_\chi(t) = \rho_{\text{eq}} a_{\text{eq}}^3 / a^3(t)$. В эпоху доминирования излучения $M_{\text{fs}}(t)$ растет логарифмически со временем. Этот рост насыщается в эпоху доминирования вещества. Интегрирование в (1.33) производится с использованием $a(t)$ из решений уравнений Фридмана [241]

$$a(\eta) = a_{\text{eq}} \left[2 \frac{\eta}{\eta_*} + \left(\frac{\eta}{\eta_*} \right)^2 \right], \quad (1.38)$$

$$t = a_{\text{eq}} \eta_* \left[\left(\frac{\eta}{\eta_*} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\eta}{\eta_*} \right)^3 \right].$$

В этих выражениях $\eta_*^{-2} = 2\pi G \rho_{\text{eq}} a_{\text{eq}}^2 / 3$, a_{eq} – величина масштабного фактора в момент t_{eq} , $\rho_{\text{eq}} = \rho_{m,0} (1 + z_{\text{eq}})^3$, $1 + z_{\text{eq}} = 2.35 \times 10^4 \Omega_m h^2$ и $\rho_{m,0} = \rho_{c,0} \Omega_m$. Наличие космологической постоянной Λ влияет только на величину ρ_{eq} и практически не затрагивает эволюцию $M_{\text{fs}}(t)$, поскольку вклад Λ в полную космологическую плотность пренебрежимо мал при малых t . В итоге получаем:

$$M_{\text{min}} = \frac{\pi^{1/4}}{2^{19/4} 3^{1/4}} \frac{\rho_{\text{eq}}^{1/4} t_d^{3/2}}{G^{3/4}} \left(\frac{T_d}{m} \right)^{3/2} \ln^3 \left\{ \frac{24}{\pi G \rho_{\text{eq}} t_d^2} \right\}. \quad (1.39)$$

Используя (1.17) и (1.18), получаем численно

$$M_{\text{min}} = 1.5 \times 10^{-8} \left(\frac{m}{100 \text{ ГэВ}} \right)^{-15/8} \left(\frac{\tilde{M}}{1 \text{ ТэВ}} \right)^{-3/2} \left(\frac{g_*}{10} \right)^{-15/16} \left(\frac{\Lambda^*}{83} \right)^3 M_\odot, \quad (1.40)$$

где Λ^* – логарифм из (1.39).

Итак, мы рассмотрели два процесса сглаживания космологических возмущений в газе нейтралينو. Первый процесс – диффузия нейтралино из-за рассеяний на нейтрино, электронах и позитронах. Этот процесс является эффективным до тех пор, пока нейтралино находятся в кинетическом равновесии с космической плазмой. До момента отщепления t_d все возмущения с массами $M < M_D \simeq 10^{-13} - 10^{-12} M_\odot$ сглаживаются. Второй процесс – это свободный разлет нейтралино. Начинаясь позже, при $t > t_d$, он сглаживает возмущения большего масштаба с $M \leq M_{\text{fs}}$ и определяет M_{min} (формула (1.40)) в распределении СТМ в современную эпоху.

На процесс свободного разлета можно посмотреть с иной точки зрения как на отображения начальных координат частиц в текущие координаты (этот

лагранжев подход развит в работах Я.Б. Зельдовича и его коллег). После момента кинетического отщепления t_d нейтралينو движется свободно на расширяющемся фоне $a(t)d\mathbf{x} = \mathbf{v}(t)dt$, где \mathbf{x} сопутствующая координата частицы. Координаты \mathbf{x} в момент t определяются начальными координатами \mathbf{q} и скоростью \mathbf{v}_d в момент кинетического отщепления t_d :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}_d, t) = \mathbf{q} + \int_{t_d}^t \frac{\mathbf{v}(t') dt'}{a(t')} = \mathbf{q} + g(t)\mathbf{v}_d, \quad (1.41)$$

где $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_d a(t_d)/a(t)$ для нерелятивистской частицы. Теперь для концентрации нейтралино в точке \mathbf{x} имеем

$$\begin{aligned} n(\mathbf{x}, t) &= \int d^3 v_d \phi(\mathbf{v}_d) \sum_{\mathbf{q}_*} n(\mathbf{q}_*, t_d) \left| \frac{D\mathbf{f}}{D\mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_*} \\ &= \int d^3 v_d \phi(\mathbf{v}_d) \int d^3 q n(\mathbf{q}, t_d) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}_d, t)), \end{aligned} \quad (1.42)$$

где $\delta^{(3)}$ – дельта-функция Дирака, $D\mathbf{f}/D\mathbf{q}$ – якобиан, и $\phi(\mathbf{v}_d)$ – распределение нейтралино по скоростям в момент t_d . Суммирование в (1.42) идет по всем корням \mathbf{q}_* уравнения $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}_d, t)$ из (1.41). В сумме фактически имеется лишь один член, потому что функция $f(\mathbf{q}, \mathbf{v}_d, t)$ в (1.41) однозначна. Из (1.41) и (1.42) мы находим фурье-компоненту (1.35) и последующие результаты.

1.1.4. Сравнение с результатами других исследований

В приведенных выше расчетах предполагалось, что все рассматриваемые масштабы (в том числе, масштаб свободного разлета) меньше размера горизонта в момент кинетического отщепления t_d . Это действительно так для широкой области параметров суперсимметрии, когда $T_d \geq 50$ ГэВ и, соответственно $M_{\text{fs}} \ll 10^{-5} M_\odot$, согласно (1.39). Однако, часто рассматривают параметры суперсимметрии, дающие меньшую величину T_d [108]. В этом случае важны эффекты, характерные для масштаба горизонта, такие как акустические колебания и эффект Силка. Эти эффекты обрезают спектр возмущений на большей массе и поэтому становятся определяющими для вычисления M_{min} .

В работе [56] было исследовано влияние акустических колебаний вблизи момента пересечения горизонта на спектр возмущений плотности ТМ. Соответ-

ствующая масса

$$M_{\min} \simeq 10^{-4} \left(\frac{T_d}{10 \text{ МэВ}} \right)^{-3} M_{\odot}, \quad (1.43)$$

имеет порядок массы внутри горизонта в момент кинетического отщепления.

Вычисления Бертшингера [40] существенно дополняют результаты [56]. В [40] были получены выражения для температуры отщепления и минимальной массы:

$$T_d = 7.65 C^{-1/4} g_*^{1/8} \left(\frac{m}{100 \text{ ГэВ}} \right)^{5/4} \text{ МэВ}, \quad (1.44)$$

$$M_{\min} = 7.59 \times 10^{-3} C^{3/4} \left(\frac{m\sqrt{g_*}}{100 \text{ ГэВ}} \right)^{-15/4} M_{\odot}, \quad (1.45)$$

с безразмерной постоянной

$$C = 256 (G_F m_W^2)^2 \left(\frac{\tilde{m}^2}{m^2} - 1 \right)^{-2} \sum_L (b_L^4 + c_L^4), \quad (1.46)$$

где G_F – константа связи Ферми, b_L и c_L – левые и правые киральные величины, и m_W , \tilde{m} и m – масса W -бозона $G_F m_W^2 = 0.0754$, слептона, нейтралино, соответственно, и число степеней свободы в эпоху отщепления $g_* = 43/4$. Вычисления в [33] величины C , которая связана с квадратом матричного элемента для $l + \chi \rightarrow l + \chi$ -рассеяний, отличаются от (1.45) множителем 1.6. Согласно (1.45), кинетическое отщепление при сделанном в [40] типичном выборе параметров суперсимметрии наступает при температуре $T_d = 22.6$ МэВ, т. е. после аннигиляции во Вселенной мюонов и антимюонов, но до аннигиляции e^+e^- , причем аннигиляция e^+e^- в небольшой степени модифицирует спектр возмущений [40]. Масса (1.45), как и в работе [56], по порядку величины близка к массе внутри горизонта в момент отщепления.

Величины T_d и M_{\min} , как они приведены в [33, 35, 55, 56], сильно различаются, но значительный вклад в это отличие происходит из различия использованных величин m_χ и \tilde{m} . Чтобы увидеть отличие, которое может быть отнесено к различным механизмам сглаживания возмущений, мы сначала пересчитаем T_d и M_{\min} с теми же значениями m и \tilde{m} , для которых мы использовали 100 и 200 ГэВ, соответственно. Результаты представлены в Таблице 1.1. Из Таб. 1.1 видно приемлемое согласие в величинах T_d и M_{\min} , и возрастание

height	Reference:	[55] ¹⁾	[33] ¹⁾	[35] ²⁾	[56] ³⁾	[40] ⁴⁾
	T_d , МэВ	28	26	25	20	22.6
	M_{\min}/M_{\odot}	2.5×10^{-7}	1.7×10^{-7}	1.5×10^{-6}	1.3×10^{-5}	8.4×10^{-6}

Таблица 1.1. Величины температуры отщепления T_d и минимальная масса СТМ M_{\min} с $m = 100$ ГэВ и $\tilde{m} = 200$ ГэВ для различных механизмов сглаживания: ¹⁾свободный разлет, ²⁾ столкновительное сглаживание, ³⁾ акустические осцилляции, ⁴⁾ квазисвободный разлет с трением.

m	\tilde{m}	T_d	M_{\min}
100 ГэВ	200 ГэВ	22.6 МэВ	$8.4 \times 10^{-6} M_{\odot}$
100 ГэВ	1500 ГэВ	196 МэВ	$1.3 \times 10^{-8} M_{\odot}$
800 ГэВ	1600 ГэВ	305 МэВ	$3.5 \times 10^{-9} M_{\odot}$

Таблица 1.2. Величины T_d и M_{\min} для сценария Бертшингера [40] затухания возмущений и трех сценариев из работы [242]

M_{\min} от $2.5 \times 10^{-7} M_{\odot}$ для свободного разлета до $\sim 10^{-5} M_{\odot}$ для колебательного затухания и квазисвободного разлета с трением.

Теперь мы рассмотрим диапазон предсказаний для различных параметров суперсимметрии, допустимых в космологии. Для этого мы будем использовать суперсимметричные сценарии из работы [242], которые согласуются с данными Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) и другими космологическими данными. Эти сценарии получены в mSUGRA модели. Величины T_d и M_{\min} перечислены в Таблице 1.2. Предсказываемый диапазон параметров для M_{\min} из этой Таблицы: $3.5 \times 10^{-9} - 8.4 \times 10^{-6} M_{\odot}$ не столь жесток. Он был получен в mSUGRA предположениях о возможной универсальности параметров суперсимметрии (SUSY) m_0 , $m_{1/2}$ и A_0 . При ослаблении ограничения по универсальности, масса нейтралино может возрасти до масштабов ТэВ (посредством $m > 200$ ГэВ необходимость в тонкой настройке меньше, чем 1% в SUSY [243] или уменьшается до нескольких ГэВ [244]).

1.1.5. Минимальная масса M_{\min} для сверхтяжелых нейтралино

Современная распространенность тепловой ТМ Ω_m зависит от сечения аннигиляции частиц σ_{ann} примерно следующим образом $\Omega_m \propto 1/\sigma_{\text{ann}}$. Более то-

го, унитарность ограничивает сечение аннигиляции как $\sigma_{\text{ann}} \propto m^{-2}$ и поэтому наблюдаемая величина [245] $\Omega_m h^2 = 0.1$ ТМ ограничивает сечение аннигиляции значением $\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle \sim 3 \times 10^{-26} \text{см}^3/\text{с}$ и ограничивает массу частиц ТМ как $m \leq 50$ ТэВ [246]. Таким образом ТМ имеет хорошие шансы для обнаружения как в прямых и непрямых измерениях, так и на ускорителях.

Предположение, что ТМ была в химическом равновесии, однако, не является необходимым и не выполняется для достаточно тяжелых частиц. Сверхтяжелые частицы могут генерироваться в конце стадии инфляции и исполнять роль частиц ТМ [16, 17]. Их распады могут давать сигнал в виде гамма-фотонов сверхвысоких энергий [16] и нейтралино [247], если эти частицы метастабильные и долгоживущие.

Возможность не прямой регистрации сверхтяжелых частиц ТМ зависит от темпа их аннигиляции $\dot{N}_{\text{ann}} \propto (\rho/m)^2 \langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle$. Поскольку фоновые излучения, такие как космические лучи от астрофизических источников или диффузный поток фотонов, уменьшается лишь как $1/E^\alpha$, где $\alpha \leq 3$, то не прямая регистрация частиц ТМ выглядит все более и более трудной задачей по мере перехода к большим массам. Единственная возможность, где преодолевается эта трудность, – это формирование сверхплотных центральных областей в СТМ [248].

В качестве частиц-кандидатов ТМ мы будем рассматривать нейтралино в модели сверхтяжелой суперсимметрии [18]. Найдем (см. подробности в [97], [119]) сначала момент времени t_d и температуру T_d , при которых происходит кинетическое отщепление, т. е. темп релаксации τ_{rel}^{-1} сравнивается с $H(t_d)$. При исследовании условия отщепления $\tau_{\text{rel}}^{-1} \simeq H$, мы полагаем $N_{\text{eff}} = 431/4 = 107.75$ – число степеней свободы в Стандартной модели при $T > m_t$, а также мы используем бегущую константу связи и параметры смешивания при температуре T , полученные из Стандартной модели, $\sin^2 \theta_W(T) = 1/6 + 5\alpha(T)/[9\alpha_s(T)]$. Для $M_{\text{SUSY}} = 10^{12}$ ГэВ получаем

$$T_d \simeq \begin{cases} 2 \times 10^{11} \text{ ГэВ}, & \text{бино} \\ 2 \text{ ГэВ}, & \text{хиггсино} \end{cases} \quad (1.47)$$

для температуры отщепления для бино и хиггсино. В первом случае $g_* = 298/4$ и $N_{\text{eff}} = 66$.

При температуре (1.47) соответствующие массы (2.38) составляют

$$M_d \simeq \begin{cases} 6 \times 10^{-12} \text{ г}, & \text{бино} \\ 6 \times 10^{21} \text{ г}, & \text{хиггсино.} \end{cases} \quad (1.48)$$

В случае бино масса M_d лишь в 34 раза превышает массу частицы $m \sim 10^{11} \text{ ГэВ} = 1.78 \times 10^{-13} \text{ г}$.

Масштаб и масса свободного разлета λ_{fs} для сверхтяжелых частиц ТМ очень малы. В случае бино, принимая во внимание (1.47), находим время отщепления $t_d = 7 \times 10^{-30} \text{ с}$ и $M_{\text{fs}} \simeq 4.6 \times 10^{-11} \text{ г}$. Эта величина всего лишь в 260 раз больше массы частицы. Таким образом, масса свободного разлета сверхтяжелых частиц определяет завал спектра масс. Формально возможны все массы, начиная с $M \geq 260m$. В случае с хиггсино $M_{\text{fs}} \ll m$, и свободный разлет не играет роли в процессе эволюции возмущений.

1.2. Формирование функции масс сгустков в процессах раннего иерархического сгущивания с учетом приливных разрушений

Первые гравитационно связанные объекты из ТМ во Вселенной – это СТМ с некоторой минимальной массой M_{min} . СТМ больших масштабов формируются позже. СТМ больших масштабов могут содержать внутри себя более мелкие СТМ, и в свою очередь эти СТМ захватываются внутри следующих более масштабных СТМ. Наибольшая часть мелкомасштабных СТМ разрушается приливными гравитационными силами, возникающими внутри содержащих их хозяйских (host – хост) СТМ. На малых масштабах иерархическое сгущивание – это быстрый нелинейный процесс. Формирование новых СТМ и их захват в состав больших СТМ происходят практически одновременно, потому что показатель степени спектра возмущений в малых масштабах близок к критической величине $n \rightarrow -3$. СТМ еще не полностью вириализуются в ту эпоху, когда они захватываются внутри хозяйских СТМ. Адиабатические инварианты не препятствуют разрушению ядер СТМ на этой стадии, т.к. недостаточно времени для формирования сингулярного профиля плотности в СТМ (внутреннее дина-

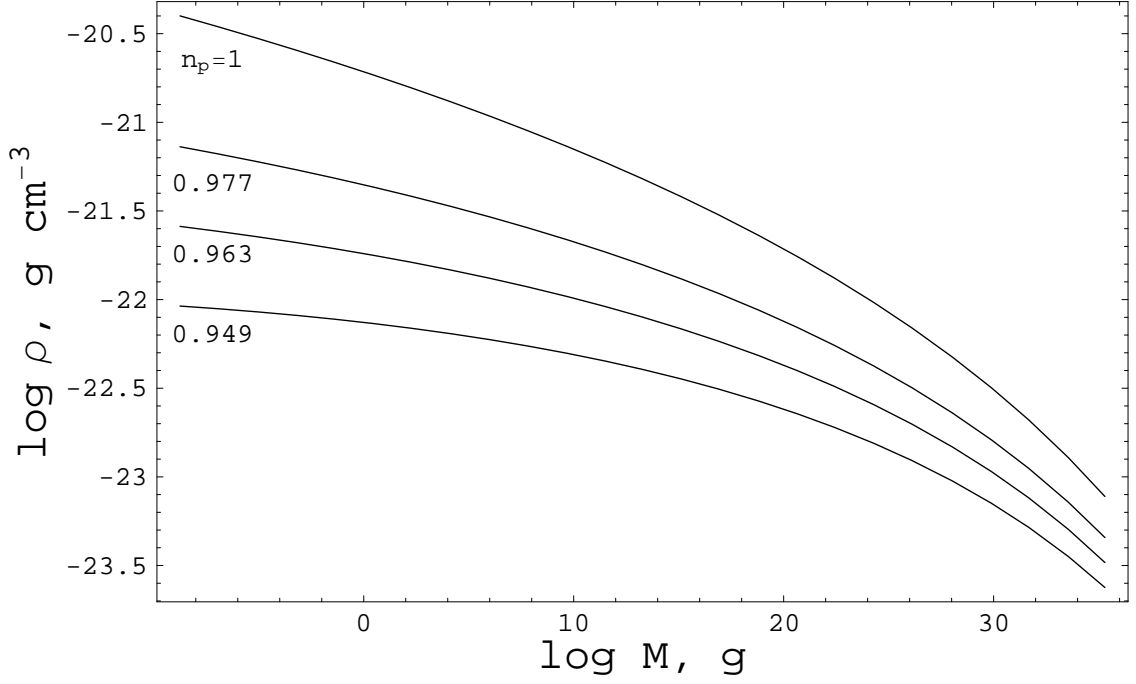


Рис. 1.1. Средняя плотность ρ СТМ в зависимости от массы СТМ M для различных показателей степени n_p спектра первичных возмущений. Расчет выполнен в рамках простой сферической модели для пылевидной стадии. Предполагается, что спектр не обрезан со стороны малых масс и возможны любые массы СТМ.

мическое время СТМ того же порядка, что и время его захвата в хост-СТМ). Методика вычисления функции масс СТМ при их быстром иерархическом сгущении была разработана в [33], [37].

Опишем кратко метод вычисления параметров СТМ. Обозначим $\delta_c = \delta_{\text{eq}}(t_c/t_{\text{eq}})^{2/3} = 3(12\pi)^{2/3}/20 \simeq 1.686$, где t_c – момент сжатия сферического слоя в точку (однако, раньше этого формального момента происходит вириализация). Критерий образования СТМ в сферической модели имеет вид $\delta = \delta_c$, а плотность вириализованного объекта в $\kappa = 18\pi^2 \simeq 178$ раз больше средней плотности Вселенной [28]. Таким образом, в рамках обсуждаемого здесь формализма средняя плотность $\bar{\rho}_{\text{int}}$ и радиус R образующихся СТМ составляют

$$\bar{\rho}_{\text{int}} = \kappa \bar{\rho}(t_c) = \kappa \rho_{\text{eq}} \left(\frac{1+z_c}{1+z_{\text{eq}}} \right)^3 = \kappa \rho_{\text{eq}} \frac{\nu^3 \sigma_{\text{eq}}^3(M)}{\delta_c^3}, \quad (1.49)$$

$$R = \left(\frac{3M}{4\pi \bar{\rho}_{\text{int}}} \right)^{1/3}, \quad (1.50)$$

$\sigma_{\text{eq}}(M)$ – среднеквадратичное возмущение и $\nu = \delta_{\text{eq}}/\sigma_{\text{eq}}(M)$ – высота пика воз-

мущений плотности в единицах среднеквадратичных возмущений. Учитывая, что на пылевидной стадии $a \propto t^{2/3}$, из (1.49) получаем момент формирования СТМ со средней плотностью $\bar{\rho}_{\text{int}}$: $t = (\kappa\rho_{\text{eq}}/\bar{\rho}_{\text{int}})^{1/2}t_{\text{eq}}$.

Найдем в рамках этой модели характерные параметры СТМ в предположении спектра возмущений (9). Допустим формально, что возможно формирование СТМ с любыми массами. Тем самым мы не конкретизируем модель частиц ТМ, от которой зависит минимальная масса. На Рис. 1.1 показана средняя плотность ρ СТМ в зависимости от массы СТМ M для различных показателей степени n_p спектра первичных возмущений.

1.2.1. Приливные процессы

Приливное разрушение СТМ является сложным процессом, зависящим от множества факторов: истории формирования СТМ, профиля плотности более крупного хост-сгустка, содержащего рассматриваемый СТМ внутри себя, от других субструктур внутри хоста, орбитальных параметров СТМ в хосте и др. Только в численном моделировании все эти факторы могут быть учтены достаточно полно. Первое моделирование мелкомасштабных областей было выполнено в [69].

Рассмотрим хост с массой M_h , радиусом R_h и с некоторым распределением внутри него меньших СТМ. Эти малые СТМ движутся в общем гравитационном потенциале с дисперсией скоростей $\sim V_h \simeq GM_h/R_h$. Взаимодействуя приливо с окружением, малый СТМ увеличивает свою внутреннюю энергию. СТМ с массой M характеризуется произвольным ν , и его взаимодействие с другим (целевым) СТМ происходит с прицельным параметром l . Целевой СТМ имеет массу M' , радиус R' , радиус ядра $R'_c = x_c R$ с $x_c \sim 0.1$. Предполагаем, что распределение плотности внутри СТМ имеет вид (1).

Увеличение внутренней энергии СТМ M в течение единичного пролета в импульсном приближении [249] дается выражением:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \int d^3r \rho_{\text{int}}(r) (v_x - \tilde{v}_x)^2, \quad (1.51)$$

где v_x – увеличение скорости частицы ТМ в направлении оси x и \tilde{v}_x – та же величина для центра масс СТМ. Ось x соединяет центры масс двух СТМ, когда

минимально расстояние, соединяющее центры масс двух СТМ. Имеем

$$v_x - \tilde{v}_x \simeq \frac{\partial v_x}{\partial l} \Delta l = \frac{\partial v_x}{\partial l} r \cos \psi, \quad (1.52)$$

где ψ – полярный угол в сферических координатах.

Для прямолинейной траектории (импульсное приближение) угол между \mathbf{v}_{rel} и линией, соединяющей центры масс СТМ изменяется следующим образом

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{v_{\text{rel}}}{l} \cos^2 \phi, \quad (1.53)$$

где $v_{\text{rel}} \simeq \sqrt{2}V_h$. Заменяя переменную t на ϕ в уравнении Ньютона, получаем

$$\frac{dv_x}{d\phi} = -\frac{GM'(r'(\phi))}{v_{\text{rel}}l} \cos \phi, \quad (1.54)$$

и после интегрирования этого уравнения:

$$v_x = \frac{2GM'}{v_{\text{rel}}R'} g(y), \quad (1.55)$$

где $y = l/R'$,

$$g(y) = \begin{cases} y^{-1}, & y > 1; \\ \left[1 + y^{3-\beta} (1-y^2)^{1/2} {}_2F_1 \left(\frac{3-\beta}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1-y^2 \right) \right. \\ \left. - (1-y^2)^{1/2} \right] / y, & y < 1, \end{cases} \quad (1.56)$$

и ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция.

Темп роста внутренней энергии из-за столкновений конкретного рассматриваемого СТМ со всеми другим СТМ

$$\dot{E} = \int 2\pi l v_{\text{rel}} dl \int dM' \psi(M', t) \Delta E. \quad (1.57)$$

После простых вычислений получаем

$$\dot{E} = \frac{4\pi(3-\beta)G^2MR^2}{3(5-\beta)v_{\text{rel}}} \int_M^{M_h} dM' M'^2 \psi(M', t) \left[\frac{\lambda}{R'^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R'^2} - \frac{1}{R_h^2} \right) \right], \quad (1.58)$$

где

$$\lambda = \int_{x'_c}^1 dy y \left(\frac{dg}{dy} \right)^2 = 0.11 \quad (1.59)$$

для $x'_c = 0.1$, и зависимость λ от x'_c очень слаба.

В качестве второго процесса, ответственного за приливное разрушение, рассмотрим взаимодействие СТМ с общим гравитационным потенциалом хоста. Прирост энергии на единицу массы на расстоянии r от центра масс рассматриваемого малого СТМ за время одного прохождения периастра [249]

$$\langle E_p \rangle = \frac{GM_h}{R_h^3} r^2 \left(\frac{R_h}{R_p} \right)^\beta \chi_{\text{ecc}}(e) A(\omega\tau), \quad (1.60)$$

где e – эксцентриситет, функция χ_{ecc} представлена в [249], адиабатическая поправка $A(x) = (1 + x^2)^{-\gamma}$, $\gamma \simeq 2.5 - 3$ и R_p – расстояние в периастре. Прирост энергии СТМ за один период T_{orb} is $\Delta E = \int \langle E_p \rangle \rho_{\text{int}}(r) d^3r$, и темп роста энергии

$$\dot{E} = \frac{2\Delta E}{T_{\text{orb}}}. \quad (1.61)$$

Темп роста энергии за счет обоих упомянутых процессов дается суммой (1.58) и (1.61). Используя функцию масс Пресса–Шехтера (см. далее формулу (1.67) в интеграле (1.58), получим

$$\frac{1}{T(m, m_h, \nu, \nu_h)} \equiv \frac{\dot{E}}{E} \simeq 2t_\Lambda^{-1} \mu \nu_h^{9/2} \nu^{-3} m^{(n+3)/2} m_h^{-3(n+3)/4}, \quad (1.62)$$

где $m = M/M_\Lambda$, M_Λ – характерная масса СТМ, который образуется в момент t_Λ , выбранный так, что до t_Λ космологической постоянной можно пренебречь,

$$\mu = \frac{\sqrt{2\kappa}(5 - 2\beta)}{3(5 - \beta)} \left[\left(\frac{R_h}{R_p} \right)^\beta A(\omega\tau) \chi_{\text{ecc}}(e) + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left| \frac{n+3}{n+1} \right| \left(2\lambda + \frac{n+5}{n+9} \right) \right]. \quad (1.63)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках описывает взаимодействие с общим гравитационным полем хоста, а второй член – приливные столкновения с другими СТМ внутри хоста. Как правило, первое слагаемое больше второго. Для примера мы положим, что средняя орбита имеет $R_h/R_p \simeq 2$ и $T_{\text{orb}} \simeq 2R_h/V_h$, и также положим $A(\omega\tau)\chi_{\text{ecc}}(e) \sim 1$. Тогда, если пренебречь приливными взаимодействиями с другими СТМ (второй член в квадратных скобках в (1.63)) и взять $\beta = 1.8$, получаем $\mu \simeq 9.6$. Зависимость итогового результата (функции масс СТМ) от μ слаба, и изменяется приблизительно как $\mu^{-1/3}$.

Выше были приведены примеры точных расчетов, сделанных путем вычленения отдельных процессов из общей сложной картины приливных разрушений. Однако реальные процессы столь хаотичны, что уместнее использовать

упрощенные модели. В течение динамического времени $t_{\text{dyn}} \simeq 0.5(G\rho_h)^{-1/2}$, где ρ_h – средняя внутренняя плотность хоста, выбранный СТМ может принадлежать нескольким последовательно разрушаемым хостам. Траектория СТМ в хосте испытывает последовательные повороты, сопровождаемые “приливными ударами” [249]. Похожие удары возникают при взаимодействии с другими субструктурами, а в общем случае удары обусловлены любой резкой вариацией гравитационного поля. В рассматриваемом случае гравитационные удары имеют одинаковый порядок величины. Для СТМ с массой M и радиусом R внутренняя энергия возрастает после гравитационного удара на величину

$$\Delta E \simeq \frac{4\pi}{3} \gamma_1 G \rho_h M R^2, \quad (1.64)$$

где численный коэффициент $\gamma_1 \sim 1$. Обозначим через γ_2 число приливных ударов за динамическое время t_{dyn} . Соответствующий темп увеличения внутренней энергии равен $\dot{E} = \gamma_2 \Delta E / t_{\text{dyn}}$. СТМ разрушается, если увеличение его внутренней энергии превышает энергию связи $|E| \simeq GM^2/2R$. В результате, для характерного времени $T = T(\rho, \rho_h)$ приливного разрушения СТМ с плотностью ρ внутри более массивного хоста с плотностью ρ_h получаем

$$T^{-1}(\rho, \rho_h) = \frac{\dot{E}}{|E|} \simeq 4\gamma_1\gamma_2 G^{1/2} \rho_h^{3/2} \rho^{-1}. \quad (1.65)$$

Как окажется далее, итоговая функция масс мелкомасштабных СТМ зависит от произведения $\gamma_1\gamma_2$ очень слабо.

1.2.2. Иерархическое сгущивание с учетом разрушений

Концентрация свободных СТМ, т. е., не находящихся внутри больших хостов, дается формулой Пресса-Шехтера [28]

$$\phi_{\text{PS}}(t, M) dM = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\rho}{M} \frac{\delta_c}{D_g(t)\sigma_{\text{eq}}^2} \frac{d\sigma_{\text{eq}}}{dM} \exp\left[\frac{-\delta_c^2}{2D_g(t)^2\sigma_{\text{eq}}^2}\right] dM, \quad (1.66)$$

где фактор роста $D_g(t)$ нормирован как $D_g(t_{\text{eq}}) = 1$. Однако с точки зрения поиска аннигиляционных сигналов интерес представляют не только независимые СТМ с функцией масс (1.66), но и СТМ, захваченные внутрь других объектов. В частности, к этому классу относятся СТМ внутри гало нашей Галактики.

Функция масс СТМ, находящиеся в гало, но не входящие в состав других субструктур гало с хорошей точностью дается в момент образования гало (1.66) с учетом увеличения концентрации СТМ пропорционально росту плотности в гало. Это утверждение основано на большой разнице масс СТМ и гало, в связи с чем эффекты байсинга очень малы. Иначе обстояло бы дело для формирования крупных субструктур на фоне гало [250]. Для средней концентрации СТМ в гало это увеличение дает:

$$\psi_{\text{PS}}(t_f, M)dM = \kappa\phi_{\text{PS}}(t_f, M)dM. \quad (1.67)$$

Но остается вопрос, какой вклад в общую функцию масс и в аннигиляционный сигнал вносят СТМ, вошедшие в гало в составе меньших субструктур, чем само гало. Одной лишь теории Пресса-Шехтера недостаточно, т. к. необходимо еще принять во внимание динамические процессы разрушения СТМ.

В течение своего времени жизни СТМ мог находиться внутри многих хостов с большей массой. После приливного разрушения первого хоста СТМ становится частью следующего более масштабного хоста, и т. д. Процесс перехода СТМ из одного хоста в другой происходит почти непрерывно по времени до того, как сформируется последний хост, в котором приливные разрушения становятся неэффективными. Вероятность выживания СТМ дается экспонентой e^{-J} , где

$$J \simeq \sum_h \frac{\Delta t_h}{T(\rho, \rho_h)}. \quad (1.68)$$

Здесь Δt_h – разность времен формирования t_h двух последовательных хостов, и суммирование идет по СТМ промежуточных масс, которые последовательно содержат рассматриваемый конкретный СТМ с массой M . Заменяя в (1.68) суммирование интегрированием, получаем

$$J(\rho, \rho_f) = \int_{t_1}^{t_f} \frac{dt_h}{T(\rho, \rho_h)} \simeq \gamma \frac{\rho_1 - \rho_f}{\rho} \simeq \gamma \frac{\rho_1}{\rho} \simeq \gamma \frac{t^2}{t_1^2}, \quad (1.69)$$

где

$$\gamma = 2\gamma_1\gamma_2\kappa^{1/2}G^{1/2}\rho_{\text{eq}}^{1/2}t_{\text{eq}} \simeq 14(\gamma_1\gamma_2/3), \quad (1.70)$$

и t , t_1 , t_f , ρ , ρ_1 и ρ_f – времена формирования и внутренние плотности рассматриваемого СТМ, его первого и последнего хоста, соответственно. Из уравнения

(1.69) видно, что первый хост дает основной вклад в приливное разрушение рассматриваемого СТМ, особенно если плотность первого хоста ρ_1 близка к ρ , и соответственно, $e^{-J} \ll 1$.

Теперь необходимо учесть число СТМ с массами M (образовавшихся из пиков высотой ν), которые входят в состав больших хостов в течение интервалов времени Δt_1 вблизи каждого из моментов t_1 , начиная с момента t формирования СТМ. Функция масс мелкомасштабных СТМ (т. е., дифференциальная функция масс ТМ в форме СТМ, избежавших разрушения во время иерархического скучивания) может быть записана следующим образом

$$\xi \frac{dM}{M} d\nu = dM d\nu \frac{e^{-\nu^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{t(\nu\sigma_{\text{eq}})}^{t_0} dt_1 \left| \frac{\partial^2 F(M, t_1)}{\partial M \partial t_1} \right| e^{-J(t, t_1)}. \quad (1.71)$$

В этом уравнении t_0 – возраст Вселенной, а $F(M, t)$ – доля массы ТМ в виде незахваченных СТМ (т. е., СТМ, которые не входят в состав хостов большего масштаба) с массой, меньшей M , в момент времени t . Согласно [28], доля массы в форме свободных СТМ равна $F(M, t) = \text{erf}(\delta_c / [\sqrt{2}\sigma_{\text{eq}}(M)D(t)])$, где $\text{erf}(x)$ – интеграл ошибок, $D(t)$ – фактор роста возмущений с нормировкой $D(t_{\text{eq}}) = 1$. Верхний предел интегрирования t_0 в (1.71) не является критичным и может быть положен равным бесконечности.

За эволюцию доли свободных СТМ $\partial^2 F / (\partial M \partial t)$ в интервале масс dM ответственны два процесса: (i) формирование новых СТМ и (ii) захват малых СТМ в большие. Эти процессы примерно одинаково эффективны в тот момент, когда $\partial^2 F / (\partial M \partial t) = 0$. Чтобы рассчитать число захваченных СТМ нам нужен только второй процесс (ii) для доли $\partial F(M, t) / \partial M$. Тем не менее, в (1.71) фигурирует доля $\partial F(M, t) / \partial M$, которая зависит от обоих процессов. Это создавало бы неточность вблизи типичного времени формирования СТМ с массой M , когда плотность СТМ близка к плотности хостов. К счастью, в это время экспонента в уравнении (1.71) очень мала $e^{-J} \ll 1$, как это можно увидеть из (1.69) и (1.70). Соответственно, неопределенный вклад процесса (i) в интеграл (1.71) также очень мал. Т. е., только процесс (ii) доминирует в области интегрирования, в которой экспонента e^{-J} не мала. По этой причине (1.71) дает хорошее приближение. Характерное время t_* формирования СТМ с массами M

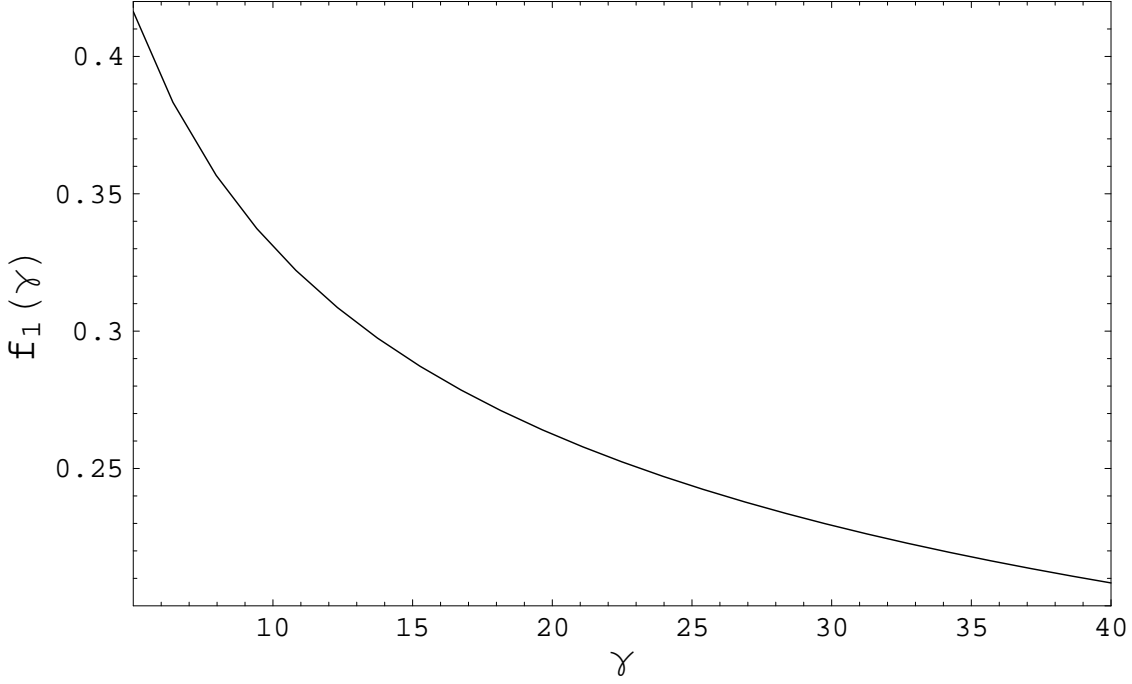


Рис. 1.2. Функция $f_1(\gamma)$, даваемая выражением (1.73).

может быть оценено из уравнения $\sigma_{\text{eq}}(M)D(t_*) \simeq \delta_c$. В эпоху $t \gg t_*$ экспонента $\exp\{-\delta_c^2/[2\sigma_{\text{eq}}^2 D^2(t)]\}$ может быть положена равной единице, что упрощает интегрирование в (1.71).

В итоге, функция распределения (1.71) преобразуется к следующему виду:

$$\xi \frac{dM}{M} d\nu \simeq \frac{\nu d\nu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\nu^2/2} f_1(\gamma) \frac{d \log \sigma_{\text{eq}}(M)}{dM} dM, \quad (1.72)$$

где

$$f_1(\gamma) = \frac{2[\Gamma(1/3) - \Gamma(1/3, \gamma)]}{3\sqrt{2\pi}\gamma^{1/3}}, \quad (1.73)$$

$\Gamma(1/3)$ и $\Gamma(1/3, \gamma)$ – гамма-функция и неполная гамма-функция, соответственно. Функция (1.73) показана на Рис. 1.2. Видно, что $f_1(\gamma)$ на интервале $14 < \gamma < 40$ изменяется медленно, и можно приближенно положить $f_1(\gamma) \simeq 0.2 - 0.3$.

Наличие первого множителя ν в (1.72) соответствует тому факту, что что СТМ, образовавшиеся из высоких пиков (с большей величиной ν) успешнее переживают процессы разрушения по сравнению со СТМ, образовавшихся из пиков с меньшим ν . Интегрируя (1.72) по ν , получаем

$$\xi_{\text{int}} \frac{dM}{M} \simeq 0.02(n + 3) \frac{dM}{M}. \quad (1.74)$$

Эффективный показатель степени n в (1.74) определяется следующим образом $n = -3(1 + 2\partial \log \sigma_{\text{eq}}(M)/\partial \log M)$ и зависит от M очень слабо. Уравнение (1.74)

подразумевает, что для типичных значений n только малая доля СТМ (около 0.1 – 0.5 %) переживают стадию иерархического приливного разрушения в каждом логарифмическом интервале масс $\Delta \log M \sim 1$. Отметим, что физический смысл функции масс выживших СТМ $\xi dM/M$ отличается от смысла функции масс свободных СТМ, даваемой формулой Пресса-Шехтера $\partial F/\partial M$.

Интегрируя функцию масс (1.74) от M_{\min} до $M \sim 10^2 M_{\odot}$, мы получаем долю ТМ в форме СТМ, и далее эта величина будет приведена с учетом разрушения звездами. Для сверхтяжелых частиц ТМ величина M_{\min} может быть намного меньше и разрушение звездами не эффективно, из-за чего доля выживших СТМ возрастет. В частности, для сверхтяжелых нейтралино M_{\min} может быть $\sim t$, и доля выживших СТМ составляет в этом случае 0.15, 0.18, 0.21 и 0.26 для $n_p = 0.949, 0.963, 0.977$ и 1, соответственно.

Полученная функция масс (1.74) далее испытывает трансформацию в процессах приливного взаимодействия со звездами в Галактике, эти процессы будут рассмотрены далее.

1.2.3. Сравнение с результатами численного моделирования

Формирование СТМ с массой $M_{\min} \geq 10^{-6} M_{\odot}$, было исследовано в численных моделированиях [38, 69]. Получающаяся форма дифференциальной концентрации СТМ $n(M) dM \propto dM/M^2$ оказывается близкой к той, что была получена для больших СТМ с $M \geq 10^6 M_{\odot}$.

Простая форма M^{-1} функции масс (1.74) находится в хорошем согласии с результатом численного моделирования [69], но по нормировке отличается примерно в два раза. Также следует отметить хорошее согласие при экстраполяции результатов наших вычислений к данным численного моделирования больших СТМ с $M \geq 10^6 M_{\odot}$ (см. [37]). На Рис. 1.3 сплошной линией показана концентрация СТМ согласно выражению (1.74). Это выражение справедливо при $M \leq 10^3 M_{\odot}$. Для больших масс выполнена экстраполяция (правая часть сплошной линии). Соответствующие функции масс, полученные в численном моделировании, могут быть параметризованы в следующей форме $\xi(M) dM/M = AM^{1-\lambda} dM$. Постоянная A может быть определена путем фиксации показателя степени λ и доли ε массы гало Галактики в форме СТМ в

интервале масс от $M_{\min} \simeq 10^6 M_{\odot}$ до $M_{\max} \simeq 10^{10} M_{\odot}$:

$$\varepsilon = \int_{M_{\min}}^{M_{\max}} AM^{1-\lambda} dM. \quad (1.75)$$

После нормировки функция масс крупномасштабных СТМ выражается следующей формулой

$$\xi(M) \frac{dM}{M} = \varepsilon \frac{dM}{M} \begin{cases} \frac{(2-\lambda)M^{2-\lambda}}{M_{\max}^{2-\lambda} - M_{\min}^{2-\lambda}}, & \lambda \neq 2; \\ \log^{-1}\left(\frac{M_{\max}}{M_{\min}}\right), & \lambda = 2. \end{cases} \quad (1.76)$$

На Рис. 1.3 показана дифференциальная концентрация крупномасштабных СТМ $(M_{\text{H}}/M) \xi(M) dM/M$ из (1.76) для различных значений λ и ε , взятых из различных численных моделирований: $\varepsilon \simeq 0.2$, $\lambda = 2$ из [251]; $\varepsilon \simeq 0.15$, $\lambda = 1.9$ из [252], и $\varepsilon \simeq 0.05$, $\lambda = 1.78$ из [253]. Наблюдение линзирования в гало Галактики [254] дает меньшую долю ТМ в форме СТМ $\varepsilon \simeq 0.02$. Как можно видеть из Рис. 1.3, имеется хорошее согласие между экстраполяцией результатов наших вычислений и результатов численных моделирований крупномасштабных СТМ.

1.3. Разрушение сгустков в Галактике

В данном разделе вычисляется вероятность выживания остатков СТМ в Галактике с учетом эффекта их приливного разрушения звездами [37], [108]. Показано, что значительная доля остатков может выживать в течение времени существования Галактики, если радиусы их ядер достаточно малы. Поскольку основной вклад в аннигиляционный поток дает самая внутренняя область СТМ вблизи ядра, то разрушение внешних слоев СТМ слабо влияет на аннигиляцию, и выжившие в приливных разрушениях ядра СТМ дают основной вклад в аннигиляционный сигнал в Галактике.

Поскольку вопрос о радиусе ядра СТМ пока не прояснен, мы будем рассматривать относительный радиус ядра $x_c = R_c/R$ как свободный параметр

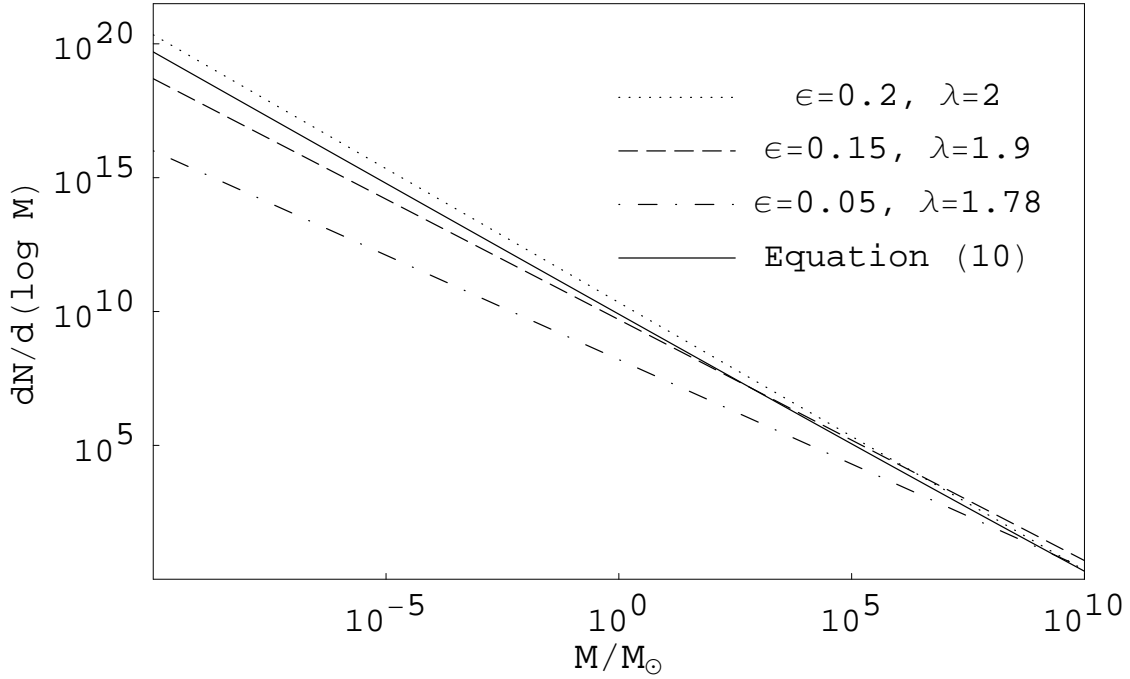


Рис. 1.3. Сплошной линией показана дифференциальная концентрация мелкомасштабных СТМ в Галактике согласно формуле (1.74) при $n_p = 1.0$. Эти вычисления, имеющие надежную область применимости только при $M < 10^3 M_\odot$, экстраполированы к большим массам и показаны правой частью сплошной кривой, которая получена на основе уравнения (10) работы [37] (здесь это уравнение (1.74)). Другие кривые соответствуют концентрации крупномасштабных СТМ с $M > 10^6 M_\odot$, полученной в численном моделировании (см. подробности в тексте), для различных величин параметров ϵ и λ в (1.76). Левые части этих кривых являются экстраполяцией к малым массам.

с величиной в диапазоне $10^{-5} - 0.1$. Мы исследуем зависимость от этого параметра вероятности выживания СТМ в Галактике под влиянием приливных гравитационных сил. В качестве наиболее вероятной величины рассматриваем $x_c \simeq 10^{-2}$, имея в виду численные моделирования [69].

Во многих работах (см., например, [37, 42]) использовался упрощенный критерий приливного разрушения СТМ. А именно, полагалось, что СТМ разрушен, если полное приращение его внутренней энергии $\sum(\Delta E)_j$ после нескольких приливных взаимодействий становится порядка начальной энергии связи СТМ $|E|$, т. е.

$$\sum_j (\Delta E)_j \sim |E|, \quad (1.77)$$

где суммирование идет по последовательным событиям приливного взаимодействия. Этот критерий справедлив на ранних стадиях иерархического сгущива-

ния. В случае разрушения СТМ в Галактике при взаимодействии со звездами требуется учет постепенной потери массы [255–257], в частности, для мелкомасштабных СТМ это было отмечено в работах [258, 259].

Далее мы рассматриваем постепенную потерю массы мелкомасштабными СТМ, предполагая, что приливному разрушению более всего подвержены внешние слои СТМ. В этом приближении мы исследуем непрерывное уменьшение масс СТМ и их радиусов по мере последовательных пересечений диска Галактики и столкновений со звездами.

1.3.1. Структура Галактики, орбиты сгустков и разрушение полем диска

Прирост кинетической энергии частицы ТМ по отношению к центру СТМ после одного пересечения диска Галактики [260]

$$\delta E = \frac{4g_m^2(\Delta z)^2 m}{v_{z,c}^2} A(a), \quad (1.78)$$

где m – масса частицы, Δz – вертикальное расстояние (поперек плоскости диска) частицы ТМ от центра СТМ, $v_{z,c}$ – вертикальная скорость СТМ по отношению к диску в момент пересечения диска и $A(a)$ – адиабатическая поправка. Гравитационное ускорение вблизи плоскости диска

$$g_m(r) = 2\pi G\sigma_s(r), \quad (1.79)$$

где поверхностная плотность диска

$$\sigma_s(r) = \frac{M_d}{2\pi r_0^2} e^{-r/r_0} \quad (1.80)$$

с $M_d = 8 \times 10^{10} M_\odot$ и $r_0 = 4.5$ кпк.

Адиабатическая поправка в (1.78), называемая поправкой Вейнберга, определяется как дополнительный множитель $A(a)$ к величине прироста энергии, рассчитанной в импульсном приближении [261]. Этот множитель удовлетворяет условиям: $A(a) = 1$ для $a \ll 1$ и $A(a) \ll 1$ при $a \gg 1$. В работе [255] предложена следующая фитирующая формула:

$$A(a) = (1 + a^2)^{-3/2}. \quad (1.81)$$

Здесь адиабатический параметр определен как $a = \omega\tau_d$, где ω – орбитальная частота частицы ТМ в СТМ, $\tau_d \simeq H_d/v_{z,c}$ – эффективная длительность гравитационного удара, производимого диском, имеющим полутолщину H_d . Для приливного взаимодействия СТМ со звездами балджа и гало длительность гравитационного удара оценивается как $\tau_s \sim l/v_{\text{rel}}$, где l – прицельный параметр, v_{rel} – относительная скорость СТМ и звезды.

Для оценки эффекта приливных ударов, производимых различными частями диска, рассмотрим сначала упрощенную модель с круговыми орбитами СТМ. В этом случае скорость пересечения диска $v_{z,c}$ равна круговой скорости:

$$v_{z,c} = v_{\text{rot}}(r) = \left[\frac{GM_{\text{H}}(r)}{r} \right]^{1/2}, \quad (1.82)$$

где r – радиус орбиты СТМ, а $M_{\text{H}}(r)$ – масса гало внутри сферы радиуса r . Используя для орбитального периода СТМ выражение $T_c = 2\pi r/v_{\text{rot}}(r)$, получаем

$$t_d = \frac{(5 - \beta)}{3\pi(5 - 2\beta)} \frac{r_0^4 \rho M_{\text{H}}^{1/2}(r) r^{1/2}}{G^{1/2} M_d^2} e^{2r/r_0}. \quad (1.83)$$

Сравнение времени разрушения СТМ t_d из (1.83) с возрастом Вселенной t_0 показывает, что все СТМ со средней внутренней плотностью $\rho < 2 \times 10^{-22} \text{ г см}^{-3}$ эффективно разрушаются внутри радиуса $r < 15$ кпк от центра Галактики. В частности, большая часть СТМ с массой $M = 2 \times 10^{-8} M_{\odot}$, $n_p = 1$ и $\nu = 2$ не выживают внутри центральных 15 кпк.

Рассмотрим теперь некруговые орбиты. В качестве репрезентативного примера мы рассмотрим изотермический профиль плотности внутри СТМ

$$\rho_{\text{int}}(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{v_{\text{rot}}^2}{Gr^2} \quad (1.84)$$

с обрезанием на вириальном радиусе R : $\rho(r) = 0$ at $r > R$. Соответствующий профиль массы в СТМ $M(r) = M_i(r/R)$, где M_i – начальная масса СТМ в эпоху формирования Галактики. С таким распределением массы круговая скорость внутри СТМ $v_{\text{rot}} = (GM(r)/r)^{1/2} = (GM_i/R)^{1/2}$. Гравитационный потенциал, соответствующий профилю плотности (1.84), равен $\phi(r) = v_{\text{rot}}^2 [\log(r/R) - 1]$. Определим безразмерную энергию частицы ТМ следующим образом $\varepsilon = E/(mv_{\text{rot}}^2)$ и гравитационный потенциал $\psi(r) = \phi(r)/v_{\text{rot}}^2 = \ln(r/R) - 1$. Внутренний профиль плотности $\rho_{\text{int}}(r)$ и функция распределения частиц в СТМ

$f_{\text{cl}}(\varepsilon)$ связаны интегральным соотношением [262]

$$\rho_{\text{int}}(r) = 2^{5/2}\pi \int_{\psi(r)}^0 \sqrt{\varepsilon - \psi(r)} f_{\text{cl}}(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (1.85)$$

Соответствующая изотермическая функция распределения равна

$$f_{\text{cl}}(\varepsilon) \simeq \frac{v_{\text{rot}}^2}{4\pi^{5/2}e^2GR^2} e^{-2\varepsilon}. \quad (1.86)$$

Отметим, что эта функция распределения дает лишь приближенное представление (1.84) вдали от радиуса R . Однако данной аппроксимации достаточно для оценки приливного разрушения СТМ.

Прирост энергии в приливном взаимодействии $\delta\varepsilon$ вызывает вылет частиц с энергиями в диапазоне $-\delta\varepsilon < \varepsilon < 0$, причем эффективнее всего теряются частицы во внешних слоях СТМ. Соответствующее изменение плотности на радиусе r выражается следующим образом

$$\delta\rho(r) = 2^{5/2}\pi \int_{-\delta\varepsilon}^0 \sqrt{\varepsilon - \psi(r)} f_{\text{cl}}(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (1.87)$$

В этом выражении прирост энергии (1.78) у различных частиц ТМ усреднен по углам, так что $\langle(\Delta z)^2\rangle = r^2/3$. Получающаяся потеря массы СТМ за время одного пересечения диска

$$\delta M = -4\pi \int_0^R r^2 \delta\rho(r) dr. \quad (1.88)$$

Введем безразмерные величины

$$Q_d = \frac{g_m^2}{2\pi v_{z,c}^2 G \bar{\rho}_i}, \quad S_d = \frac{4\pi}{3} G \bar{\rho}_i \tau_d^2, \quad (1.89)$$

где $\bar{\rho}_i = 3M_i/(4\pi R^3)$ – начальная средняя плотность СТМ. Для большей части объема СТМ $Q_d \ll 1$ с типичным значением $Q_d \sim 0.03$. В предельном случае $Q_d \ll 1$ и при отсутствии адиабатических поправок, $S_d = 0$, интегралы (1.87) могут быть найдены аналитически. В общем случае находим фитирующую формулу для потери массы СТМ за одно пересечение диска Галактики

$$\left(\frac{\delta M}{M}\right)_d \simeq -0.13 Q_d \exp\left(-1.58 S_d^{1/2}\right). \quad (1.90)$$

Теперь рассчитаем приливную потерю массы СТМ с использованием реалистичного распределения их орбит в гало. Рассмотрим некоторый конкретный СТМ, движущийся в гало с углом γ между нормальными к плоскостям диска и орбиты. Орбитальная угловая скорость на расстоянии r от центра Галактики равна $d\phi/dt = J/(mr^2)$, где J – орбитальный угловой момент СТМ. Вертикальная скорость СТМ при пересечении диска

$$v_{z,c} = \frac{J}{mr_s} \sin \gamma, \quad (1.91)$$

где r_s – радиальное расстояние точки пересечения от центра Галактики. В общем случае происходят два пересечения (с различными величинами r_s) за орбитальный период.

Предполагаем, что плотность в гало распределена согласно профилю Наварро-Френка-Уайта (3) Барионная материя доминирует на расстоянии $r \leq r_\odot$. Введем безразмерные переменные:

$$x = \frac{r}{R_s}, \quad \tilde{\rho}_H(x) = \frac{\rho_H(r)}{\rho_0}, \quad y = \frac{J^2}{8\pi G \rho_0 R_s^4 M^2}, \quad (1.92)$$

$$\varepsilon = \frac{E_{\text{orb}}/M - \Phi_0}{4\pi G \rho_0 R_s^2}, \quad \psi = \frac{\Phi - \Phi_0}{4\pi G \rho_0 R_s^2}, \quad (1.93)$$

где $\Phi_0 = -4\pi G \rho_0 R_s^2$, E_{orb} – полная орбитальная энергия СТМ. С использованием этих переменных профиль плотности гало (3) записывается как

$$\tilde{\rho}_H(x) = \frac{1}{x(1+x)^2}. \quad (1.94)$$

Гравитационный потенциал $\psi(x)$, соответствующий профилю плотности (1.94),

$$\psi(x) = 1 - \frac{\log(1+x)}{x}. \quad (1.95)$$

Уравнение для точек поворота орбиты СТМ $\dot{r}^2 = 0$ в потенциале (1.95)

$$1 - \frac{\log(1+x)}{x} + \frac{y}{x^2} = \varepsilon. \quad (1.96)$$

Из (1.96) можно найти численно минимальное x_{\min} и максимальное x_{\max} радиальное расстояние СТМ от центра Галактики как функция орбитальной энергии ε и квадрата углового момента y . Обозначая $p = \cos \theta$, где θ – угол между радиус-вектором \mathbf{r} и направлением орбитальной скорости \mathbf{v} , получаем $y =$

$(1 - p^2)x^2[\varepsilon - \psi(x)]$. Единичный вектор \mathbf{v}/v распределен изотропно в каждой точке x , и следовательно, p имеет однородное распределение в интервале $[-1, 1]$.

Связь между профилем плотности $\tilde{\rho}_H(x)$ и функцией распределения дается той же формулой (1.85) с заменой $f_{cl} \Rightarrow F(\varepsilon)$, где функция распределения $F(\varepsilon)$ для профиля гало (1.94) фитируется следующим выражением [263]

$$F(\varepsilon) = F_1(1 - \varepsilon)^{3/2}\varepsilon^{-5/2} \left[-\frac{\ln(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} \right]^q e^P. \quad (1.97)$$

Здесь $F_1 = 9.1968 \times 10^{-2}$, $q = -2.7419$, $P = \sum_i p_i(1 - \varepsilon)^i$, $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0.3620, -0.5639, -0.0859, -0.4912)$. Время движения от x_{\min} до x_{\max} и обратно

$$T_c(x, \varepsilon, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi G\rho_0}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{ds}{\sqrt{\varepsilon - \psi(s) - y/s^2}}. \quad (1.98)$$

Угол, на который прецессирует орбита за время $T_c/2$, равен

$$\tilde{\phi} = y^{1/2} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{ds}{s^2 \sqrt{\varepsilon - \psi(s) - y/s^2}} - \pi < 0. \quad (1.99)$$

Таким образом, орбитальный период больше, чем величина T_c , и равен

$$T_t = T_c \left(1 + \tilde{\phi}/\pi \right)^{-1}. \quad (1.100)$$

Выбирая интервал времени ΔT много большим, чем орбитальный период СТМ T_t , но много меньшим возраста Галактики t_0 , т. е. $T_t \ll \Delta T \ll t_0$, определяем средний темп потери массы рассматриваемого конкретного СТМ под влиянием приливных ударов при последовательных пересечениях диска

$$\frac{1}{M} \left(\frac{dM}{dt} \right)_d \simeq \frac{1}{\Delta T} \sum \left(\frac{\delta M}{M} \right)_d, \quad (1.101)$$

где $(\delta M/M)_d$ дается выражением (1.90), и суммирование идет по всем последовательным точкам пересечения диска (нечетным и четным) орбитой СТМ в течение интервала времени ΔT . Согласно (1.79) и (1.91), величины g_m и $v_{z,c}$ обе зависят от радиуса $x = r/L$. Таким образом, необходимо вычислить сумму $\sum g_m^2(x_c)x_c^2$, где суммирование идет по всем последовательным точкам пересечения (нечетным и четным) орбиты СТМ с галактическим диском. Вычисление

(1.101) упрощается благодаря тому факту, что скорость прецессии орбиты постоянна. По этой причине точки последовательных нечетных пересечений разделены одинаковыми углами $\tilde{\phi}$ из (1.99), и то же верно для последовательных четных пересечений. Используя это упрощающее обстоятельство, заменяем суммирование в (1.101) на интегрирование:

$$\frac{1}{\Delta T} \sum \left(\frac{\delta M}{M} \right)_d \simeq \frac{2}{T_t |\tilde{\phi}|} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left(\frac{\delta M}{M} \right)_d \frac{d\phi}{dx} dx,$$

где

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{y^{1/2}}{x^2 \sqrt{\varepsilon - \psi(x) - y/x^2}} \quad (1.102)$$

– уравнение для орбиты СТМ в гало.

1.3.2. Разрушение сгустков звездами

Рассмотрим сначала эффект разрушения СТМ звездами с помощью упрощенного критерия (1.77). Расчет роста внутренней энергии СТМ при единичном пролете звезды аналогичен расчету, выполненному в разделе 1.2 (звезда играет роль СТМ с массой $M' = m_*$), и вместо (1.55) запишем

$$v_z = \frac{2Gm_*}{v_{\text{rel}} l}. \quad (1.103)$$

Теперь путем интегрирования (1.51) по объему СТМ, имеющего профиль плотности $\rho_{\text{int}}(r)$ из (1), в случае $l > R$ получаем:

$$\Delta E = \frac{2(3 - \beta)}{3(5 - \beta)} \frac{G^2 M R^2 m_*^2}{v_{\text{rel}}^2 l^4}. \quad (1.104)$$

Противоположный случай $l < R$ был рассмотрен, например, в [33]. Максимальный прирост внутренней энергии происходит при касательном пролете звезды на расстоянии $l \simeq R$ от центра СТМ.

На этом этапе мы должны различать два случая: (i) разрушение СТМ за один пролет звезды и (ii) разрушение СТМ после многих приливных взаимодействий со звездами. В первом случае порог разрушения СТМ достигается при $\Delta E = |E|$, где E – внутренняя энергия СТМ. Из равенства $\Delta E = |E|$ находим

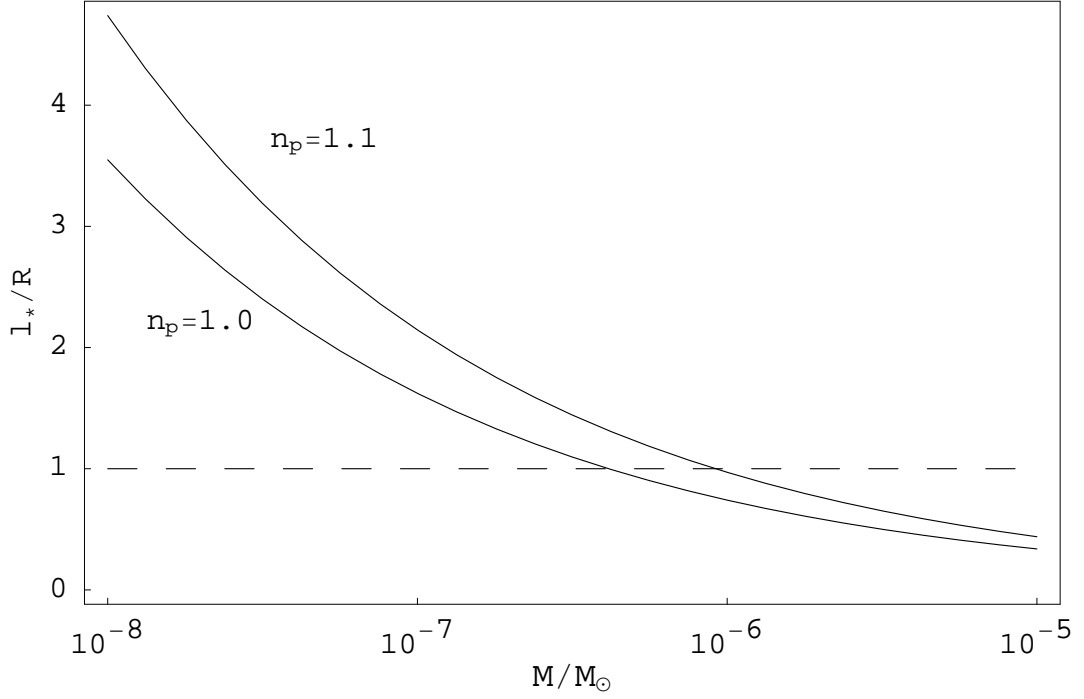


Рис. 1.4. Доля l_*/R согласно (1.105) как функция массы СТМ M на расстоянии от центра Галактики $r = 2$ кпк, $\nu = 2$ и $n_p = 1.0$ и $n_p = 1.1$, соответственно.

максимальный прицельный параметр l_* для разрушения при одном пролете

$$\left(\frac{l_*}{R}\right)^4 = \frac{4(5-2\beta)}{3(5-\beta)} \frac{Gm_*^2}{MRv_{\text{rel}}^2} \sim \left(\frac{V}{v_{\text{rel}}}\right)^2 \left(\frac{m_*}{M}\right)^2, \quad (1.105)$$

где $V \simeq (GM/R)^{1/2}$ – дисперсия скоростей частиц ТМ в СТМ. Доля l_*/R как функция массы СТМ M показана на Рис. 1.4. Заметим, что условие $l_*/R > 1$ выполняется для СТМ минимальных масс. Полный темп разрушения СТМ звездами в случае $l_*/R > 1$ равен

$$t_*^{-1} = \frac{\dot{E}}{|E|} = \pi l_*^2 n_* v_{\text{rel}} + \frac{\dot{E}(l > l_*)}{|E|}. \quad (1.106)$$

где n_* – концентрация звезд и

$$\dot{E}(l > l_*) = 2\pi \int_{l_*}^{\infty} \Delta E(l) n_* v_{\text{rel}} l dl. \quad (1.107)$$

После интегрирования (1.107) с величиной l_* из (1.105) мы получили, что последний член в (1.106) равен первому. Таким образом, итоговое время разрушения СТМ звездами в случае $l_*/R > 1$ равно

$$t_* = \frac{1}{2\pi l_*^2 v_{\text{rel}} n_*} = \frac{1}{4\pi n_* m_*} \left[\frac{3(5-\beta)}{(5-2\beta)} \frac{M}{GR^3} \right]^{1/2}. \quad (1.108)$$

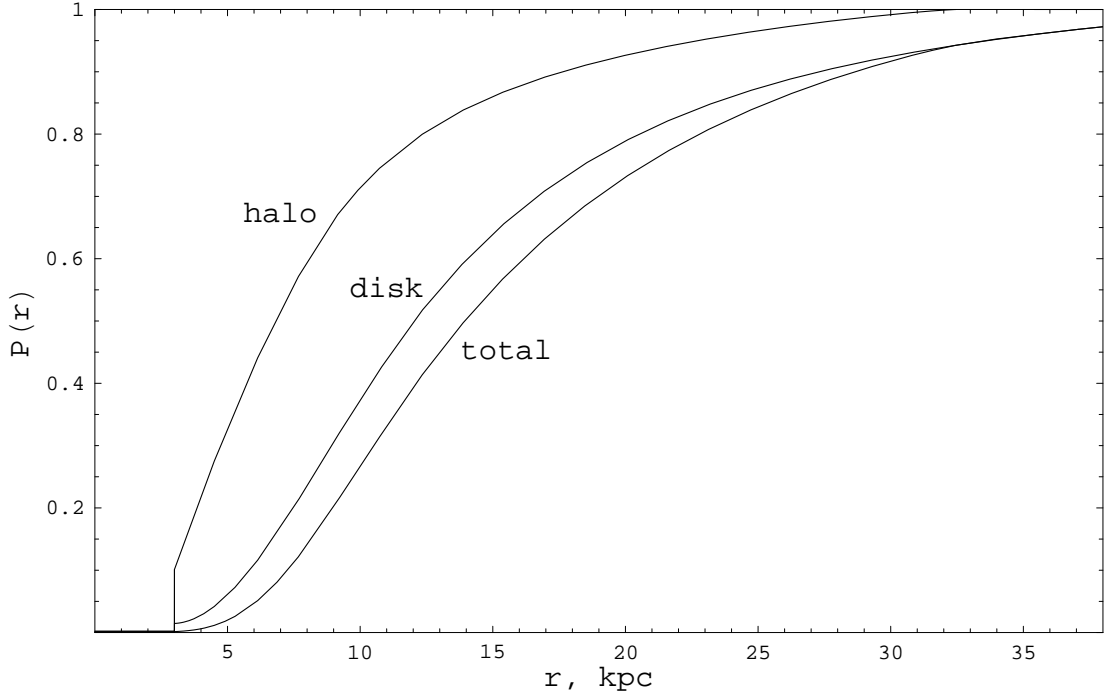


Рис. 1.5. Доля СТМ с массами $M = 10^{-6}M_{\odot}$ и величиной пика $\nu = 2$, выживших в приливных разрушениях диском Галактики P_d , звездами гало Галактики P_H и суммарная доля $P_{\text{tot}} = P_H P_d$ как функция расстояния от центра Галактики. Завал при $r < 3$ кпк обусловлен разрушением СТМ в балдже.

Из (1.108) видно, что в случае $l_*/R > 1$ величина t_* не зависит от v_{rel} .

Похожим образом, время разрушения СТМ звездами в случае $l_* < R$ равно

$$t_* = \frac{3(5 - \beta)}{8\pi(5 - 2\beta)} \frac{v_{\text{rel}} M}{GRm_*^2 n_*}. \quad (1.109)$$

Используя результаты [264], аппроксимируем радиальную концентрацию звезд в балдже на расстояниях $r = 1 - 3$ кпк следующим образом

$$n_{b,*}(r) = (\rho_b/m_*) \exp[-(r/r_b)^{1.6}], \quad (1.110)$$

где $\rho_b = 8M_{\odot}/\text{пк}^3$ и $r_b = 1$ кпк. Концентрация звезд в гало при $r > 3$ кпк вне диска Галактики

$$n_{h,*}(r) = (\rho_h/m_*)(r_{\odot}/r)^3, \quad (1.111)$$

где $m_* = 0.4M_{\odot}$ и $r_{\odot} = 8.5$ кпк. Согласно [265], в области между $r = 1$ и 40 кпк полная масса звезд $4 \times 10^8 M_{\odot}$ с профилем плотности распределения звезд $\propto r^{-3}$. Эти данные соответствуют величине $\rho_h = 1.4 \times 10^{-5} M_{\odot}/\text{пк}^3$ в (1.111). В расчетах мы пренебрегаем несферичностью гало ТМ и сплюснутостью звездного

гало [265]. Звездный профиль плотности гало Галактики известен не очень точно, и выражение (1.111) должно рассматриваться как верхний предел [69]. Для того, чтобы принять во внимание изменение концентрации звезд $n_{h,*}(r)$, мы усредним темп разрушения СТМ звездами t_*^{-1} вдоль орбитальной траектории за орбитальный период:

$$\langle t_*^{-1}(x, y) \rangle = \frac{2R_H}{v_H T_c(x, y)} \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} \frac{ds' t_*^{-1}}{\sqrt{2(x - \log s' + 1) - y/s'^2}}. \quad (1.112)$$

В этом выражении орбитальный период СТМ $T_c(x, y)$ дается формулой (1.98), и время разрушения СТМ t_* равно (1.108) или (1.109) с заменами $n_s \Rightarrow n_{h,*}(r)$ и $v_{\text{rel}} \Rightarrow \sqrt{2[E - U(r)]/m}$. Процедура усреднения (1.112) фактически является интегрированием прибавки энергии $\int \dot{E} dt$ вдоль орбиты СТМ.

Получающаяся вероятность выживания СТМ в приливных разрушениях звездами гало Галактики $P_H(r)$ отличается от вероятности разрушения диском заменой $e^{-t_0/t_d} \Rightarrow e^{-t_0 \langle t_*^{-1}(x, y) \rangle}$, где $\langle t_*^{-1}(x, y) \rangle$ из (1.112).

Результаты численного вычисления приливных разрушений СТМ различными подсистемами Галактики суммированы на Рис. 1.5, 1.6. Эти вычисления были выполнены для СТМ, родившихся из флуктуаций с высотой пика $\nu = 2$, и использовался критерий разрушения (1.77).

Соответственно, 32%, 27% и 18% СТМ выживают в процессах приливных гравитационных ударов со стороны диска на расстоянии $r_{\odot} = 8.5$ кпк для массы СТМ $M = 2 \times 10^{-8} M_{\odot}$, $M = 10^{-6} M_{\odot}$ и $M = 10^{-3} M_{\odot}$. Диск галактики разрушает СТМ даже вне своих пределов $r > 15$ кпк, потому что некоторая доля СТМ с протяженными орбитами пересекают диск во внутренней части гало. Разрушение СТМ диском Галактики становится неэффективным при $r > 40$ кпк. При указанных выше массах СТМ приливное разрушение звездами в гало (вне диска) дает для доли выживших СТМ 66%, 63% и 57%, соответственно. Итоговая доля выживших СТМ с учетом и диска и гало $P(r_{\odot}) = P_H(r_{\odot})P_d(r_{\odot})$ равна 21%, 17% и 10%, соответственно. На Рис. 1.6 доля выживших СТМ в Галактике показана в зависимости от средней плотности СТМ.

Выше для исследования разрушения СТМ мы применяли грубый критерий (1.77), характеризующий потерю большей части массы СТМ. Рассмотрим теперь вопрос о выживании центральных ядер в СТМ. Рассмотрим уменьшение

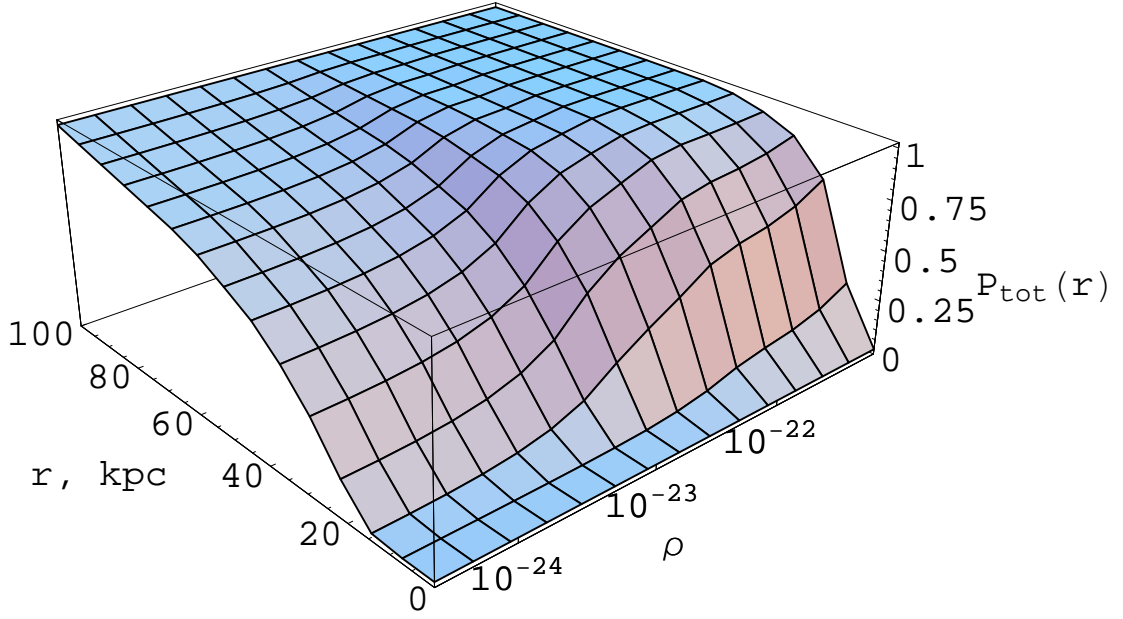


Рис. 1.6. Доля выживших СТМ $P_{\text{tot}}(r)$ в Галактике на радиальных расстояниях $r \leq 100$ кпк. Средняя внутренняя плотность СТМ ρ измеряется в единицах г см^{-3} . Использовался критерий разрушения (1.77).

массы СТМ в рамках гипотезы предпочтительного обдирания внешних слоев СТМ. За время единичного взаимодействия СТМ со звездой прибавка энергии частицы ТМ по отношению к центру СТМ [37]

$$\delta E = \frac{2G^2 m_s^2 m \Delta z^2}{v_{\text{rel}}^2 l^4}, \quad (1.113)$$

где m_* – масса звезды, l – прицельный параметр, v_{rel} – относительная скорость звезды и СТМ, $\Delta z = r \cos \psi$, r – радиальное расстояние частицы ТМ от центра СТМ, и ψ – угол между направлением из центра СТМ к текущей частице ТМ и направлением к центру звезды в момент минимального сближения. Используя тот же метод, что и выше, мы вычисляем относительную потерю массы СТМ $(\delta M/M)_s$ в течение единичного столкновения со звездой и получаем фитирующую формулу, подобную (1.90), но с заменой на безразмерные параметры $Q_d \Rightarrow Q_s$ и $S_d \Rightarrow S_s$, где

$$Q_s = \frac{G m_*^2}{2\pi v_{\text{rel}}^2 l^4 \bar{\rho}_i}, \quad S_s = \frac{4\pi}{3} G \bar{\rho}_i \tau_s^2, \quad (1.114)$$

где $\tau_s \simeq l/v_{rel}$.

СТМ получает максимальный прирост энергии при единичном столкновении со звездой когда прицельный параметр $l \sim R$. Используя соотношение

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{2\pi G\rho_0}} \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon - \psi(x) - y/x^2}}, \quad (1.115)$$

и интегрируя по всем прицельным параметрам $l > R$, вычисляем средний темп потери массы СТМ в процессах последовательных столкновений со звездами

$$\frac{1}{M} \left(\frac{dM}{dt} \right)_s \simeq \frac{1}{2T_t \sqrt{2\pi G\rho_0}} \int_R^\infty 2\pi l dl \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{ds n_*(s) v_{rel}}{\sqrt{\varepsilon - \psi(s) - y/s^2}} \left(\frac{\delta M}{M} \right)_s, \quad (1.116)$$

где $n_*(r)$ – радиальная концентрация звезд в балдже и гало. СТМ движется через среду с переменной величиной n_* вдоль траектории СТМ. В противоположность случаю пересечений диска, прецессия орбиты за орбитальный период не влияет на процесс потери массы в столкновениях со звездами ввиду предполагаемой сферической симметрии гало и балджа. По этой же причине вычисляемая здесь потеря массы не зависит от наклона орбит СТМ по отношению к диску.

Используя (1.110) вместе с (1.108) или (1.109), можно показать, что в балдже при $r \leq 3$ кпк все мелкомасштабные СТМ с массами $M \geq 10^{-8} M_\odot$ полностью разрушаются за Хаббловское время, т. е. $t_* \ll t_0$, если их орбиты всегда заключены в пределах балджа. Таким образом, в распределении СТМ в центре Галактике, казалось бы, должна иметься полость с радиусом $r \simeq 3$ кпк, как это показано на Рис. 1.5, 1.6. Однако ненулевую концентрацию СТМ в балдже создают пролетающие СТМ. Эту концентрацию мы вычислим в следующем разделе в более точном подходе с учетом остатков СТМ.

1.3.3. Доля избежавших разрушения сгустков

Объединим теперь процессы разрушения диском, балджем и гало в едином уравнении для потери массы СТМ. Из уравнения (1.78) видно, что приливные силы влияют преимущественно на внешние области СТМ (где Δz достаточно велико). Поэтому мы полагаем, что масса СТМ $M = M(t)$ и его радиус $R = R(t)$

уменьшаются во времени за счет приливного обдирания внешних слоев, но внутренний профиль плотности остающейся части СТМ дается той же формулой (1.84), т. е. $M(t) \propto R(t)$ и $\bar{\rho}(t) \propto M(t)^{-2}$. Учитывая вместе потери массы (1.101) и (1.116), получаем уравнение эволюции массы СТМ:

$$\frac{dM}{dt} = \left(\frac{dM}{dt} \right)_d + \left(\frac{dM}{dt} \right)_s. \quad (1.117)$$

Далее мы решаем это уравнение численно, начиная с момента формирования Галактики $t_0 - t_G$, и до настоящего момента времени t_0 . В численных вычислениях удобно использовать безразмерные переменные: t/t_0 для времени и $\mu = M/M_i$ для массы, где M_i – начальная масса СТМ. Адиабатическая поправка в большинстве случаев дает лишь множитель порядка единицы. В отсутствие адиабатической поправки, или, что равносильно, при $S_d = S_s = 0$ уравнение эволюции (1.117) принимает простой вид

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{\mu}{t_s} - \frac{\mu^3}{t_d}, \quad (1.118)$$

где t_d и t_s не зависят от μ . Решение этого уравнения

$$\mu^2(t_0) = \frac{2t_d}{(2t_d + t_s) \exp(2t_0/t_s) - t_s} \quad (1.119)$$

дает хорошее приближение к численному решению уравнения (1.117), в котором учтена адиабатическая поправка.

Наиболее важным астрофизическим проявлением СТМ является возможность аннигиляции составляющих их частиц ТМ. Критическим моментом является доминирование центрального ядра СТМ в общем аннигиляционном сигнале, если СТМ имеет достаточно крутой профиль плотности. А именно, аннигиляция частиц ТМ в области ядра даст преобладающий вклад в СТМ со степенным профилем плотности (1) при условии что $\beta > 3/2$ и $x_c = R_c/R \ll 1$. Более точно, величина $\dot{N} \propto \int_{r_0}^r 4\pi r'^2 dr' \rho_{\text{int}}^2(r')$ практически не зависит от r , если $r \gg r_0$. В результате, аннигиляционная светимость СТМ с профилем плотности $\beta \simeq 2$ будет примерно постоянной в процессе приливного обдирания до тех пор, пока радиус СТМ не уменьшится до радиуса ядра. Другими словами, в современной Галактике остатки приливно ободраных СТМ с $x_c < \mu(t_0) \ll 1$,

где $\mu(t) = M(t)/M_i$ и $t_0 \simeq 10^{10}$ лет – возраст Галактики, удовлетворяют уравнению эволюции (1.117) и имеют ту же аннигиляционную светимость, как и их прародители при $\mu = 1$.

Используя уравнение эволюции (1.117), мы можем рассчитать вероятность P выживания остатков СТМ в течение времени жизни Галактики. Выберем некоторую произвольную точку в гало с радиус-вектором \mathbf{r} и углом α относительно полярной оси диска. Только СТМ, орбиты которых имеют угол наклона $\pi/2 - \alpha < \gamma < \pi/2$, проходят через эту точку. Вероятность выживания СТМ может быть записана в следующем виде

$$P(x, \alpha) = \frac{4\pi\sqrt{2}}{\tilde{\rho}(x)\sin\alpha} \int_0^1 dp \int_0^{\sin\alpha} d\cos\gamma \int_{\psi(x)}^1 d\varepsilon [\varepsilon - \psi(x)]^{1/2} F(\varepsilon) \Theta[\mu(t_0) - x_c], \quad (1.120)$$

где $p = \cos\theta$, θ – угол между радиус-вектором \mathbf{r} и направлением орбитальной скорости СТМ, Θ – функция Хевисайда, $\psi(x)$ – гравитационный потенциал гало (1.94), $F(\varepsilon)$ – функция распределения СТМ в гало (1.97), $\mu(t_0)$ зависит от всех переменных интегрирования, и $x_c = R_c/R$ – начальное значение радиуса ядра. Функция $\mu(t_0)$ вычисляется путем численного решения уравнения эволюции (1.117). Если $\mu(t_0) > x_c$, то остаток СТМ считается по определению выжившим в процессе приливного разрушения диском и звездами. Тем аннигиляции в таком остатке остается примерно на уровне темпа аннигиляции в исходном СТМ. В противоположном случае, при $\mu(t_G) < x_c$ СТМ полностью разрушен, поскольку (i) ядро не является динамически выделенной системой и состоит из частиц с протяженными орбитами и (ii) ядро с однородной плотностью разрушается значительно легче, чем ядро с той же массой, но имеющей изотермический профиль. Если бы мы использовали упрощенный критерий разрушения (1.77), то вероятность выживания СТМ можно было бы записать той же формулой (1.120) с заменой $\Theta \rightarrow \exp(-\Delta E/|E|)$, где $\Delta E/|E|$ – относительный прирост внутренней энергии СТМ с момента образования Галактики. Условно этот момент соответствует набору ею половины сегодняшней массы. Но в более точном подходе следует учесть, что СТМ ранее мог находиться в составе протогалактик и испытывал приливное воздействие звезд.

Мы рассматриваем СТМ в начальном интервале масс $M_i = [10^{-6} M_\odot, 1 M_\odot]$,

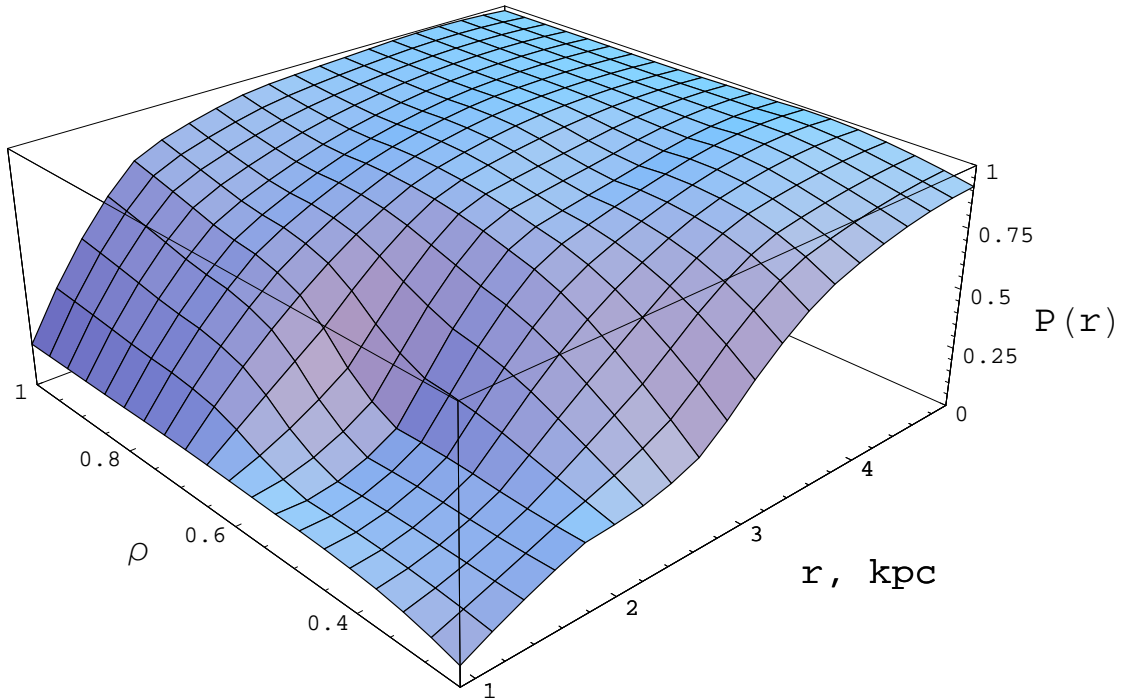


Рис. 1.7. Вероятность выживания $P(r, \rho)$ показана как функция расстояния от центра Галактики r и средней внутренней плотности СТМ ρ в случае $x_c = 0.1$. Это дает нормированную долю СТМ в гало P (1.120), выжившую в процессах приливных разрушений диском и гало. Провал на графике при $r < 3$ кпс обусловлен резким спаданием концентрации звезд (1.110) вне балджа.

образующиеся из типичных пиков высотой 2σ ($\nu = 2$). В этом приближении начальный радиус СТМ R_i зависит только от одного параметра – начальной плотности СТМ, которая сама зависит только от его начальной массы M_i . Результатом численного вычисления вероятности выживания (1.120) для СТМ с $x_c \ll 0.05$ является то, что везде $P(x, \alpha) \sim 1$. Даже внутри балджа имеются СТМ, которые пролетают через балдж из внешних областей. Это означает, что остатки СТМ преимущественно выживают в приливных взаимодействиях в Галактике. Заметное уменьшение $P(x, \alpha) < 1$ рядом с центром Галактики имеется для СТМ с $x_c > 0.05$. Это легко понять, если учесть, что при $x_c \rightarrow 1$ мы возвращаемся к старому критерию разрушения СТМ (1.77) и к соответствующим результатам для вероятности выживания [37, 42]. Вероятность выживания $P(r, \alpha)$, полученная численно из (1.120) в случаях 0.1 и $x_c \sim 0.05$, показана на Рис. 1.7 и 1.8. Зависимость от α (угол между радиус-вектором \mathbf{r} и полярной

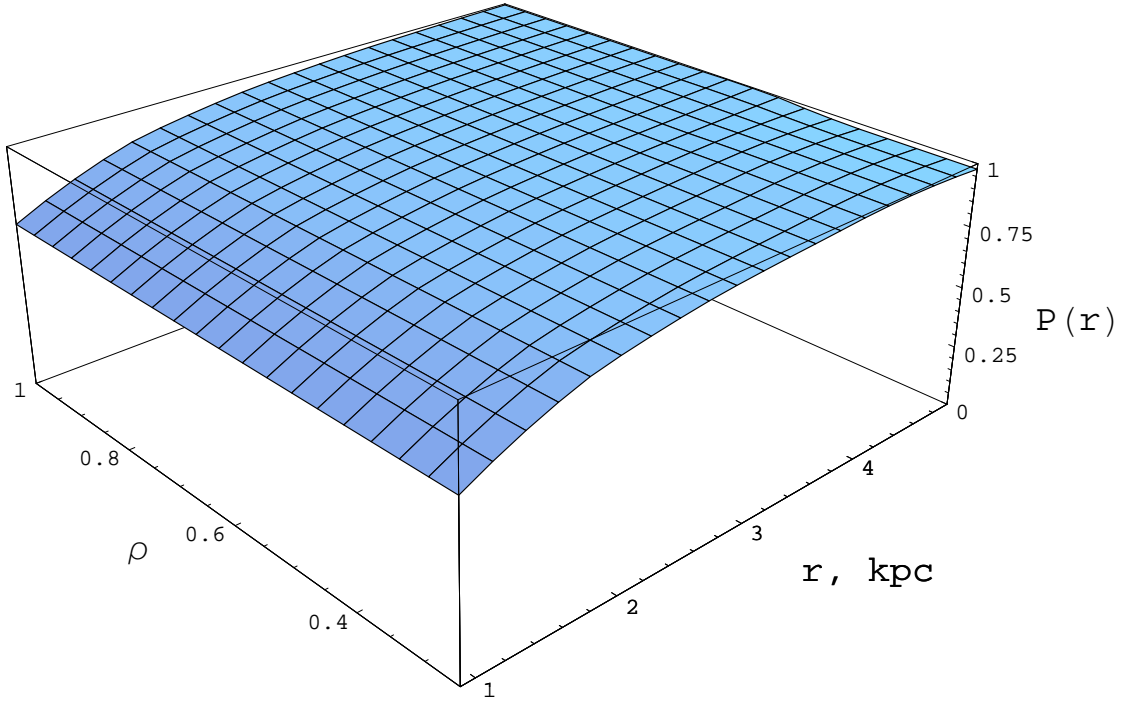


Рис. 1.8. То же, что на Рис. 1.7, но для случая $x_c = 0.05$.

осью диска Галактики) очень слаба, как это было показано в [42]. По этой причине мы представляем результаты только для промежуточного значения $\alpha = \pi/4$. Плотность СТМ нормирована на плотность 7.3×10^{-23} г см $^{-3}$ СТМ с массой $M = 10^{-6}M_\odot$, возникших из пиков 2σ в случае степенного спектра возмущений с показателем степени $n_p = 1$.

Следует заметить, что приливный радиус СТМ в балдже [266]

$$r_t^3 = \frac{GM(r_t)}{\omega_p^2 - d^2\phi/dl^2}, \quad (1.121)$$

где $\omega_p \simeq [GM_b(l)/l^3]^{1/2}$ – угловая скорость в перицентре, $M_b(l)$ – профиль массы балджа, и $\phi(l)$ – гравитационный потенциал балджа. Для рассматриваемых мелкомасштабных СТМ $r_t \geq 0.2R_i$, и, таким образом, приливный радиус не является критическим фактором для разрушения СТМ.

1.3.4. Трансформация функции распределения сгустков

В этом разделе мы рассматриваем модификацию функции масс СТМ в Галактике, принимая во внимание постепенную потерю массы СТМ вместо про-

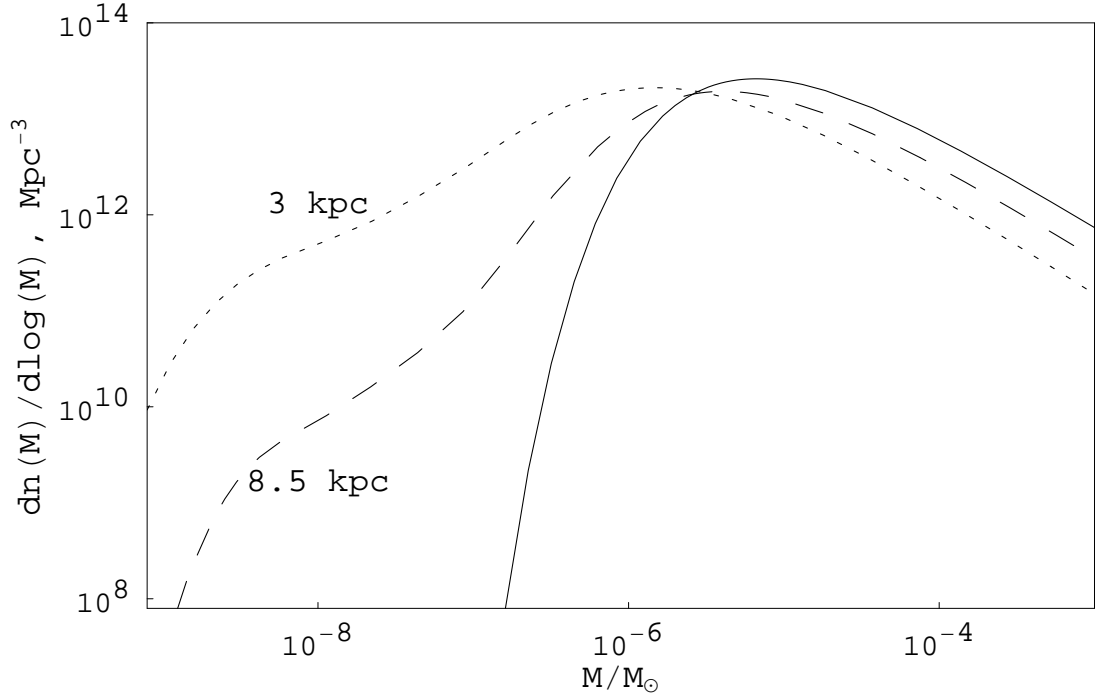


Рис. 1.9. Полученная численным методом модифицированная функция масс остатков СТМ на галактоцентрических расстояниях 3 и 8.5 кпк. Сплошная кривая показывает начальную функцию масс.

цесса полного разрушения, рассмотренного в [33, 42].

Согласно аналитической модели [33] и численному моделированию [69], дифференциальная концентрация мелкомасштабных СТМ в сопутствующей системе отчета $n(M) dM \propto dM/M^2$. Это распределение показано на Рис. 1.9 сплошной линией. Сглаживание мелкомасштабных возмущений с $M < M_{\min}$ дает дополнительный множитель $\exp[-(M/M_{\min})^{2/3}]$, ответственный за затухание возмущений при малых M . Результаты численного моделирования [69] могут быть выражены в виде дифференциальной функции масс СТМ в гало Галактики $f(M) dM \simeq \kappa(dM/M)$, где $\kappa \simeq 8.3 \times 10^{-3}$. Выражение (1.74) дает приближенно $\kappa \simeq 4 \times 10^{-3}$ для интервала масс $10^{-6} M_{\odot} < M < 1 M_{\odot}$.

Используя формализм предыдущего раздела, мы получаем функцию распределения остатков СТМ в зависимости от начальных масс СТМ M_i . Для этого мы численно вычисляем массу остатка μ в зависимости от начальной массы M_i для различных элементов $\Delta p \Delta \gamma \Delta \epsilon$ пространства параметров в (1.120). Затем для фиксированных интервалов $\Delta \mu$ величин μ мы производим суммирование функции распределения с весами, даваемыми (1.120), но без символа

интегрирования и Θ -функции. Итоговая функция масс показана на Рис. 1.9 для двух расстояний от центра Галактики. В вычислениях предполагалось, что радиус ядра очень мал, так что все массы остатков СТМ допустимы. С конечным размером ядра функция масс имела бы обрезание на радиусе ядра СТМ с минимальной массой M_{\min} . Из Рис. 1.9 видно, что остатки СТМ существуют при $M < M_{\min}$. В балдже (близко к центру Галактики) остатки СТМ более многочисленны из-за интенсивного разрушения СТС в области большой концентрации звезд по сравнению с разреженным звездным гало.

Другим важным моментом является полное разрушение тех СТМ, орбиты которых полностью заключены в балдже. Несмотря на это концентрация СТМ в балдже ненулевая, т.к. большая часть СТМ имеет орбиты, выходящие за пределы балджа. Эти “транзитные” СТМ проводят внутри балджа лишь малую часть своего орбитального периода, и поэтому избегают полного разрушения.

1.3.5. Гравитационные удары от диска и роль отдельных звезд

Выше мы применяли формализм гравитационных ударов, испытываемых СТМ со стороны усредненного гравитационного поля всех звезд диска. В ряде работ диск рассматривался как совокупность звезд, и приливное разрушение было рассчитано как в случае пролета СТМ через бесконечную среду из точечных масс (звезд), но в течение конечных интервалов времени, за которые СТМ пересекает диск, и при этом коллективное поле диска не принималось во внимание. Исключение составляет работа [267], в которой численный расчет разрушения СТМ был выполнен с учетом коллективного гравитационного потенциала всех подсистем Галактики, но их относительный вклад не указан.

Покажем, что в типичных случаях именно коллективное поле диска дает основной вклад в разрушение СТМ. Звезды, расположенные вблизи траектории СТМ в диске являются источником флуктуирующего приливного гравитационного поля, но вклад этих флуктуаций на расстоянии $r_{\odot} = 8.5$ кпк от центра Галактики в лучшем случае (для самых малых СТМ) одного порядка со вкладом коллективного поля диска. Действительно, рассмотрим СТМ, пересекающий диск под углом θ к его нормали на расстоянии r от центра Галактики. Согласно (1.104), прирост энергии при единичном приливном взаимо-

действию со звездой быстро спадает с увеличением прицельного параметра как $\propto 1/l^4$. Это обстоятельство позволяет значительно упростить вычисления вклада гравитационных взаимодействий с отдельными звездами, т.к. интегралы по прицельным параметрам (1.107) или (1.116) набираются только от области в непосредственной близости от траектории. С помощью изложенного в предыдущих разделах формализма находим прирост внутренней энергии СТМ при одном пролете через диск в результате взаимодействия с отдельными звездами по отношению к приросту от гравитационного удара коллективным полем диска:

$$\frac{\Delta E^{\text{stars}}}{\Delta E^{\text{disk}}} \sim 0.6 \left(\frac{R}{0.015 \text{ пк}} \right)^{-2} e^{(r-r_{\odot})/r_0} \cos \theta, \quad (1.122)$$

где $r_0 = 4.5$ кпк, а $R = 0.015$ пк – радиус СТМ с массой Земли $3 \times 10^{-6} M_{\odot}$, образовавшийся из пика высотой $\nu = 2$ в случае спектра возмущений с $n_p = 0.96$. Т. е., только для СТМ минимальных масс при $r \geq r_{\odot}$ оба вклада сравнимы, а при увеличении массы, и соответственно, радиуса СТМ вклад коллективного поля будет преобладать.

1.4. Профиль плотности сгустков

Помимо усредненных характеристик СТМ, важен вопрос об их внутренней структуре, особенно в центральной области, где аннигиляция частиц ТМ может идти наиболее эффективно ввиду высокой плотности.

Исследованию внутренней структуры СТМ было посвящено множество работ, хотя до сих пор этот вопрос остается нерешенным в одной очень важной его части: какой физический процесс и на каком радиусе останавливается рост плотности во время формирования СТМ? Область внутри этого радиуса называют ядром (англ. core). Этот радиус очень важен для исследования аннигиляционных сигналов, поэтому далее в этой главе мы обсудим ряд процессов, возможно, ответственных за формирование центрального ядра.

1.4.1. Ограничения на радиус ядра из теоремы Лиувилля

Теорема Лиувилля ранее уже применялась для оценки максимальной плотности объектов, состоящих из нейтрино, рассматривавшихся как частицы ТМ

[2]. Сделаем аналогичный расчет для нейтралино, но с учетом дополнительного эффекта – пекулярных скоростей частиц ТМ. Из условия $F_L(p, q, t) = const$ можно найти ограничение на плотность ТМ, но, к сожалению, плотность может быть лишь ограничена, но не найдена с помощью теоремы Лиувилля, примененной только к начальному и конечному состоянию СТМ. Это связано с генерацией энтропии в промежуточных процессах [99]. Другими словами, фазовый объем становится очень дисперсным в процессе нелинейного перемешивания ТМ (см. Рис. 8.3 в книге [2]).

В астрофизике для удобства сопоставления с наблюдениями принято использовать величину

$$Q = \frac{\rho}{\sigma^{3/2}} \quad (1.123)$$

как функцию распределения, где $\sigma = \langle v_{\parallel}^2 \rangle = \langle v^2 \rangle / 3$ – одномерная дисперсия скоростей. Мы будем делать только теоретические оценки, поэтому в качестве функции распределения в центре СТМ возьмем просто $f_c = \rho_c / v^3$, где ρ_c – плотность в ядре, а v – характерная скорость частиц в ядре. Для приблизительно изотермического профиля $\rho(r) \propto r^{-2}$ скорость v порядка вириальной скорости во всем СТМ.

Найдем ограничение на R_c из теоремы Лиувилля, примененной к начальному и конечному состояниям. Есть два источника начальной энтропии или начальной дисперсии скоростей σ : тепловые скорости частиц ТМ в момент кинетического отщепления t_d и пекулярные скорости в случае адиабатических возмущений плотности.

Тепловая часть выражается через функцию распределения в момент t_d [2]:

$$f_p(p) d^3 r d^3 p = \frac{\rho_m}{m(2\pi m k T)^{3/2}} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} d^3 r d^3 p, \quad (1.124)$$

где ρ_m – плотность ТМ, которая может быть выражена через температуру Вселенной в любой момент посредством закона сохранения локальной энтропии $g_* T^3 a^3 = const$, где g_* – эффективное число степеней свободы при температуре T , а m – масса частицы ТМ. Функция распределения в ядре меньше, чем начальная функция распределения, которая имела максимум при $p = 0$. Поэтому используем неравенство $f_c < f_p(p = 0)$. Для изотермического профиля

плотности в СТМ оно дает ограничение

$$\frac{R_c}{R} > \frac{2\pi^{1/2}\bar{\rho}^{1/4}T_d^{3/4}}{3^{1/4}G^{3/4}M^{1/2}m^{3/4}\rho_m^{1/2}(t_d)}. \quad (1.125)$$

Рассматриваем нейтралино с массами $m = 100$ ГэВ с температурой отщепления $T_d \simeq 25$ MeV. Результаты вычислений (1.125) для некоторых примеров приведены в Таблице 1.3.

Рассмотрим теперь пекулярные скорости, которые генерируются в результате гравитационной неустойчивости и могут играть роль, аналогичную тепловым скоростям в ограничении по теореме Лиувилля [98]. Пекулярная скорость на некотором масштабе массы в случае плоской метрики Вселенной может быть выражена следующим образом [126]

$$\mathbf{v} = \frac{Ha}{4\pi} \nabla_x \int \frac{d^3x' \delta(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}. \quad (1.126)$$

Растущая мода заключает в себе $2/5$ часть от (1.126). После момента t_{eq} спадающая мода быстро затухает, развиваются пекулярные скорости, которые затем растут как $\propto t^{1/3}$. Однако плотность ТМ во Вселенной уменьшается как $\propto t^{-2}$, поэтому функция распределения в фазовом объеме уменьшается. Плотность прекращает уменьшаться только в области возмущения, когда оно обособится от космологического расширения. Расчет радиуса ядра дает:

$$\frac{R_c}{R} = 0.01\delta_{\text{eq}}^{9/2}. \quad (1.127)$$

Примеры расчетов для характерных параметров приведены в Таблице 1.3 (ее последний столбец обсуждается в разделе 2.7.1).

Таблица 1.3. Параметры СТМ для трех примеров и относительные радиусы ядер за счет различных эффектов, обсуждавшихся в тексте.

M/M_\odot	$\bar{\rho}$, г см $^{-3}$	δ	R_c/R , Lio. ther.	R_c/R , Lio. pec.	R_c/R , ann.
10^{-6}	3×10^{-23}	$\delta_{\text{eq}} = 0.009$	4×10^{-3}	6×10^{-12}	2.6×10^{-5}
10^{-6}	4.2×10^{-16}	$\delta_H = 0.05$	0.24	—	0.1
0.1	2.5×10^{-17}	$\delta_{\text{eq}} \simeq 1$	4×10^{-4}	0.01	2.5×10^{-2}

1.4.2. Влияние приливных сил на профиль плотности

В этом разделе мы рассмотрим модификацию профиля плотности СТМ под действием приливных сил со стороны окружающих возмущений и рассчитаем радиус R_c , на котором возникает излом профиля плотности [33]. Приливные силы оказывают влияние на СТМ благодаря несферичности и неоднородности (наличия субструктур) рассматриваемой флуктуации плотности.

Разложим гравитационный потенциал в ряд в точке максимума $\mathbf{r} = 0$:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_0 + \left. \frac{\partial \phi}{\partial r^i} \right|_0 r^i + \frac{1}{6} \Phi_{ll}|_0 \delta_{ij} r^i r^j + \frac{1}{2} T_{ij}|_0 r^i r^j + \dots, \quad (1.128)$$

где

$$\Phi_{ij} = \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial r^i \partial r^j}, \quad T_{ij} = \Phi_{ij} - \frac{1}{3} \Phi_{ll} \delta_{ij}. \quad (1.129)$$

Первый член разложения (1.128) не влияет на движение частиц. Второй член равен нулю, т.к. он взят в максимуме плотности. Третий член описывает сферически симметричную часть потенциала, включая потенциал однородного фона, и определяет радиальное движение частиц. Согласно уравнению Пуассона,

$$\Phi_{ll} = \Delta \phi(\mathbf{r}) = 4\pi G \bar{\rho} (1 + \delta(\mathbf{r})). \quad (1.130)$$

Наконец, четвертый член, содержащий бесследовую матрицу T_{ij} , описывает приливные силы. Они возмущают радиальное движение частиц, препятствуя их фокусировке в центре.

Из уравнения (1.130) следует, что спектр мощности $P_\Phi(k)$ потенциала возмущений связан с $P(k)$ следующим образом

$$P_\Phi(k) = (4\pi)^2 G^2 \bar{\rho}^2 k^{-4} P(k). \quad (1.131)$$

Введем моменты спектра $P(k)$

$$\sigma_{(j)}^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk P(k) k^{2j} \quad (1.132)$$

и аналогичные моменты $s_{(j)}^2$ для возмущений поля гравитационного потенциала.

Из (1.131) следует, что

$$s_{(j)}^2 = (4\pi)^2 G^2 \bar{\rho}^2 \sigma_{(j-2)}^2 \quad (1.133)$$

где $j \geq 2$. Определим $\zeta_{ij} = \partial^2 \delta(\mathbf{r}) / \partial r^i \partial r^j$. Тогда, согласно [121], среднее по ансамблю

$$\langle \zeta_{ij} \zeta_{kl} \rangle = \frac{\sigma_{(2)}^2}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (1.134)$$

из этого следует, что

$$\langle T_{ij} T_{ji} \rangle = \frac{2}{3} s_{(2)}^2 = \frac{2}{3} (4\pi)^2 G^2 \bar{\rho}^2 \sigma_{(0)}^2. \quad (1.135)$$

Скорость $\mathbf{v}(t)$ есть сумма радиальной скорости \mathbf{v}_{rad} и дополнительной скорости \mathbf{v}_{tid} , вызываемой приливными силами, которая будет рассматриваться как малая поправка. Радиальная скорость (т. е., нулевое приближение):

$$\frac{d\mathbf{v}_{\text{rad}}}{dt} = -\text{grad } \phi(r), \quad (1.136)$$

где сферически симметричный потенциал $\phi(r)$ дается третьим членом в правой части уравнения (1.128). Это уравнение определяет радиальное движение частиц, и его решение дается известными выражениями [126].

Приливные силы дают вклад в дополнительную скорость \mathbf{v}_{tid} :

$$\frac{dv_{\text{tid},i}}{dt} = -T_{ij}(t)r^j \quad (1.137)$$

где в линейном приближении

$$T_{ij}(t) = T_{ij}(t_{\text{eq}}) \left(\frac{t}{t_{\text{eq}}} \right)^{-4/3}. \quad (1.138)$$

Линейное приближение для приливных сил оправдано тем, что они генерируются крупномасштабными возмущениями, которые становятся нелинейными позже, чем рассматриваемые мелкомасштабные СТМ.

Найдем величину \mathbf{v}_{tid} в тот момент, когда развиваются нелинейности в плотности $\delta \simeq 1$, или более точно в момент максимального расширения t_s . После интегрирования (1.137) с помощью уравнений радиального движения получаем

$$v_{\text{tid},i}(t_s) = 18^{1/3} \left(\frac{5\delta_{\text{eq}}}{3} \right)^{1/2} t_{\text{eq}} f(\delta_{\text{eq}}) T_{ij}(t_{\text{eq}}) r^j(t_s), \quad (1.139)$$

где функция

$$f(\delta_{\text{eq}}) = \frac{2}{3} \int_{(5\delta_{\text{eq}}/3)^{1/2}}^{\pi/2} d\phi \left(\phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi \right)^{-4/3} \sin^4 \phi \quad (1.140)$$

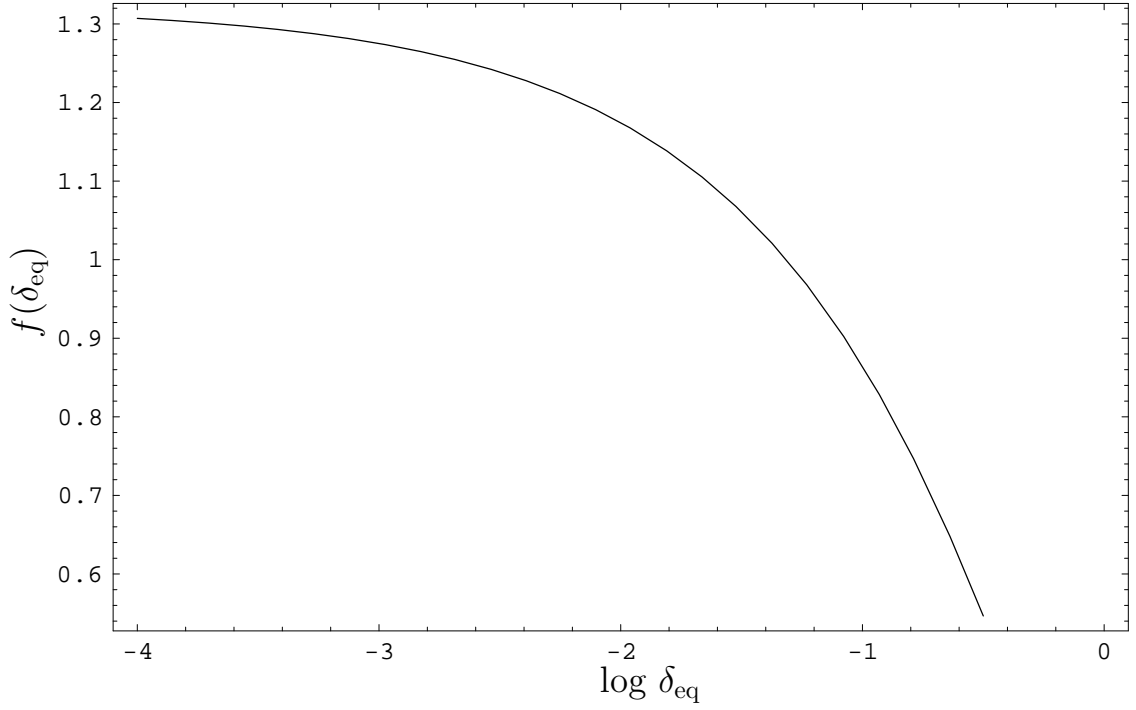


Рис. 1.10. Функция $f(\delta_{\text{eq}})$, определяемая уравнением (1.140).

показана на Рис. 1.10.

Можно приближенно положить $f(\delta_{\text{eq}}) \simeq 1$ (асимптотически $f(\delta_{\text{eq}}) \rightarrow 1.32$ at $\delta_{\text{eq}} \rightarrow 0$).

Для вычисления радиуса R_c будем использовать формализм [51]. Поскольку $\text{rot } \mathbf{v}_{\text{tid}} = 0$ и $\text{div } \mathbf{v}_{\text{tid}} = 0$, то для оценки запишем характерные значения тензора T_{ij} в системе координат, связанной с главными осями, в виде $T'_{ij} \simeq \text{diag}\{\tau, \tau, -2\tau\}$. Величина τ связана с R_c через соотношение $\Delta E \simeq \Delta V$, где $\Delta E \simeq \int d^3r \rho_{\text{int}}(t_s) v_{\text{tid}}^2(t_s)/2$ – работа, производимая приливными силами, и $\Delta V \simeq GMM_c/R$, где $M_c \sim 4\pi R_c^3 \rho_c/3$ – потенциальная энергия ядра. Это дает

$$x_c \simeq \frac{2^{2/3} 3^{10/3} \tau^2 t_{\text{eq}}^2 \delta_{\text{eq}}}{\pi G \bar{\rho}_{\text{int}}} f^2(\delta_{\text{eq}}). \quad (1.141)$$

Из инвариантности следа матрицы относительно замены координат имеем

$$\tau^2 = T'_{ij} T'_{ji}/6 = T_{ij} T_{ji}/6. \quad (1.142)$$

Поскольку коррелятор

$$\langle T_{ij} \delta \rangle = \langle (\Phi_{ij} - \frac{1}{3} \Phi_{ll} \delta_{ij}) (\Phi_{ll} (4\pi G \bar{\rho})^{-1} - 1) \rangle = 0, \quad (1.143)$$

то величины δ и T_{ij} статистически независимы, и мы можем усреднять их независимо. Усредняя $\langle \tau^2 \rangle$ по полю приливных сил T_{ij} с помощью (1.135) и (1.142),

получаем следующий результат для радиуса R_c , на котором происходит излом профиля плотности

$$x_c = \frac{R_c}{R} \simeq \frac{\pi 2^{5/3} 3^{13/3}}{5^3} G \rho_{\text{eq}} t_{\text{eq}}^2 \nu^{-2} f^2(\delta_{\text{eq}}) \simeq 0.3 \nu^{-2} f^2(\delta_{\text{eq}}), \quad (1.144)$$

где ν - введенная ранее относительная высота пика.

Возмущения с $\nu \sim 0.5 - 0.6$ имеют $x_c \sim 1$, т. е. эти СТМ полностью разрушаются приливными возмущениями. Большинство галактических СТМ формируются из возмущений с $\nu \sim 1$. Те СТМ, которые выживают до настоящего момента, характеризуются величиной $\nu \simeq 1.6$, но наибольший вклад в аннигиляционный сигнал идет от СТМ с $\nu \simeq 2.5$, для которых $x_c \simeq 0.05$.

1.5. Аннигиляция частиц в сгустках

Локальный темп аннигиляции пропорционален квадрату концентрации частиц ТМ. Концентрация частиц в СТМ намного больше концентрации в диффузной (некластеризованной) компоненты ТМ. По этой причине аннигиляционный сигнал от СТМ в большинстве случаев доминирует над сигналом от диффузной компоненты, даже если СТМ заключают в себе малую долю ТМ.

Выражение сечения аннигиляции $\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle$ через относительную скорость v двух частиц ТМ имеет вид

$$\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle = a + bv^2 + cv^4 + \dots \quad (1.145)$$

где a включает вклад только от s-волны, а b - как от s-, так и от p-волн. При малых скоростях $v \ll 1$ можно ограничиться только первым слагаемым.

Ожидается, что проявлением аннигиляции ТМ будет поток гамма-излучения, поиск которого выполняется с помощью космической гамма-обсерватории им. Э. Ферми. Основным инструментом обсерватории является Телескоп Широкого Поля (Large Area Telescope - LAT). В диапазоне энергий вблизи 1 ГэВ телескоп Fermi-LAT обладает разрешением около 1° , это соответствует его "point-spread function" на уровне 68% [268]. Объекты с большим угловым размером с точки зрения Fermi-LAT уже нельзя рассматривать как точечный, и в каждом направлении телескоп будет видеть только часть их гамма-излучения.

Наблюдаемые потоки заряженных частиц в составе космических лучей сравнивают с моделью вторичной генерации, которая была разработана В.Л. Гинзбургом и С.И. Сыроватским [269], [270], а ее современная версия в виде удобного пакета компьютерных программ GALPROP представлена в [271]. Эта модель является основой для выявления различных аномалий в спектрах, которые могут указывать на аннигиляцию частиц ТМ.

1.5.1. Параметризация аннигиляционного сигнала

При расчете аннигиляционного сигнала удобно разделить факторы, связанные со свойствами частиц ТМ, и “астрофизические” факторы, обусловленные распределением ТМ. В последние факторы входит, в частности, характер кластеризации ТМ и наличие СТМ. Для майорановских частиц ТМ число актов аннигиляции в элементе объема δV в канале аннигиляции F равно $\delta N = (1/2)[\rho(\mathbf{r})/m]^2 \langle \sigma_F v \rangle \delta V$. Следуя [46], запишем наблюдаемый поток (число фотонов на единицу площади в единицу телесного угла за секунду в единицу интервала энергии из направления ψ , усредненный по телесному углу $\Delta\Omega$):

$$J_\gamma(E, \psi, \Delta\Omega) = 9.4 \times 10^{-11} \frac{dS_f}{dE} \langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}, \quad (1.146)$$

где

$$\frac{dS_f}{dE} = \left(\frac{100 \text{ ГэВ}}{m_\chi} \right)^2 \sum_F \frac{\langle \sigma_F v \rangle}{10^{-26} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}} \frac{dN_\gamma^F}{dE}, \quad (1.147)$$

а астрофизический фактор в направлении ψ , усредненный по $\Delta\Omega$,

$$\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega} = \frac{1}{8.5 \text{ кpc}} \frac{1}{\Delta\Omega} \int d\Omega' \int dL \left(\frac{\rho(r)}{0.3 \text{ ГэВ см}^{-3}} \right)^2. \quad (1.148)$$

Интегрирование идет вдоль луча зрения. Здесь dN_γ^F – число фотонов на один акт аннигиляции (на пару проаннигилировавших частиц). Для дираковских частиц в (1.146) добавляется дополнительный коэффициент $1/2$, при этом $\rho = \rho_+ + \rho_-$ по-прежнему обозначает суммарную плотность частиц и античастиц.

Рассмотрим СТМ с внутренним профилем плотности $\rho_{\text{int}}(r)$ и полной массой $M = \int 4\pi r^2 \rho_{\text{int}}(r) dr$. Темп аннигиляции (число проаннигилировавших ча-

стиц, равное удвоенному числу событий аннигиляции) в одном СТМ

$$\dot{N}_{\text{cl}} = 4\pi \int_0^{\infty} r^2 dr \rho_{\text{int}}^2(r) m^{-2} \langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle = \frac{3}{4\pi} \frac{\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle M^2}{m^2 R^3} S, \quad (1.149)$$

где m_χ – масса частицы ТМ, v – относительная скорость двух частиц ТМ при столкновении. Предполагается, что $\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle = \text{const}$. Функция S определяется выражением (1.149) и зависит от распределения ТМ внутри СТМ. В частности, $S = 1$ для простейшего случая, когда СТМ имеет постоянную плотность, т. е. $\rho_{\text{int}}(r) = \text{const}$ при $r \leq R$ и $\rho_{\text{int}}(r) = 0$ при $r > R$ и $S \simeq 4/(9x_c)$ для изотермического профиля $\rho \propto r^{-2}$ с малым ядром $x_c \ll 1$.

Используя $\rho_{\text{int}}(r)$ из (1), легко получить S из (1.149) в следующем виде

$$S(x_c, \beta) = \frac{(3 - \beta)^2}{3(2\beta - 3)} \left(\frac{2\beta}{3} x_c^{3-2\beta} - 1 \right) \left(1 - \frac{\beta}{3} x_c^{3-\beta} \right)^{-2}, \quad (1.150)$$

где $x_c = R_c/R$.

В случае обычных $m \sim 100$ ГэВ нейтралино темп генерации гамма-квантов $\sim 2\eta_{\pi^0} \dot{N}_{\text{cl}}$, где $\eta_{\pi^0} \sim 10$ – множественность нейтральных пионов, распадающихся на фотоны $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. Кумулятивный сигнал под углом ψ по отношению к центру галактики

$$J_\gamma(E > m_{\pi^0}/2, \psi) = 1.9 \times 10^{-10} \left(\frac{m}{100 \text{ ГэВ}} \right)^{-2} \frac{\langle \sigma v \rangle}{10^{-26} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}} \langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}, \quad (1.151)$$

где астрофизический множитель

$$\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega} = \int d\xi_{\text{cl}} \left(\frac{\rho_{\text{cl}}}{0.3 \text{ ГэВ см}^{-3}} \right) \int_{l.o.s.} \frac{dL}{8.5 \text{ кпк}} \left(\frac{\rho_H(r)}{0.3 \text{ ГэВ см}^{-3}} \right), \quad (1.152)$$

последнее интегрирование идет вдоль луча зрения, и предполагается, что в ξ_{cl} уже включена вероятность выживания СТМ.

1.5.2. Усиление аннигиляционного сигнала

Коэффициент усиления аннигиляционного сигнала часто называется буст-фактором (boost-factor). Как правило, рассматривается усиление по сравнению с моделью, в которой гало Галактики не имеет мелкомасштабных субструктур.

Например, буст-фактор порядка 10 требуется для интерпретации наблюдаемого EGRET избытка гамма-излучения в модели аннигиляции нейтралино [272].

Буст-фактор в направлении ζ (угол между лучом зрения и направлением на центр Галактики) определяется как

$$\eta(\zeta) = \frac{J^{\text{cl}}(\zeta) + J^{\text{hom}}(\psi)}{J^{\text{hom}}(\zeta)}, \quad (1.153)$$

где $J^{\text{hom}}(\zeta)$ – сигнал от некластеризованной ТМ в гало. Если $\langle\sigma v\rangle$, то буст-фактор не зависит от свойств частиц ТМ. Расстояние l между СТМ и центром Галактики можно выразить через r (в данном случае это расстояние от Земли до СТМ), $r_\odot = 8.5$ кпк (расстояние от Солнца до центра Галактики) и ζ следующим образом $l(\zeta, r) = (r^2 + r_\odot^2 - 2rr_\odot \cos \zeta)^{1/2}$, где максимальное расстояние от Солнца до внешней границы гало в направлении ζ , $r_{\text{max}}(\zeta) = (R_H^2 - r_\odot^2 \sin^2 \zeta)^{1/2}$, где $R_H \sim 100$ кпк – вириальный радиус гало Галактики.

Сделаем сначала простую оценку буст-фактора для аннигиляционного сигнала, проинтегрированного по всем углам. Предположим, что концентрация СТМ пропорциональна плотности гало, т. е. $n_{\text{cl}}(l)$ пропорциональна некластеризованной компоненте ТМ, $\rho_{\text{DM}}(l)$: $n_{\text{cl}}(l) = \xi \rho_{\text{DM}}(l)/M$, где $\xi \ll 1$. С хорошей точностью это справедливо для мелкомасштабных СТМ. Напротив, распределение больших СТМ, полученное в численном моделировании [251], в центральной области гало сильно отличается от распределения мелкомасштабных СТМ ввиду приливного разрушения СТМ в этом регионе. Тем не менее, сигнал от СТМ в основном определяется СТМ с минимальными массами. Также предположим, что СТМ имеют одну характерную массу и составляют долю ξ от всей ТМ. Введем эффективную плотность частиц ТМ в гало

$$\tilde{\rho}_{\text{DM}} \equiv \frac{\int_0^\pi d\zeta \sin \zeta \int_0^{r_{\text{max}}(\zeta)} dr \rho_{\text{DM}}^2(l(\zeta, r))}{\int_0^\pi d\zeta \sin \zeta \int_0^{r_{\text{max}}(\zeta)} dr \rho_{\text{DM}}(l(\zeta, r))} = 4.26 \times 10^{-23} \text{ г см}^{-3}. \quad (1.154)$$

В результате, для коэффициента усиления получаем удобную оценку

$$\eta \approx 1 + \xi S(x_c, \beta) \frac{\bar{\rho}_{\text{int}}}{\tilde{\rho}_{\text{DM}}}, \quad (1.155)$$

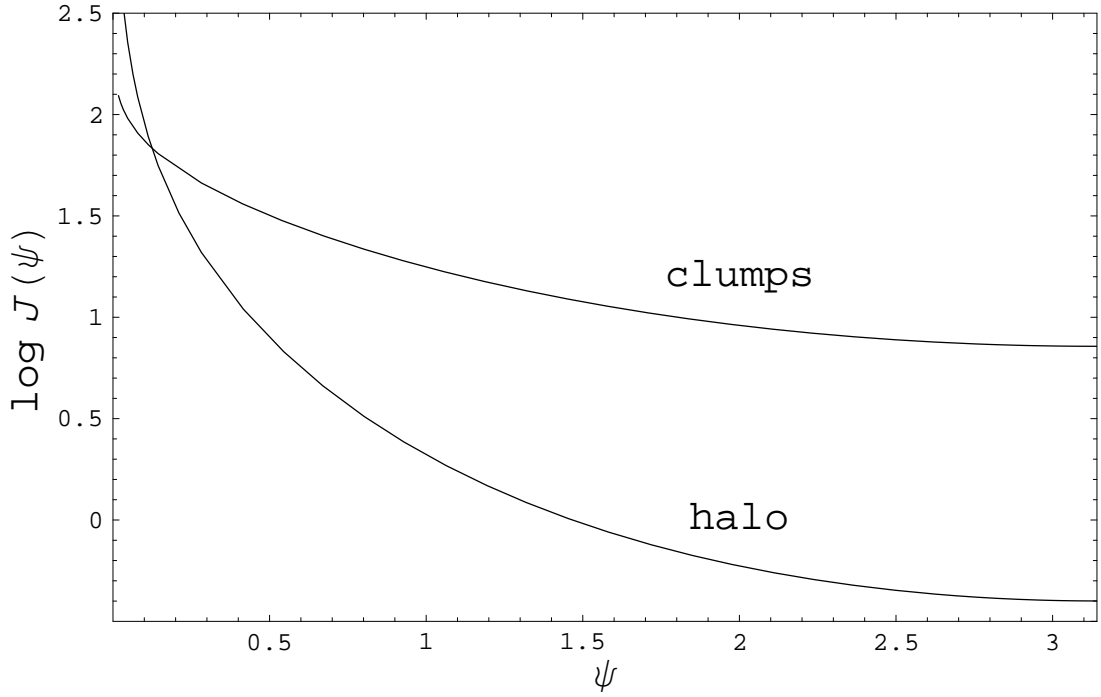


Рис. 1.11. Астрофизический фактор $J(\psi)$ как функция угла ψ (в радианах) между лучом зрения и направлением на центр Галактики.

где $S(x_c, \beta)$ дается выражением (1.150). Если для примера взять параметры $\beta \simeq 1.8$, $x_c \simeq 0.05$, $S(x_c, \beta) \simeq 5$, $\tilde{\rho}_{\text{DM}} \sim \rho_{\text{DM}}(r_\odot) \sim 0.3 \text{ ГэВ см}^{-3}$, $\bar{\rho}_{\text{int}} \sim 2 \times 10^{-22} \text{ г см}^{-3}$, $\xi \sim 0.001$, из (1.155) следует численная оценка $\eta \sim 3$.

Рассчитаем теперь более точно усиление аннигиляционного сигнала в гало Галактики, обусловленное присутствием в нем СТМ с $M_{\text{min}} \sim 10^{-6} M_\odot$, образовавшихся из стандартного степенного спектра возмущений, нормированного на данные WMAP. Функцию распределения этих СТМ, возникшую в процессе иерархического сгущивания, положим равной (1.72), а для вероятности выживания СТМ в галактике воспользуемся результатами раздела 1.3.3. Результаты расчетов показаны на Рис. 1.11 и Рис. 1.12, а зависимость от минимальной массы продемонстрирована на Рис. 1.13.

Основная часть выживших СТМ формируется из возмущений со средней величиной пика

$$\langle \nu \rangle \simeq \frac{\int d\nu \nu^2 e^{-\nu^2/2}}{\int d\nu \nu e^{-\nu^2/2}} \simeq 1.6, \quad (1.156)$$

где весовой множитель $\nu \exp(-\nu^2/2)$ происходит из (1.72). Тем не менее, глав-

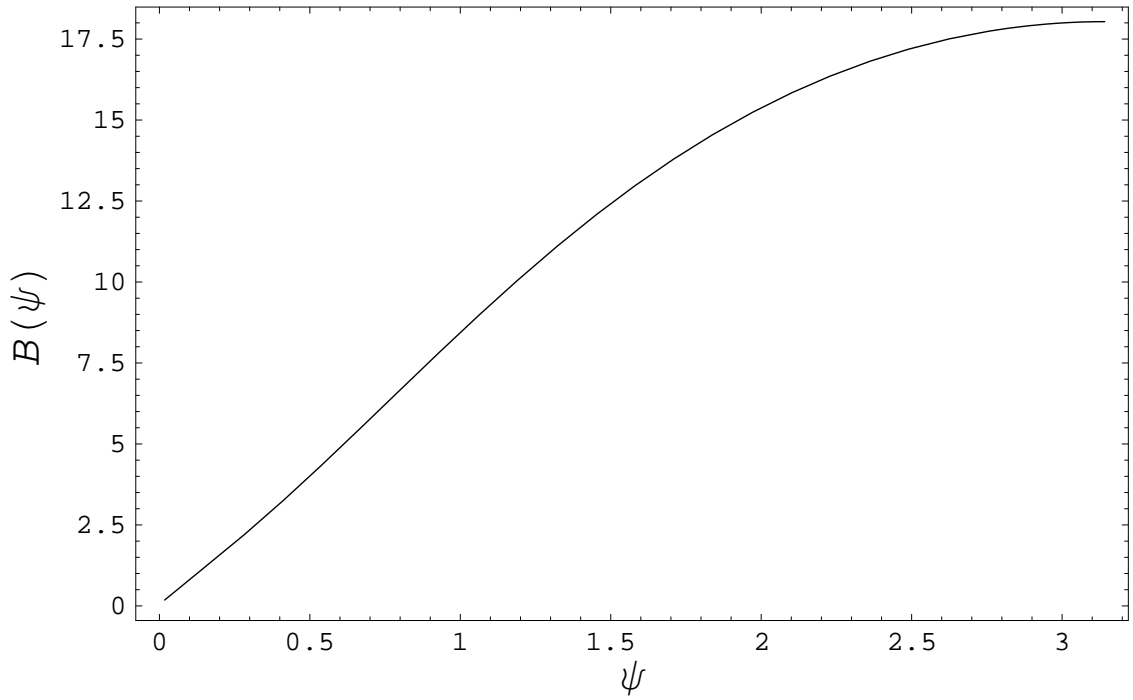


Рис. 1.12. Фактор усиления $B(\psi)$ сигнала, который может наблюдаться на Земле, как функция угла ψ (в радианах) между лучом зрения и направлением на центр Галактики.

ный вклад в усиление интегрального сигнала происходит от СТМ с эффективной величиной высоты пика

$$\langle \nu \rangle_{\text{ann}} \simeq \frac{\iint d\nu \nu S \xi \bar{\rho}_{\text{int}} dM/M}{\iint d\nu S \xi \bar{\rho}_{\text{int}} dM/M} \simeq 2.5 \quad (1.157)$$

для случая $\beta = 1.8$ и $x_c \simeq 0.05$.

1.5.3. Усиление сигнала в скоплениях галактик

В (1.148) интегрирование идет вдоль луча зрения, в случае гало нашей Галактики мы должны выразить расстояние до центра галактики r через соответствующие переменные следующим образом $r(\psi, L) = (L^2 + r_{\odot}^2 - 2Lr_{\odot} \cos \psi)^{1/2}$, где $r_{\odot} = 8.5$ кпк – расстояние Солнца от центра Галактики, ψ – угол между лучом зрения и направлением на центр Галактики. Интегрирование по L заканчивается на расстоянии $L_{\text{max}}(\psi) = (R^2 - r_{\odot}^2 \sin^2 \psi)^{1/2} + r_{\odot} \cos \psi$, где R – вириальный радиус галактики.

Для скопления Virgo расстояние от Земли до центра скопления превышает вириальный радиус скопления. Поэтому интегрирование по L ограничено вели-

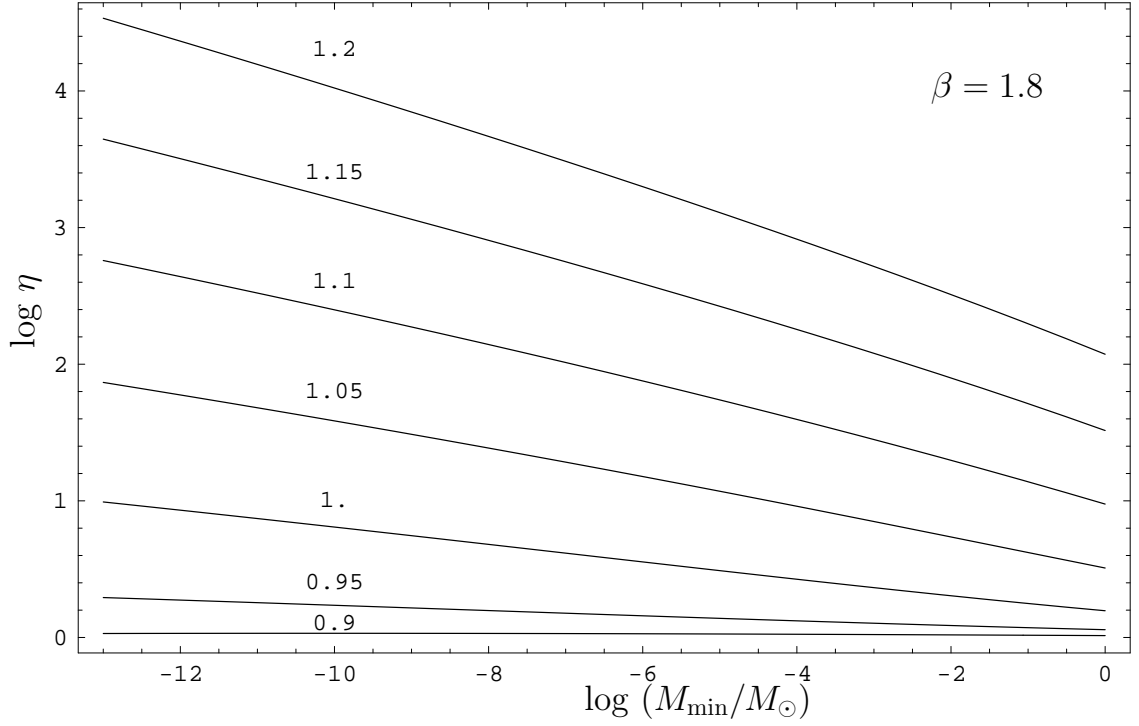


Рис. 1.13. Усиление интегрального (проинтегрированного по углам) сигнала для степенного профиля плотности СТМ с показателем степени $\beta = 1.8$ и различных показателях степени $n_p = 0.9 - 1.2$ первичного спектра возмущений плотности.

чинами $L_{\max, \min}(\psi) = \pm(R^2 - r_V^2 \sin^2 \psi)^{1/2} + r_V \cos \psi$, и $\sin \psi < \sin \psi_{\max} = R/r_V$, где расстояние до центра Virgo до Земли $r_V = 16.5$ Мпк [273].

Используем профиль (3), в котором для Галактики $R_s = a^G = 20$ кпк, размер гало (вириальный радиус) $R = R^G = 200$ кпк и $\rho_0^G = 6.8 \times 10^6 M_\odot/\text{кпк}^3$. Для скопления Virgo имеем $R_s = a^V = 0.58$ Мпк (это следует из величины концентрации $c^V = 4.1$), вириальный радиус $R^V = 2.4$ Мпк и $\rho_0^V = 1.0 \times 10^5 M_\odot/\text{кпк}^3$ (это получено из величины $M^V \sim 2.1 \times 10^{14} M_\odot$).

Сравним сначала сигналы от диффузных компонент ТМ в центральных областях скопления Virgo и Галактики с угловыми размерами $\delta\psi = 1^\circ$ (как в работе [274]). Численный расчет дает

$$\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Milky Way}) \simeq 1.42 \times 10^3, \quad (1.158)$$

$$\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Virgo}) \simeq 5 \times 10^{-2}, \quad (1.159)$$

$$\frac{\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Virgo})}{\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Milky Way})} = 3.5 \times 10^{-5}. \quad (1.160)$$

Сравним сигналы, проинтегрированные по углу $\Delta\Omega = 4\pi$ для Галактики

и $\Delta\Omega = 2\pi(1 - \cos\psi_{\max}) = 0.067$ для Virgo.

$$\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Milky Way}) \simeq 3.0, \quad (1.161)$$

$$\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Virgo}) \simeq 9 \times 10^{-4}, \quad (1.162)$$

$$\frac{\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Virgo})}{\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Milky Way})} = 3 \times 10^{-4}. \quad (1.163)$$

Без усреднения по телесным углам:

$$\frac{\Delta\Omega \langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Virgo})}{\Delta\Omega \langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Milky Way})} = 1.6 \times 10^{-6}. \quad (1.164)$$

Интегральный сигнал от Virgo может быть легко оценен в предположении, что вся масса Virgo сконцентрирована на одинаковом расстоянии $r_V = 16.5$ Мпк – расстоянии до центра скопления. Это дает $\Delta\Omega \langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Virgo}) = 6.05 \times 10^{-5}$, в то время как точный расчет по формуле (1.148) дает величину 6.06×10^{-5} .

Однако центры Virgo и Галактики являются довольно плохими объектами для поиска аннигиляционных сигналов ввиду сильного загрязнения фонами от обычных астрофизических источников, в том числе от сигнала, генерируемого космическими лучами. К тому же, Virgo содержит галактику с активным ядром M87. Отношение сигнала к шуму может принципиально изменить шансы детектирования по сравнению с оценкой (1.160).

Рассмотрим теперь вклад мелкомасштабных СТМ. С хорошей точностью выполняется пропорциональность $n_{\text{cl}} = \xi \rho(r) P(r) / M$, где поправка $P(r)$ – вероятность выживания СТМ при разрушениях. Вклад СТМ в астрофизический фактор (1.148)

$$\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}^{\text{cl}} = \frac{\xi S \bar{\rho}_{\text{int}}}{8.5 \text{ кпк}} \frac{1}{\Delta\Omega} \int d\Omega' \int dL \frac{\rho(r)}{(0.3 \text{ ГэВ см}^{-3})^2}. \quad (1.165)$$

Величина (1.165) легко может быть обобщена $\xi \rightarrow \xi d\nu dM / M$ для включения дифференциальной доли ТМ в составе СТМ, где последнее интегрирование начинается от минимальной массы $M_{\min} \sim 10^{-6} M_{\odot}$. Для распределения (1.72) интегрирование $d\nu dM$ может быть выполнено аналитически:

$$\begin{aligned} \langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega} &\simeq 7.01 \left(\frac{S(x_c, \beta)}{S(0.01, 1.8)} \right) \left(\frac{\sigma_{\text{eq}}(M_{\min}, n_p)}{\sigma_{\text{eq}}(10^{-6} M_{\odot}, 0.963)} \right)^3 \times \\ &\times \frac{1}{\Delta\Omega} \int d\Omega' \int \frac{dL \rho(r)}{0.3 \text{ ГэВ см}^{-3}}, \end{aligned} \quad (1.166)$$

где $S(0.01, 1.8) \simeq 14.5$, $\sigma_{\text{eq}}(10^{-6}M_{\odot}, 0.963) \simeq 8.76 \times 10^{-3}$.

Для центральной 1° области Галактики и Virgo имеем

$$\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Milky Way}) \simeq 1.38 \times 10^2, \quad (1.167)$$

$$\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Virgo}) \simeq 13.3, \quad (1.168)$$

$$\frac{\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Virgo})}{\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Milky Way})} = 9.6 \times 10^{-2}. \quad (1.169)$$

Сигнал, проинтегрированный по углам:

$$\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Milky Way}) \simeq 14.9, \quad (1.170)$$

$$\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Virgo}) \simeq 1.3, \quad (1.171)$$

$$\frac{\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Virgo})}{\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Milky Way})} = 0.09. \quad (1.172)$$

Без усреднения по телесным углам:

$$\frac{\Delta\Omega \langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Virgo})}{\Delta\Omega \langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega}(\text{ Milky Way})} = 4.8 \times 10^{-4}. \quad (1.173)$$

1.5.4. Анизотропия аннигиляции в гало

Обычным предположением при вычислениях аннигиляционного сигнала является сферическая симметричность гало Галактики. В этом случае анизотропия аннигиляционного гамма-излучения обусловлена только нецентральной позицией Солнца в Галактике. Тем не менее, принципиальное значение несферичности гало для наблюдаемого аннигиляционного сигнала было продемонстрировано в [252]. Согласно наблюдениям, оси эллипсоидального гало Галактики различаются не более, чем на 10 – 20%, однако не может быть полностью исключена и большее, вплоть до двукратного, различие осей [275, 276]. Это ведет к неопределенности до порядка величины в предсказаниях аннигиляционных сигналов из направления антицентра Галактики [252]. Следует отметить также очевидную анизотропию аннигиляционного сигнала, обусловленную кластеризацией ТМ [277]. В принципе, близкие СТМ могут быть видны в гамма-наблюдениях неба как точечные источники [252]. Другой второстепенный источник аннигиляционной анизотропии – это дипольная анизотропия, возникающая по причине движения Солнца в галактике [278].

В работе [279] обсуждалась анизотропия по отношению к диску Галактики на основе численных вычислений процессов разрушения СТМ звездами в диске и с учетом влияния гравитационного потенциала диска на орбиту СТМ. В [33, 37] было показано, что (i) мелкомасштабные СТМ доминируют в аннигиляционном сигнале и (ii) звездный диск Галактики дает основной вклад в приливное разрушение СТМ на расстояниях $r > 3$ кпк, т. е. вне центральной области – вне балджа. Процесс приливного разрушения СТМ в общем случае анизотропен (т. е. он зависит от наклона орбиты СТМ по отношению к плоскости диска). Соответственно, аннигиляция ТМ в гало (в выживших СТМ) также анизотропна. В данной главе мы оценим величину этой анизотропии, следуя работе [42]. Отметим, что на данном этапе невозможно отличить этот источник анизотропии от вклада несферичности гало. Детектор Fermi-LAT при дальнейшем наборе статистики будет видеть анизотропию на уровне 0.1% [278]. Это дает надежду выделить анизотропный аннигиляционный сигнал над уровнем фона.

Оценим эффект анизотропии с помощью упрощенного критерия разрушения (1.77). Модель с постепенной потерей массы дает близкий результат, если x_c не слишком мало $x_c \geq 0.05$.

В течение времени жизни Галактики ($t_G \simeq 10^{10}$ лет) относительный прирост энергии СТМ за счет приливного нагрева при множественных пересечениях диска

$$\frac{\Delta E}{|E|} = \frac{1}{|E|} \sum_{i=1}^N (\Delta E_1^i + \Delta E_2^i), \quad (1.174)$$

где ΔE_1^i и ΔE_2^i даются просуммированными по объему СТМ выражениями (1.78) для двух пересечений диска за орбитальный период T_t , и $N \simeq t_G/T_t$. Суммирование производим аналогично (1.101). Потеря энергии оказывается зависящей от угла наклона орбиты следующим образом $\Delta E/|E| \propto 1/\sin^2 \gamma$, поэтому приливные удары со стороны диска наиболее чувствительны для СТМ с орбитами, плоскости которых близки к плоскости диска (т. е. с наклоном $\gamma \ll 1$). Тем не менее, для любых точек пересечения много орбит других СТМ с $\gamma \sim 1$. По этой причине итоговая анизотропия распределения СТМ мала.

Вероятность выживания СТМ P_{disk} может быть записана в виде (1.120) с

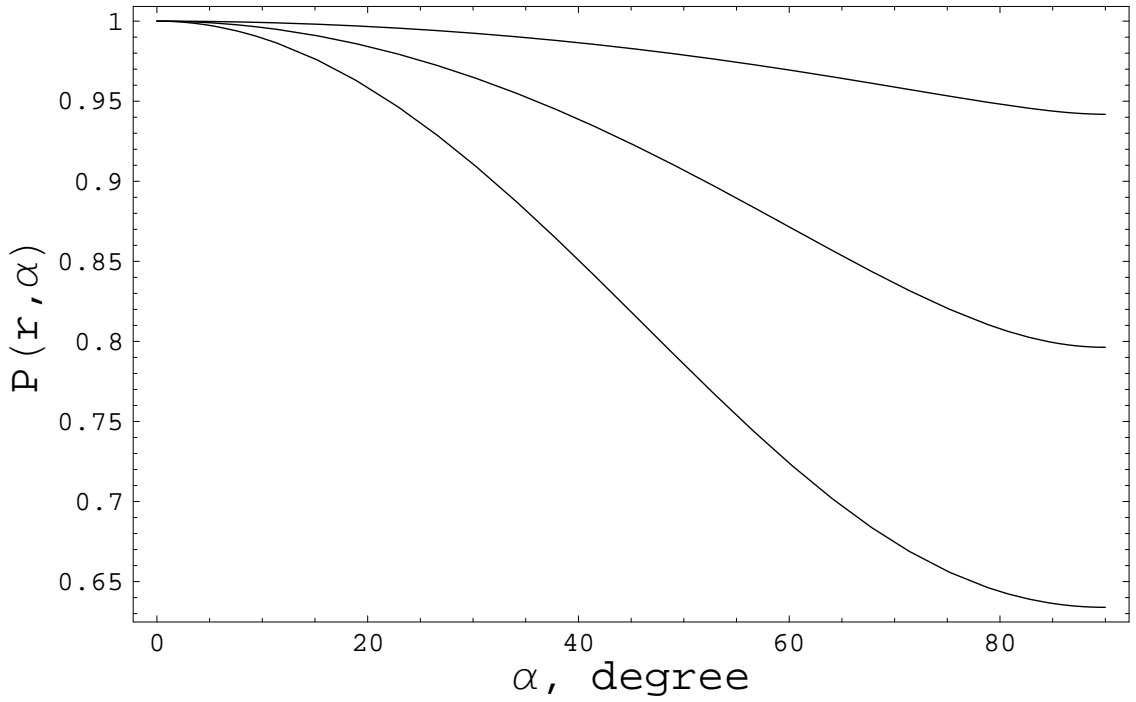


Рис. 1.14. Нормированная доля ТМ в форме СТМ в гало $P(r, \alpha)$, которые избежали приливного разрушения звездным диском как функция угла α между радиус-вектором \mathbf{r} и полярной осью диска. Графики выполнены для радиальных расстояний от центра Галактики $r = 3, 8.5$ и 20 кпк (снизу вверх). Анизотропия аннигиляции масштабирована искусственно для лучшей визуализации, и кривые должны быть умножены на $0.04, 0.4$ и 0.9 , соответственно, чтобы получить реальные значения.

заменой $\Theta \rightarrow \exp(-\Delta E/|E|)$. Общая вероятность дается произведением $P = P_{\text{disk}}P_{\text{sp}}$, где P_{sp} – вероятность выживания СТМ в процессах их приливного разрушения звездами в гало и в балдже, рассчитанная в разделе 1.3.2. Найденная таким образом вероятность $P(r, \alpha)$ показана на Рис. 1.14.

Диффузный сигнал (без учета присутствия в гало СТМ) пропорционален величине

$$I_{\text{H}} = \int_0^{r_{\text{max}}(\zeta)} \rho_{\text{H}}^2(\xi) dx, \quad (1.175)$$

где $x = r/R_s$, а интегрирование идет вдоль луча зрения, $\xi(\zeta, r) = (r^2 + r_{\odot}^2 - 2rr_{\odot} \cos \zeta)^{1/2}$ – расстояние до центра Галактики, $r_{\text{max}}(\zeta) = (R_{\text{H}}^2 - r_{\odot}^2 \sin^2 \zeta)^{1/2} + r_{\odot} \cos \zeta$ – расстояние до внешней границы гало (до вириального радиуса), ζ – угол между лучом зрения и направлением на центр Галактики, R_{H} – вириаль-

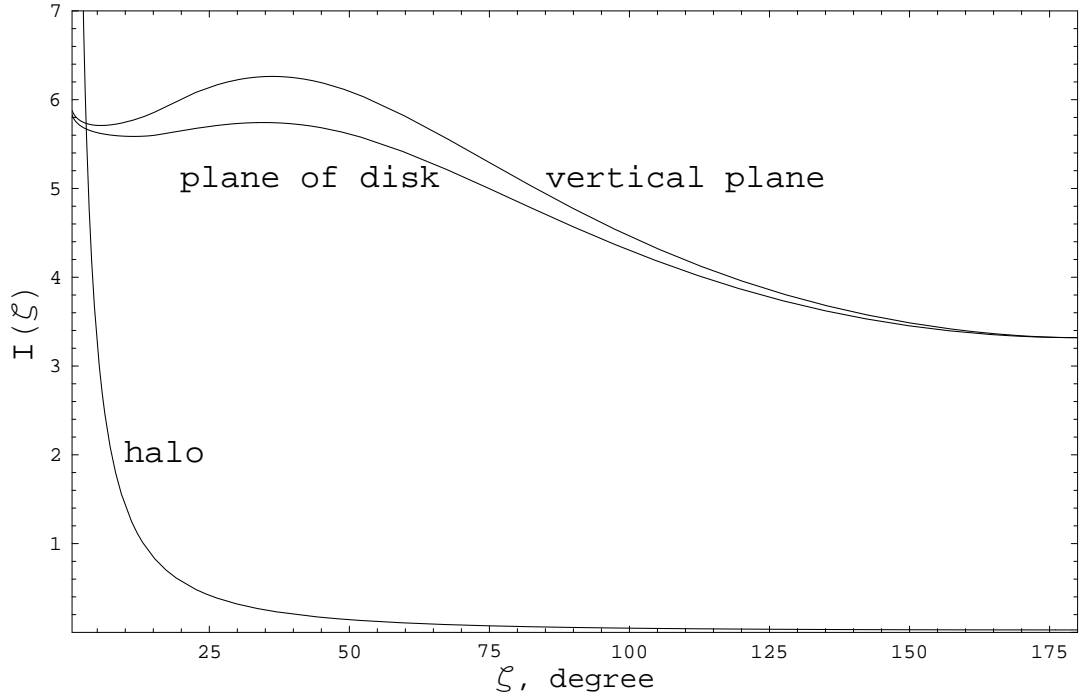


Рис. 1.15. Аннигиляционный сигнал (1.176) в плоскости диска галактики и в вертикальной плоскости как функция угла ζ между лучом зрения и направлением на центр Галактики. Для сравнения также показан аннигиляционный сигнал от гало Галактики без СТМ (1.175). Величины обоих интегралов (1.175) и (1.176) умножены на 10^{48} .

ный радиус гало. Сигнал, производимый СТМ пропорционален

$$I_{\text{cl}} = f_{\text{cl}} S \rho \int_0^{r_{\text{max}}(\zeta)} \rho_{\text{H}}(\xi) P(\xi, \alpha) P_{\text{sp}}(\xi) dx. \quad (1.176)$$

Положим для оценки, что доля ТМ в форме СТМ $f_{\text{cl}} \simeq 0.05$. Функция S зависит от профиля плотности и радиуса ядра СТМ [33], и мы полагаем $S \simeq 14.5$. В качестве типичного примера мы берем СТМ с массой Земли $M = 10^{-6} M_{\odot}$, образующиеся из 2σ -пигов плотности в случае показателя степени степенного спектра первичных возмущений $n_p = 1$. Средняя внутренняя плотность этих СТМ $\rho \simeq 7 \times 10^{-23} \text{ g cm}^{-3}$. Вариация величин f_{cl} и S , а также распределения СТМ по различным параметрам влияет на величину аннигиляционного сигнала, но слабо затрагивает его анизотропию.

На Рис. 1.15 аннигиляционные сигналы, рассчитанные согласно (1.175) и (1.176), показаны в плоскости диска Галактики и в ортогональной плоскости (проходящей через центр Галактики) как функция угла ζ между лучом зрения и направлением на центр Галактики. Для сравнения на Рис. 1.15 также показан

сигнал (1.175) от сферически симметричного гало без СТМ. Последний сигнал является одинаковым в плоскости диска и в ортогональной диску плоскости, поэтому он в принципе может быть выделен в наблюдениях.

Отличие сигналов в указанных выше двух ортогональных плоскостях при одинаковых углах ζ можно рассматривать как меру анизотропии сигнала. Величина $\delta = (I_2 - I_1)/I_1$ имеет максимальное значение $\delta \simeq 0.09$ при $\zeta \simeq 39^\circ$.

Полная анизотропия сигнала от аннигиляции ТМ в общем случае включает нецентральное положение Солнца в Галактике и несферичность гало. Аннигиляционный сигнал от галактического центра зависит от профиля плотности ТМ в центральной области гало. При наличии каспа [114] неизбежно существование яркого источника в центре Галактики. Однако, этот касп в распределении диффузной ТМ может быть разрушен влиянием барионов [280]. Мелкомасштабные СТМ полностью разрушаются внутри звездного балджа в центре Галактики. Неизвестная величина несферичности гало является основным источником неопределенности в вычислении анизотропии.

В работе [279] была указана анизотропия по отношению к диску Галактики. Как видно из наших вычислений (см. Рис. 1.15) эта анизотропия аннигиляционного сигнала довольно мала $\sim 9\%$, но превышает разрешение телескопа им. Э. Ферми $\sim 0.1\%$. Таким образом, поиск обсуждаемой анизотропии может быть выполнен в гамма-наблюдениях.

1.5.5. Можно ли объяснить данные PAMELA, ATIC и др. аннигиляцией в сгустках?

В экспериментах HEAT и AMS-01 был обнаружен избыток e^+ в диапазоне 6-10 ГэВ, в качестве возможного объяснение которого предлагались модели аннигиляции ТМ с буст-фактором. В дальнейшем при наблюдении на более совершенных телескопах эти данные для энергий 6-10 ГэВ не нашли подтверждения, но были представлены свидетельства избытка e^+ при больших энергиях. Детектор PAMELA на борту российского спутника Ресурс-ДК1 в 2008 г. зарегистрировал избыток e^+ в диапазоне 10-60 ГэВ. В дальнейшем этот избыток был уверенно подтвержден до энергий 90 ГэВ, и вероятно, что избыток тянется вплоть до 200 ГэВ. В 2006-2008 гг. детектором PAMELA было зарегистрирова-

но $\simeq 1500$ антипротонов с энергией в интервале от 60 до 180 ГэВ, причем этот поток антипротонов в рамках измерительных и модельных погрешностей хорошо соответствует модели вторичной генерации антипротонов при взаимодействии космических лучей с межзвездным газом [281]. Таким образом, наблюдавшийся PAMELA избыток e^+ не сопровождается избытком \bar{p} . В экспериментах ATIC в спектре электронов был выявлен избыток при энергиях 300-800 ГэВ. Ввиду того, что электроны легко поглощаются межзвездным газом, подобный избыток может дать только близкий источник. Результаты измерений на различных детекторах в некоторых диапазонах энергий заметно расходятся друг с другом. Поток электронов, измеренный ATIC, несколько превосходит предсказания стандартной модели генерации, в то время как измерения PAMELA дают при энергиях до 625 ГэВ меньший поток, согласующийся со стандартной моделью генерации [282]. Можно предположить, что ATIC обнаружил близкий СТМ, в котором происходит аннигиляция [283], либо аннигиляция идет в плотном пике плотности вблизи близкой ЧД промежуточной массы. Следует однако отметить, что одни и те же частицы ТМ, вероятно, не могут объяснить одновременно результаты и PAMELA и ATIC.

Одной из интерпретаций избытка e^+ в эксперименте PAMELA является аннигиляция частиц ТМ. Эта гипотеза привлекла широкое внимание, поскольку она могла быть указанием не прямой регистрации частиц ТМ с указанием их свойств. Для объяснения данных PAMELA аннигиляцией обычных нейтралينو, родившихся по тепловому механизму, приходится предположить наличие буст-фактора, т. е. усиления сигнала, т.к. сечение аннигиляции фиксируется моделью рождения нейтралино, и этого сечения не достаточно для генерации наблюдаемых потоков заряженных частиц. Одним из источников буст-фактора могут являться СТМ, обладающие повышенной плотностью. Поскольку дисперсия скоростей частиц в СТМ мала, то одновременно оказывается важным эффект усиления Зоммерфельда и радиационные поправки, за счет которых сечение аннигиляции может увеличиваться на несколько порядка величины. Это может дать увеличение аннигиляционных потоков и в гамма-фотонах и в e^+ [284]. Роль усиления Зоммерфельда для аннигиляции суперсимметричных частиц ТМ была впервые указана в работе [285], а применительно к сигналу

от аннигиляции частиц ТМ – в [286]. Усиление может иметь место за счет наличия дополнительного потенциала взаимодействия в уравнении Шредингера [287]. Более ранние объяснения результатов HEAT аннигиляцией нейтралитино также требовали наличия буст-фактора величиной ~ 30 .

Однако, аннигиляционный сценарий встречает серьезную трудность, т.к. в наблюдениях PAMELA отсутствует избыток антипротонов, в то время как типичные модели с аннигиляцией предсказывают наряду с генерацией избытка e^+ также и генерацию и избытка антипротонов. Эта проблема имеет место как для буст-фактора, производимого СТМ, так и для других возможных источников буст-фактора, т. е. проблема присуща всему аннигиляционному сценарию – независимо от моделей СТМ. Вторая серьезная проблема возникает из полученных телескопом Fermi ограничений на потоки гамма-излучения от карликовых галактик и ближайших скоплений галактик. Эти данные сильно ограничивают и (в наиболее типичных моделях) исключают интерпретацию данных PAMELA как аннигиляцию нейтралитино. Дело в том, что при регистрируемом PAMELA потоке позитронов сечение аннигиляции должно быть столь большим, что заведомо наблюдался бы и гамма-сигнал от карликовых галактик и скоплений. Эта проблема зависит от преимущественных каналов аннигиляции. Если для обычного нейтралитино модель аннигиляции ТМ в данных PAMELA можно считать закрытой отсутствием антипротонов и наблюдениями Fermi-LAT, то гипотетические варианты с подавленной аннигиляцией в гамма-фотоны и в антипротоны остаются возможными. Например, аннигиляция только в лептонные каналы рассматривалась в [288], а вариант с наличием темного сектора рассмотрен в [289].

Аннигиляция частиц ТМ сейчас не считается главным объяснением данных PAMELA из-за указанных выше трудностей и благодаря наличию других возможных объяснений. В качестве простейшего объяснения наблюдавшегося PAMELA избытка e^+ стало предположение о неполноте самой модели распространения космических лучей и модели вторичной генерации [290]. Скорректированная модель [290] согласуется с наблюдаемым избытком позитронов в случае, если дополнительные позитроны возникают при аннигиляции вино-подобных нейтралитино с массами 180 ГэВ, произведенных в ранней Вселенной по

нетепловому механизму [291]. Избыток e^+ у PAMELA без соответствующего избытка антипротонов может быть объяснен моделями генерации электронов и позитронов в пульсарах. Однако в этих моделях имеются свои трудности, связанные со спектром. Вычисления [292], [293] показывают, что вспышки на карликовых звездах способны дать наблюдаемый избыток e^+ . Наконец, простое решение проблемы избытка e^+ было дано в работах [294], [295], где показано, что вторичные позитроны могут рождаться и ускоряться в самих источниках космических лучей.

Глава 2

Сверхплотные сгустки темной материи

В данном разделе мы рассмотрим сверхплотные СТМ, которые при определенных условиях могли формироваться на космологической стадии радиационного доминирования [96]. Особое внимание будет уделено несферичности СТМ, т.к. нарастание несферичности в случае адиабатических возмущений плотности ведет к сильному уменьшению количества образующихся СТМ [98].

2.1. Сферическая модель эволюции возмущений

2.1.1. Постановка задачи

Пусть имеется достаточно выделенное положительное возмущение плотности $\delta(\mathbf{r})$ – протогало, которое обособляется от космологического расширения и с некоторого момента сжимается под действием собственной гравитации. Начало координат $\mathbf{r} = 0$ выберем вблизи центра масс протогало. Сначала будем рассматривать протогало как сферически симметричный объект [28, 122].

Запишем в общем виде уравнение эволюции сферического слоя радиусом r в масштабе, меньшем масштаба горизонта $r \ll ct$. Обозначим через M массу ТМ внутри этого слоя. На масштабе меньше горизонта можно применять ньютоновскую динамику, принимая во внимание подстановку [297], позволяющую учесть в ньютоновских уравнениях гравитацию однородно распределенных релятивистских компонент $\rho \rightarrow \rho + 3p/c^2$. Тогда эволюция сферического слоя подчиняется уравнению ньютоновского вида

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{G(M_h + M)}{r^2} - \frac{8\pi G\rho_r r}{3} + \frac{8\pi G\rho_\Lambda r}{3} \quad (2.1)$$

В (2.1) учтено, что для излучения $\varepsilon_r + 3p_r = 2\varepsilon_r$, а для космологической постоянной $\varepsilon_\Lambda + 3p_\Lambda = -2\varepsilon_\Lambda$. Для общности учтена также возможность наличия затравочной массы M_h , например массы ЧД, в центре слоя или сумма масс ЧД в их скоплении в пределах радиуса r .

Удобно сделать параметризацию $r = \xi a(t)b(t)$ [95], где ξ – сопутствующий масштаб, $a(t)$ – масштабный фактор Вселенной, а функция $b(t)$ характе-

ризует отклонение космологического расширения в возмущенной области от хаббловского закона. Величина ξ связана с массой ТМ внутри рассматриваемого сферического объема (без учета массы ПЧД) следующим образом $M_{\text{DM}} = (4\pi/3)\rho_{\text{DM}}(t_0)\xi^3$. Функция $a(t)$ удовлетворяет уравнению Фридмана

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}(\varepsilon_r + \varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda), \quad (2.2)$$

которое можно переписать в виде $\dot{a}/a = H_0 E(z)$, где красное смещение $z = a^{-1} - 1$, H_0 – современная величина постоянной Хаббла, а функция

$$E(z) = [\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}]^{1/2}. \quad (2.3)$$

Здесь Ω_r , Ω_m и Ω_Λ – параметры плотности (отношения плотностей к критической плотности $\rho_c = 3H^2/(8\pi G)$) излучения (в сумме с релятивистскими нейтрино), нерелятивистской материи (ТМ и барионов) и Λ -члена, соответственно. Λ -член влияет на эволюцию возмущений только на красных смещениях $z \leq 10$. Рассматриваем плоскую космологическую модель: $\Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. Функции $t(z)$ и $z(t)$ получаются из решения уравнения (2.2). Уравнение для эволюции сферического слоя (2.1) удобно преобразовать к следующему виду [296], [95]:

$$y(y+1)\frac{d^2b}{dy^2} + \left[1 + \frac{3}{2}y\right]\frac{db}{dy} + \frac{1}{2}\left[\frac{1+\Phi}{b^2} - b\right] = 0, \quad (2.4)$$

где $y = a(\eta)/a_{\text{eq}}$, $d\eta = dt/a(t)$ – конформное время, a_{eq} – масштабный фактор в момент t_{eq} , и $\Phi = \delta\rho_{\text{DM}}/\rho_{\text{DM}}$ – начальное относительное возмущение в плотности ТМ. Уравнение (2.4) применимо для эволюции как энтропийных, так и адиабатических возмущений, однако в этих случаях необходимо выбирать различные начальные условия. Космологическое расширение СТМ останавливается в тот момент, когда $dr/dt = 0$, согласно [95] это равносильно

$$\frac{db}{dy} = -\frac{b}{y}. \quad (2.5)$$

Обозначим величины b и y в момент остановки расширения как b_{max} и y_{max} , соответственно. Плотность холодной ТМ в СТМ в тот же момент

$$\rho_{\text{max}} = \rho_{\text{eq}}y_{\text{max}}^{-3}b_{\text{max}}^{-3} \quad (2.6)$$

и, следовательно, радиус СТМ в момент остановки

$$R_{\max} = \left(\frac{3M_x}{4\pi\rho_{\max}} \right)^{1/3}. \quad (2.7)$$

После отщепления от космологического расширения объект сжимается по радиусу в два раза и вириализуется.

Эволюции энтропийных возмущений, в том числе, на радиационно-доминированной стадии была подробно исследована в работе [95]. В случае энтропийных возмущений начальные данные для (2.4) имеют вид $\Phi = \delta\rho_{\text{DM}}/\rho_{\text{DM}}$ и $db/dt = 0$ [95]. А плотность сформировавшегося СТМ с хорошей точностью аппроксимируется выражением [95]

$$\rho \simeq 140\Phi^3(\Phi + 1)\rho_{\text{eq}}. \quad (2.8)$$

Например, $\Phi \simeq 1 \div 10^4$ в случае аксионной ТМ, и возникающие “аксионные миникластеры” имеют массы в диапазоне $\sim (10^{-13} \div 0.1)M_{\odot}$. Наблюдательные проявления аксионных миникластеров в гало Галактики рассматривались в [95, 135].

2.1.2. Сферическая модель для адиабатических возмущений на стадии радиационного доминирования

Чтобы рассмотреть эволюцию адиабатических возмущений на стадии радиационного доминирования необходимо выбрать в (2.4) начальные условия из соответствия с линейным решением $\delta \ll 1$ на масштабах меньше горизонта [31]

$$\delta = \frac{3A_{\text{in}}}{2} \left[\ln \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) + \gamma_E - \frac{1}{2} \right]. \quad (2.9)$$

В этом решении численная константа имеет величину $\gamma_E - 1/2 \approx 0.077$, $A_{\text{in}} = \delta_{\text{H}}/\phi$, $\phi \simeq 0.817$, δ_{H} – возмущение в плотности излучения на масштабе горизонта, а переменная x связана с сопутствующим волновым вектором k следующим образом $x = k\eta$. Связь между x и y определяется при $x \gg 1$ и $y \ll 1$ соотношением [96]

$$x = \frac{\pi}{2^{2/3}} \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{1/6} \frac{yc}{G^{1/2}M^{1/3}\rho_{\text{eq}}^{1/6}}. \quad (2.10)$$

Величину b в (2.4) можно выразить через δ следующим образом [296]

$$b = (1 + \delta)^{-1/3}. \quad (2.11)$$

Это соотношение означает переход от эйлерова способа описания эволюции возмущений (2.9) к лагранжеву описанию (2.4) в сферически-симметричном случае. В линейном приближении $\delta \ll 1$ из (2.11) получаем $\delta = (1 - b)/3$, что соответствует выражению δ через смещение $\delta = \text{div}\mathbf{S}$. Лагранжево описанию через вектор смещения \mathbf{S} реализовано в аппроксимации Зельдовича.

Применимость (2.9) ограничена линейной стадией $\delta \ll 1$. При переходе на нелинейную стадию мы будем использовать сферическую модель (2.4). Для адиабатических возмущений $\Phi = 0$, а начальная скорость db/dt отлична от нуля и определяется линейной стадией эволюции.

Удобно связать аналитическое решение (2.9), полученное в линейной теории, с численным решением нелинейного уравнения (2.4) в момент времени, соответствующий “переходному” значению возмущения $\delta = 0.2$ (см. [96]). Проверка показывает, что при другом выборе δ_i в интервале $0.1 - 0.3$ результаты расчета изменяются не более, чем на 15%. Задав δ_i , из (2.9) и (2.10) получаем x_i и y_i . В этот момент мы определяем начальную скорость сферического слоя формирующегося СТМ следующим образом

$$\frac{db}{dy} = -\frac{\delta_{\text{H}} b^4}{2y\phi}. \quad (2.12)$$

Пример эволюции $\delta = b^{-3} - 1$ показан на Рис. 2.1.

В [96] эта модель использовалась для описания некомпактных объектов ТМ с фиксированной массой $\sim 0.1M_{\odot}$, предположительно наблюдавшихся в микролинзировании. Рассмотрим теперь более широкий диапазон масс и плотностей СТМ. Решая численно (2.4) в рамках описанного выше формализма, мы находим плотность СТМ $\rho = \rho(M, \delta_{\text{H}})$ как функцию его массы M и величины возмущения плотности в излучении на масштабе горизонта δ_{H} . Результаты расчетов показаны на Рис. 2.2.

Некоторые характерные плотности СТМ ρ (сечения поверхности, показанной на Рис. 2.2) приведены на Рис. 2.3 для нескольких величин масс СТМ. Видно, что кривые сходятся к $\rho \sim \rho_{\text{eq}} \sim 10^{-19} \text{ г см}^{-3}$ при малых δ_{H} , т. е. для

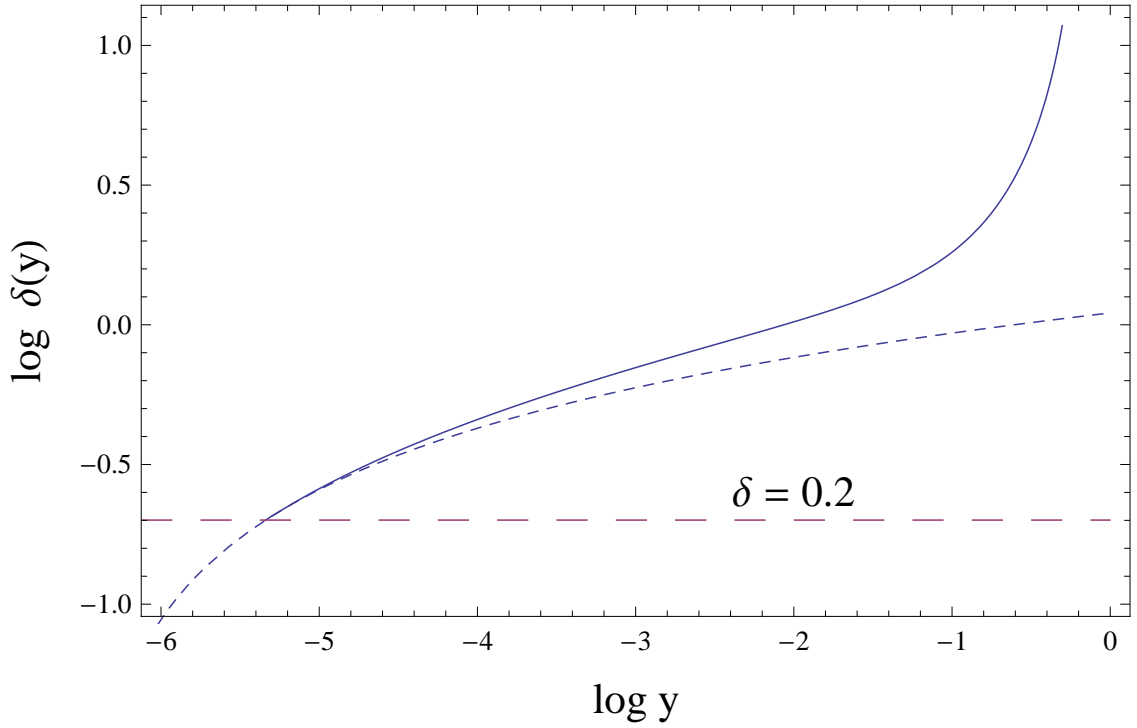


Рис. 2.1. Пример эволюции возмущения плотности δ холодной ТМ. График соответствует параметрам $\delta_{\text{H}} = 0.04$, $M = 0.1M_{\odot}$, $\Omega_m = 0.3$. До точки ($y_i = 4.6 \times 10^{-6}$, $\delta_i = 0.2$) кривая получена по формуле (2.9), а при $y > y_i$ использовано численное решение уравнения (2.4). Остановка космологического расширения СТМ происходит на стадии радиационного доминирования при $y = a/a_{\text{eq}} \simeq 0.49$. Пунктирной линией показана эволюция δ по линейной теории (2.9).

СТМ, формирующихся вблизи момента t_{eq} равенства плотностей вещества и излучения.

Описанная здесь модель эволюции энтропийных возмущений ведет к образованию сверхплотных СТМ. Для этого сценария необходим избыток возмущений на некоторых малых масштабах, например, в форме пиков. Отметим, что (в противоположность стандартному степенному спектру возмущений) сверхплотные СТМ, образовавшиеся из максимума в спектре, не входят в состав иерархических структур и поэтому не разрушаются приливными силами, а их функция масс сконцентрирована вблизи некоторой конкретной массы.

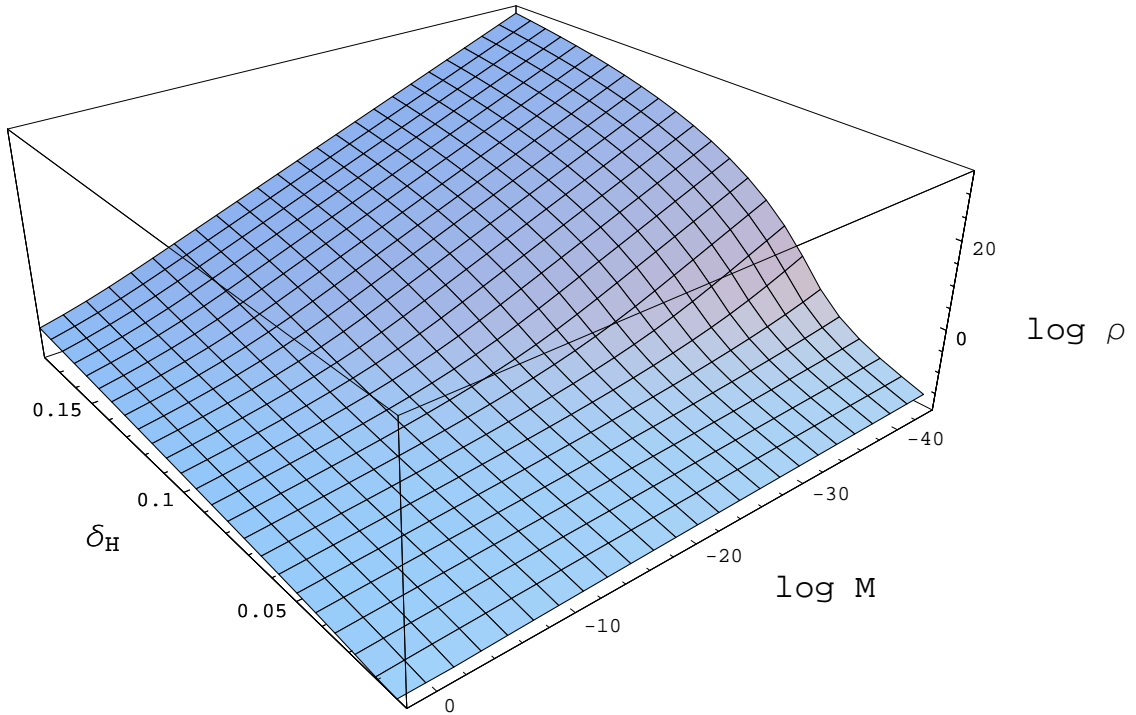


Рис. 2.2. Средняя плотность СМ ρ (в г см^{-3}) в зависимости от массы СМ M (в единицах M_{\odot}) и величины возмущения плотности излучения δ_{H} на масштабе горизонта.

2.2. Несферическая модель

Новой особенностью нелинейной эволюции СМ на стадии доминирования излучения является распад несферичных протогало. Действительно, если протогало достаточно вытянуто, то масса излучения внутри минимальной содержащей протогало сферы будет превосходить массу ТМ, и самогравитация объекта не сможет удержать его части вместе. Протогало распадется, и его части разлетятся друг от друга вместе с космологическим расширением.

Опишем простейшее обобщение сферической модели – модель однородного эллипсоида [298]. Хотя это приближение не описывает внутреннюю структуру объекта (нарастание плотности к центру и неоднородности), оно полезно в том отношении, что позволяет учесть взаимодействие внешних приливных сил с квадрупольным моментом возмущения [298].

В общем случае уровни плотности в СМ имеют несферическую форму, и с некоторой точностью их можно аппроксимировать поверхностями эллипсои-

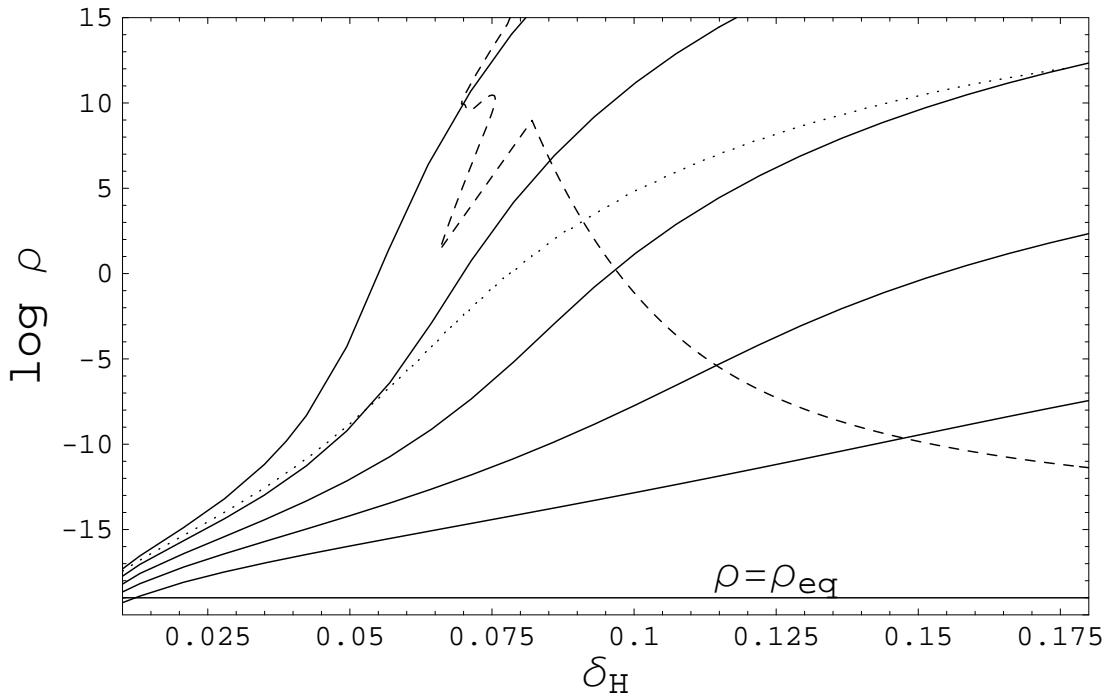


Рис. 2.3. Средняя плотность ρ (в г см^{-3}) СТМ в зависимости от величины возмущения δ_H в плотности излучения на масштабе горизонта; сплошные кривые сверху вниз соответствуют массам СТМ $M = 10^{-10}, 1, 10^{10}, 10^{20}, 10^{30}$ г. Штрихованная кривая отмечает ограничение на плотность СТМ на основе эффекта перепроизводства ПЧД с порогом их образования $\delta_c = 0.7$. Время двухчастичной гравитационной релаксации внутри ядра СТМ меньше возраста Вселенной для СТМ над точечной кривой в случае, когда масса частиц ТМ составляет $m \geq 10^{11}$ ГэВ. Точечная кривая обсуждается в разделе 2.7.3.

да, которые могут быть однако повернуты друг относительно друга и вращаться в процессе эволюции возмущения под влияние приливных сил. Следующая идеализация – предположение, что плотность внутри внешнего эллипсоидального слоя однородна, т. е. мы не учитываем структуру всех внутренних слоев. Модель однородного эллипсоида позволяет выполнить простое аналитическое описание и поэтому полезна для исследования эволюции несферических внешних слоев реального СТМ, в которых сконцентрирована большая часть массы ТМ. Здесь мы рассматриваем малые отклонения от сферической симметрии в модели однородного эллипсоида, и линеаризуем уравнения по величине отклонений.

Суммарный гравитационный потенциал в области возмущения

$$\phi = \frac{1}{2} \Phi_{\alpha\beta}(t) r^\alpha r^\beta \quad (2.13)$$

включает потенциал эллипсоида (благодаря избытку ТМ), потенциал однородного фона и приливных сил:

$$\Phi = \Phi_{el} + \Phi_{bg} + \Phi_{sh}, \quad \Phi_{bg} = 4\pi G \bar{\rho}(t) I / 3. \quad (2.14)$$

Мы пренебрегаем здесь членом Φ_{sh} и возможным вращением эллипсоида (формализм с учетом вращения см. в [298]). Тогда уравнения эволюции эллипсоида принимают вид:

$$\frac{d^2 S^{\alpha\beta}}{dt^2} = -\Phi^{\alpha\gamma} S^{\gamma\beta}. \quad (2.15)$$

Матрица эллипсоида в системе главных полуосей может быть записана в виде

$$S = \left\| \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right\| = Ir + \sigma, \quad \Phi_{el} = 2\pi G \rho_e \left\| \begin{array}{ccc} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{array} \right\|, \quad (2.16)$$

где плотность эллипсоида $\rho_e \equiv M_e/V$ равна

$$\rho_e = \rho_m \left(\frac{1 + \delta_i}{b^3} - 1 \right). \quad (2.17)$$

Выражение (2.17) получено из условия, что в процессе эволюции сохраняется полная масса ТМ внутри эллипсоида $M = \rho_i V_i = M_e + \bar{\rho} V$, где $\rho_i = \bar{\rho}(t_i)(1 + \delta_i)$ — начальная плотность эллипсоида, V — объем эллипсоида, а M_e — избыток массы в эллипсоиде над фоном, δ_i — величина флуктуации плотности в некоторый начальный момент t_i .

Коэффициенты, входящие в потенциал (2.16), имеют вид [298]

$$A_1 = abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)[(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)]^{1/2}}, \quad (2.18)$$

A_2 и A_3 записываются аналогично. Обозначим $\Delta = Tr(\sigma)$ и разложим потенциал в ряд до первой степени переменной $\sigma \ll 1$ включительно:

$$\Phi_{el} = 2\pi G \rho_e \left\{ \frac{2}{3} \left(1 + \frac{2\Delta}{5r} \right) I - \frac{4\sigma}{5r} \right\}. \quad (2.19)$$

В нулевом порядке $\sigma = 0$ мы получаем прежнее уравнение (2.4). В начальный момент t_i выбираем радиус r так, что $\Delta(t_i) = 0$, тогда из (2.15) следует, что

$\Delta(t) = 0$ в любой момент времени t (похожий метод выбора r был использован в [299]). Тогда в следующем порядке получаем уравнение эволюции σ :

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{4\pi}{15}G\rho_e\sigma - \frac{4\pi}{3}G(2\rho_r + \rho_m)\sigma. \quad (2.20)$$

С параметризацией $\sigma = a(y)s(y)\xi$ уравнение на функцию $s(y)$ примет вид

$$y(y+1)s'' + \left(1 + \frac{3}{2}y\right)s' - \frac{1}{10}\left(\frac{1}{b^3} - 1\right)s = 0 \quad (2.21)$$

с начальными условиями $s = s_i$ и

$$s'|_{y_i} = -\frac{2\delta_H b_i^3 s_i}{y_i \phi}, \quad (2.22)$$

где штрих обозначает производную по y . Благодаря линейности уравнений относительно s , величины s/s_i могут вычисляться независимо от s_i .

Сформулируем начальные условия для однородного эллипсоида на радиационно-доминированной стадии эволюции Вселенной в конформной ньютоновской системе отсчета. На масштабах $r \gg ct$ имеем $\delta_r = -2\Phi = const$, $\delta_i = (3/4)\delta_{r,i} = -(3/2)\Phi_i$. Решение для релятивистского потенциала [2]

$$\Phi(\eta, \mathbf{k}) = \Phi_i(\mathbf{k}) \frac{3\pi^{1/2}}{2^{1/2}(u_s k \eta)^{3/2}} J_{3/2}(u_s k \eta), \quad (2.23)$$

где $u_s = 1/\sqrt{3}$. Пекулярные скорости v_j , которые определяют начальную скорость частиц ТМ на поверхности эллипсоида, выражаются в виде $v_j = \partial v / \partial x_j$, где потенциал скорости [2]

$$v(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\eta} \int_0^\eta d\eta' \eta' \Phi(\eta', \mathbf{k}) = -9\Phi_i(\mathbf{k}) \frac{1}{\eta k^2}. \quad (2.24)$$

Эллипсоидальное возмущение в форме “top-hat” имеет вид $\delta_i(\mathbf{x}) = \delta_i = const$, если $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1$, и $\delta_i(\mathbf{x}) = 0$ в обратном случае. Фурье-образ такого возмущения [300]

$$\delta_i(\mathbf{k}) = \delta_i (2\pi)^3 abc \left(\frac{\sin(\tilde{k}) - \tilde{k} \cos(\tilde{k})}{2\pi^2 \tilde{k}} \right), \quad (2.25)$$

где $\tilde{k} = [(ak_x)^2 + (bk_y)^2 + (ck_z)^2]^{1/2}$. Обозначим $\tilde{\mathbf{x}} = (x/a, y/b, z/c)$, тогда

$$v(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{abc} \int \frac{d^3 \tilde{k}}{(2\pi)^3} \frac{-9\Phi_i(\mathbf{k}) e^{-i\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{k}}}}{\eta \left[(\tilde{k}_x/a)^2 + (\tilde{k}_y/b)^2 + (\tilde{k}_z/c)^2 \right]}. \quad (2.26)$$

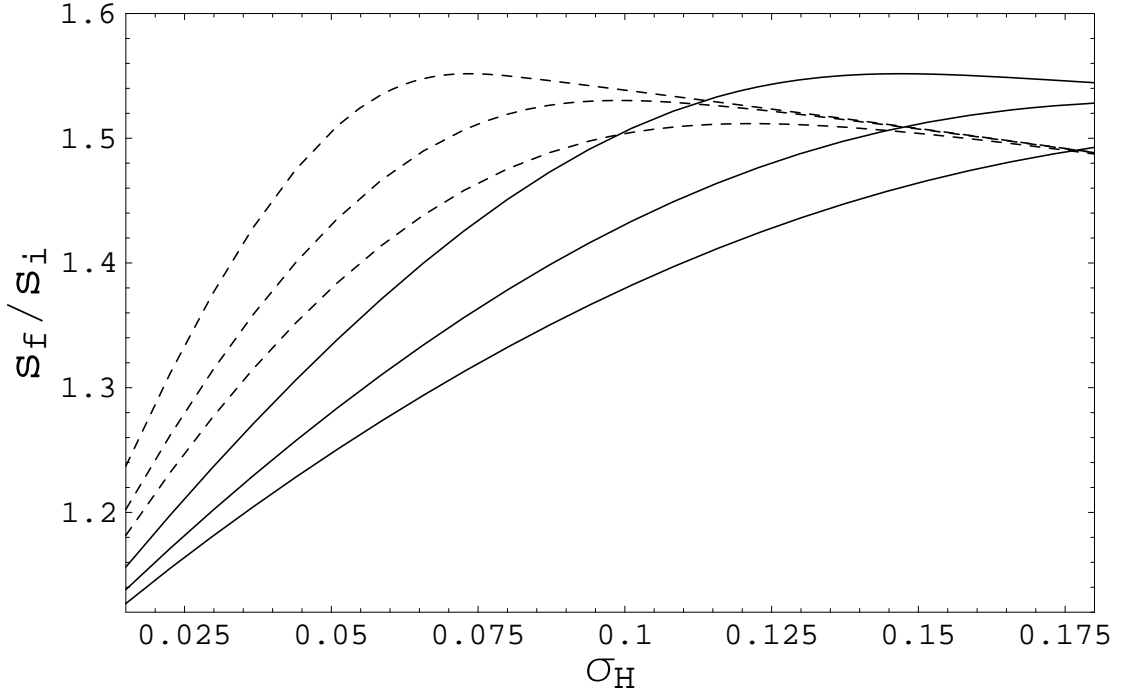


Рис. 2.4. Нарастание асимметрии s_f/s_i в зависимости от величины возмущений на масштабе горизонта δ_H для масс СТМ $M = 10^{-6}, 10^{-1}, 10^2 M_\odot$ (сверху вниз). Сплошные и штрихованные линии соответствуют высоте пиков $\nu = 1$ и $\nu = 2$, соответственно, где $\nu \equiv \delta_H/\sigma_H$.

В приближении малой несферичности можно записать

$$v = v_0 + \left. \frac{\partial v}{\partial a} \right|_0 \Delta a + \left. \frac{\partial v}{\partial b} \right|_0 \Delta b + \left. \frac{\partial v}{\partial c} \right|_0 \Delta c + \dots, \quad (2.27)$$

где ноль соответствует нулевому сферическому приближению с $a = b = c$. Производные $v_j = \partial v / \partial x_j$ в первом порядке (линейном порядке в (2.27)) отличны от нуля только вдоль соответствующих осей x_j . После преобразований начальные условия для каждой компоненты s записываются в виде

$$s|_{y_i} = s_i \quad \text{and} \quad s'|_{y_i} = \frac{3\delta_H b_i^3 s_i}{10y_i \phi}. \quad (2.28)$$

Решаем уравнение (2.21) численно одновременно с (2.4) для высот пиков $\nu = 1$ и $\nu = 2$, где ν определено как $\nu \equiv \delta_H/\sigma_H$ и $\sigma_H \equiv \langle \delta_H^2 \rangle^{1/2}$. Результаты расчета представлены на Рис. 2.4. Мы рассчитали рост несферичности возмущения до его отщепления от хаббловского потока. Отметим, что в случае энтропийных возмущений аналогичный формализм (с начальным значением $s'(t_i) = 0$) дает лишь малый рост несферичности: s изменяется менее, чем на 10%, поэтому для энтропийных возмущений ограничения по росту несферично-

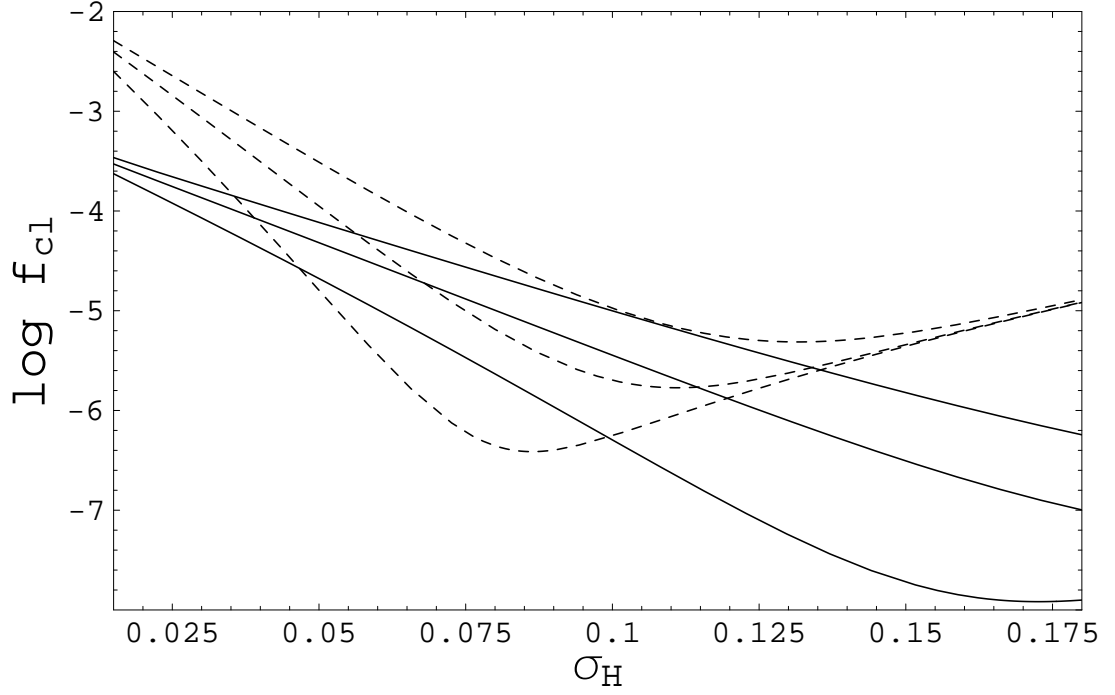


Рис. 2.5. Доля СТМ f_{cl} , которые формируются, удовлетворяя ограничению по несферичности, для масс СТМ $M = 10^2, 10^{-1}, 10^{-6} M_\odot$ (сверху вниз). Сплошные и штрихованные кривые соответствуют высоте пиков $\nu = 1$ и $\nu = 2$, соответственно.

сти не являются существенными. Вернемся к случаю адиабатических возмущений. Граница допустимой несферичности, когда объект еще вириализуется, грубо дается условием $\Delta s_f/b_f < 1$. Отсюда следует критерий для формирования СТМ $\Delta s_i/b_i < (b_f/b_i)(\Delta s_i/\Delta s_f)$. Возмущения с большими $\Delta s_i/b_i$ не приводят к формированию СТМ на стадии доминирования излучения.

Рассмотрим теперь статистическое распределение возмущений по их начальным несферичностям. Распределение гауссовых случайных полей по форме отдельных возмущений исследовано в работах [301] и [121]. С помощью (2.19) эллиптичность возмущений в гравитационном потенциале выражается в виде

$$e = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2 \sum \lambda_i} \simeq \frac{1}{5} \frac{\Delta s_i}{b_i}, \quad (2.29)$$

где λ_i – собственное значение тензора потенциала. Вторая переменная, называемая “prolateness”, выражается в виде

$$p = \frac{\lambda_1 + \lambda_3 - 2\lambda_2}{\sum \lambda_i}. \quad (2.30)$$

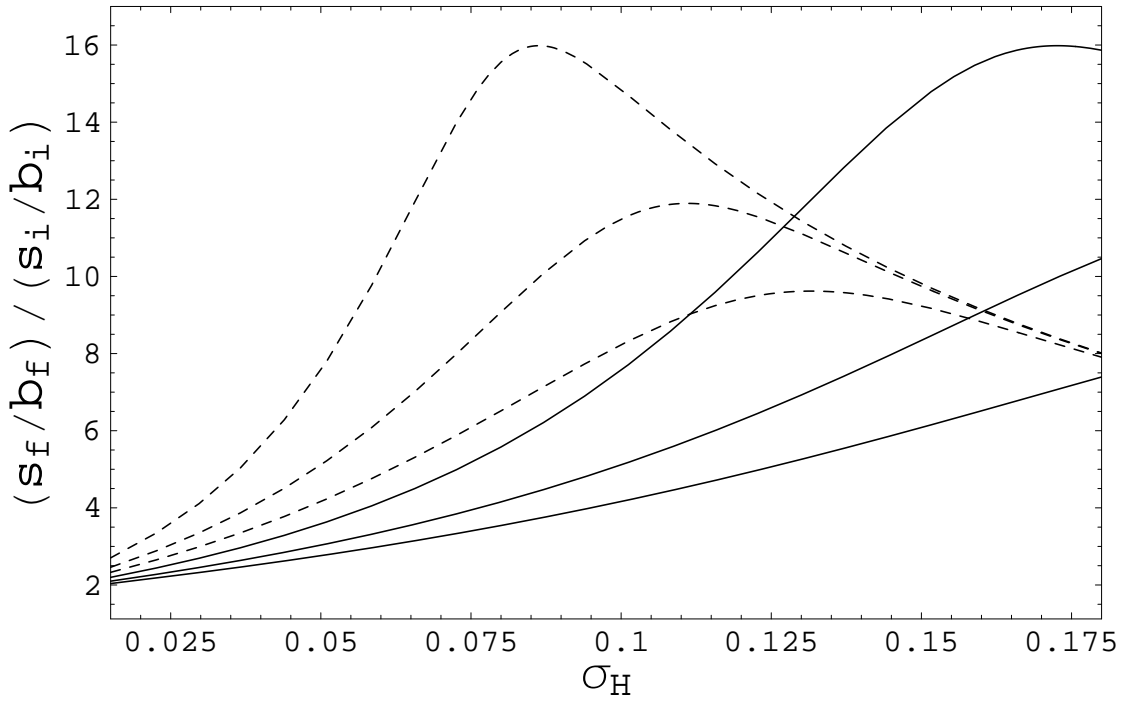


Рис. 2.6. То же, что на Рис. 2.4, но для величины относительного роста несферичности $(s_f/b_f)/(s_i/b_i)$.

Распределение по собственным значениям $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ найдено в работе [301]:

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{15^3}{8\pi\sqrt{5}\sigma^6} \exp\left(-\frac{3I_1^2}{\sigma^2} + \frac{15I_2}{2\sigma^2}\right) \times (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3), \quad (2.31)$$

где σ – среднеквадратичная величина возмущения, $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ и $I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$. Это распределение может быть выражено через переменные e и p следующим образом [302]

$$g(e, p|\nu) = \frac{1125}{\sqrt{10\pi}} e (e^2 - p^2) \nu^5 e^{-\frac{5}{2}\nu^2(3e^2+p^2)}. \quad (2.32)$$

Мы используем это выражение, проинтегрированное по p в пределах $-e < p < e$, для вычисления доли образующихся СТМ. Результаты расчетов показаны на Рис. 2.5. Таким образом, эффект несферичности может уменьшить долю формирующихся СТМ на несколько порядков величины.

Абсолютная величина s растет умеренно, и отношение s_f/s_i не велико. Однако относительная величина несферичности возрастает значительно из-за большой величины отношения b_i/b_f . Отношение s_f/b_f к s_i/b_i показано на Рис. 2.6. Таким образом, начальная несферичность s_i/b_i должна быть очень мала для того, чтобы конечная несферичность удовлетворяла условию $s_f/b_f < 1$. Распре-

деление вероятности зависит от относительной несферичности s/b . Это является причиной того, почему начальное распределение по несферичности (2.32) приводит к сильному уменьшению доли f_{cl} формирующихся СТМ.

2.3. Сверхплотные сгустки - ограничения по первичным черным дырам

Описанный в предыдущем разделе сценарий образования СТМ из адиабатических возмущений на стадии радиационного доминирования ограничен по параметрам эффектом образования ПЧД. Для модели “нейтральных звезд”, то есть для масс вблизи $\sim 0.1M_{\odot}$, это ограничение было исследовано в работе [96].

Следуя работам [128], [20], [130], предположим, что на некотором сопутствующем масштабе $\xi = r/a(t)$ в спектре космологических возмущений имеется достаточно высокий максимум. Флуктуации с $\delta_H > \delta_c \sim 1/3$ коллапсируют в ПЧД, а возмущения меньшей величины превратятся в СТМ. Массовая доля таких СТМ в составе ТМ выражается, аналогично (10), интегралом [79]

$$\beta_{cl} = \int_0^{\delta_c} \frac{d\delta_H}{\sqrt{2\pi}\Delta_H} \exp\left(-\frac{\delta_H^2}{2\Delta_H^2}\right). \quad (2.33)$$

Для избежания перепроизводства ПЧД необходимо, чтобы $\Delta_H \ll \delta_c$, поэтому $\beta_{cl} \approx 1/2$. То есть, половина ТМ войдет в состав СТМ – это то вещество, которое имеет отрицательную полную энергию относительно центра возмущения. Оставшаяся половина ТМ имеет положительную энергию, она не связана гравитационно со СТМ и останется в “войдах”. Конечно, на более поздних стадиях эта ТМ вне СТМ сможет войти в состав галактик и скоплений.

Свяжем массу ПЧД, которая по порядку величины равна полной массе вещества (в основном, релятивистского) внутри горизонта M_H , с массой ТМ M во флуктуации того же сопутствующего масштаба. В рассматриваемые космологические эпохи хорошим приближением служит плоская космологическая модель без лямбда-члена. Массы M_H и M связаны соотношением

$$M_H = \frac{4\pi}{3}\rho_H(a(\eta_H)\xi)^3, \quad M = \frac{4\pi}{3}\rho_0(a(\eta_0)\xi)^3. \quad (2.34)$$

В масштабе горизонта $a(\eta_{\text{H}})\xi = 2ct_{\text{H}}$, и при этом $\eta_{\text{H}} \ll \eta_*$ и $\rho_{\text{H}} = 3/32\pi Gt_{\text{H}}^2$. Современная плотность $\rho_0 = \rho_{\text{eq}}(a_{\text{eq}}/a_0)^3$. Используя (1.38), получаем

$$M_{\text{H}} = \frac{1}{2^{2/3}} \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{1/6} \frac{M^{2/3}c}{G^{1/2}\rho_{\text{eq}}^{1/6}} = 1.53 \times 10^5 \left(\frac{M}{0.1M_{\odot}} \right)^{2/3} M_{\odot}, \quad (2.35)$$

$$t_{\text{H}} = \frac{GM_{\text{H}}}{c^3} = 0.5 \left(\frac{M_{\text{H}}}{10^5 M_{\odot}} \right) \text{сек.} \quad (2.36)$$

Выясним, каким энергетическим масштабам соответствуют обсуждаемые массы. Т.к. связь между возрастом и температурой Вселенной имеет вид (1.11), масса излучения и масса ТМ внутри горизонта в зависимости от температуры Вселенной выражаются следующим образом:

$$M_{\text{H}} \simeq 15.46 \left(\frac{g_*}{10} \right)^{-1/2} \left(\frac{T}{100 \text{ МэВ}} \right)^{-2} M_{\odot}, \quad (2.37)$$

$$M = 1.02 \times 10^{-7} \left(\frac{T}{100 \text{ МэВ}} \right)^{-3} \left(\frac{g_*}{10} \right)^{-3/4} M_{\odot}. \quad (2.38)$$

Доля массы излучения, перешедшая в момент t_{H} в ПЧД дается выражением (10). В [160] показано, что в случае критического коллапса доля коллапсирующей массы составляет 0.8β , поэтому (10) является хорошим приближением. С помощью (2.35) и (10) космологический параметр плотности ПЧД $\Omega_{\text{ВН}}$ в настоящий момент t_0 выражается через массы СТМ и величину возмущений:

$$\Omega_{\text{ВН}} = \frac{\beta}{2^{2/3}} \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{1/6} \frac{c}{M_x^{1/3} G^{1/2} \rho_{\text{eq}}^{1/6}} \simeq 6 \times 10^5 \left(\frac{M_x}{0.1M_{\odot}} \right)^{-1/3} \frac{\Delta_{\text{H}}}{\delta_c} \exp \left\{ -\frac{\delta_c^2}{2\Delta_{\text{H}}^2} \right\}. \quad (2.39)$$

Полученное в рамках данного формализма ограничение на параметры СТМ показано на Рис. 2.3 штрихованной линией. Острый угол на графике соответствует ПЧД, которые испаряются в настоящее время по механизму Хоукинга.

2.4. О возможности регистрации сгустков

гравитационно-волновыми детекторами

В ряде работ было указано, что проектируемые гравитационно-волновые детекторы, такие как LISA, имеют возможность зарегистрировать небольшие

вариации гравитационного поля от пролетающих мимо компактных объектов. С помощью LISA предлагалось искать ПЧД [303], астероиды [304] или компактные объекты ТМ неизвестной природы [305]. СТМ могут быть включены в этот список. Наблюдаемый сигнал производится приливной гравитационной силой, которая изменяет длину плеча интерферометра и, соответственно, производит фазовый сдвиг. LISA будет иметь возможность поиска компактных объектов в интервале масс $10^{16} \text{ г} \leq M \leq 10^{20} \text{ г}$ согласно [303] и $10^{14} \text{ г} \leq M \leq 10^{20} \text{ г}$ по расчетам [305]. Сигнал будет иметь форму единичных импульсов с характерной частотой вблизи нижнего предела частот кривой чувствительности LISA, и повторяемость таких событий составит \sim в десятилетие, если объекты составляют преобладающую часть ТМ. СТМ в обычном сценарии, рассмотренном нами в разделе 1, составляют лишь 1-10% долю от всей ТМ, и соответственно, темп их детектирования будет на 1-2 порядка величины меньше. Кроме того, радиусы таких СТМ как правило значительно превышают длину плеча интерферометра LISA $L \simeq 5 \times 10^{11} \text{ см}$ (см. Рис. 2.7), поэтому приливные силы будут иметь меньшую величину. Таким образом, детектирование обычных СТМ с помощью LISA выглядит маловероятным. Следующие поколения гравитационно-волновых интерферометров, возможно, представляют большие перспективы (см. [303]).

Компактные сверхплотные СТМ легко удовлетворяют условию $R < L \simeq 5 \times 10^{11} \text{ см}$ для интервала масс $10^{14} \text{ г} \leq M \leq 10^{20} \text{ г}$ и поэтому, если эти СТМ существуют, то они могут быть зарегистрированы детектором LISA.

2.5. Нейтральные звезды и микролинзирование

При наблюдениях микролинзирования звезд в гало Галактики были обнаружены темные объекты с массами $\sim (0.1 \div 1)M_{\odot}$. Согласно [306], эти объекты должны составлять около 20% скрытой массы в гало, но число барионных объектов подобного типа ограничено на более низком уровне по первичному нуклеосинтезу. В связи с этим были предложены небарионные некомпактные объекты (СТМ), названные “нейтральными звездами”. Эти объекты способны объяснить некоторые из событий микролинзирования с признаками некомпактности линз [307], [308], [309]. Проблема микролинз к настоящему времени практически

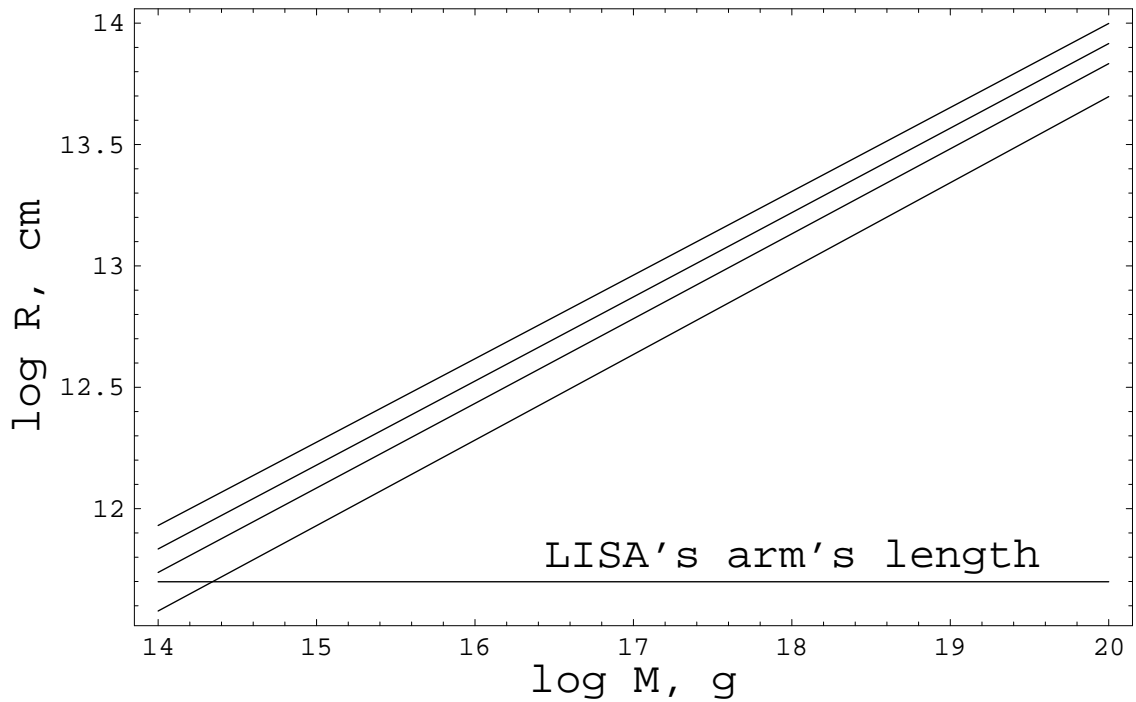


Рис. 2.7. Средний вириальный радиус СТМ R (1.50) в зависимости от массы СТМ M для нескольких значений показателя степени спектра первичных возмущений плотности (сверху вниз): $n_p = 0.949, 0.963, 0.977$ и 1 . Горизонтальная линия показывает длину плеча интерферометра LISA $L \simeq 5 \times 10^{11}$ см.

потеряла актуальность, т. к. почти все события можно объяснить переменностью звезд. Тем не менее, не исключено, что некоторые из наблюдавшихся событий микролинзирования объясняются сверхплотными СТМ. Нейтральные звезды дают очень сильный аннигиляционный сигнал даже в случае большого ядра $R_c \sim 0.1R$, поэтому для избежания противоречий с наблюдениями предполагалось, что нейтрально аннигилируют с малым сечением в р-волновом канале [309]. В работе [96] были уточнены механизмы образования СТМ из адиабатических возмущений плотности с учетом ограничений по перепроизводству ПЧД и было показано, что для обеспечения компактности гравитационных линз необходимо, чтобы СТМ формировались еще на стадии доминирования излучения – в конце этой стадии.

В [309] указано также, что барионное ядро, если оно формируется внутри СТМ, модифицирует кривую блеска при микролинзировании на СТМ. В последующих работах [89], [91], [92] СТМ также рассматривались как объекты, на которых возможно микролинзирование. В [89] рассматривались два типа СТМ:

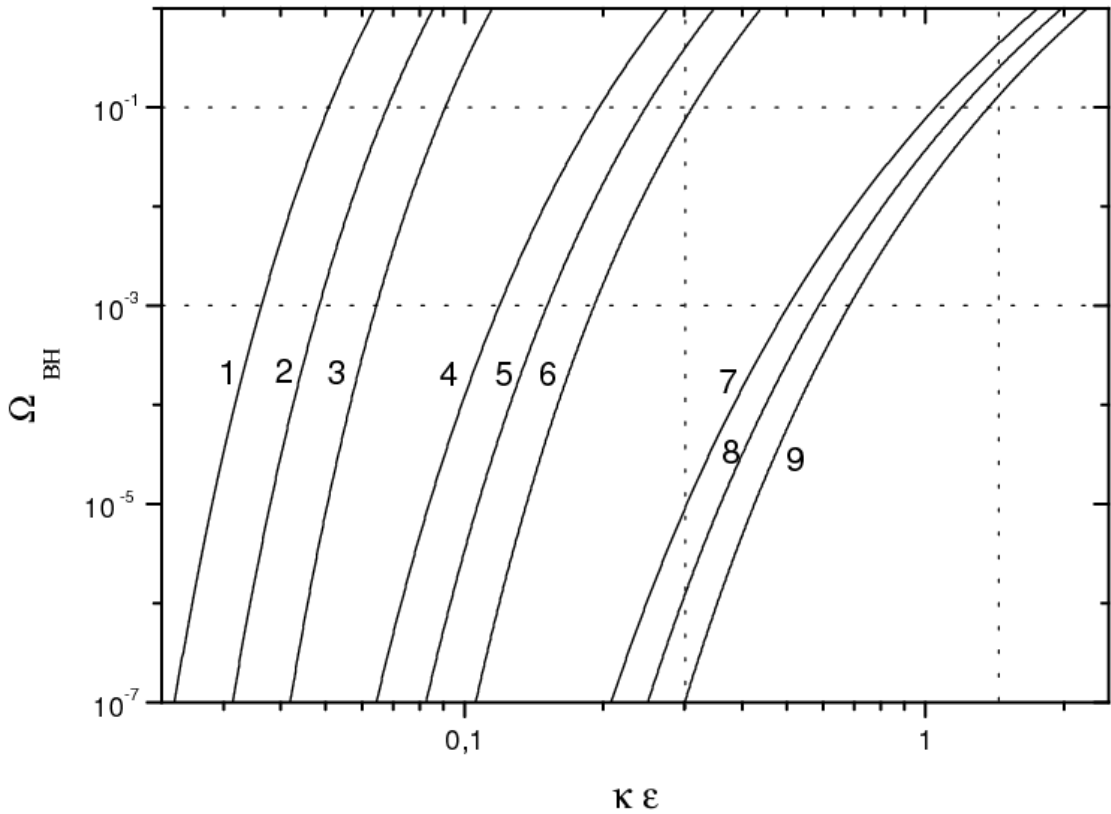


Рис. 2.8. Зависимость космологического параметра плотности ПЧД Ω_{BH} от коэффициента нелинейного сжатия и параметра компактности СТМ $\kappa\varepsilon$ при $\Omega_{\text{m}} = 0.3$. Кривые (1, 2, 3) соответствуют массам СТМ $M_x = (0.01, 0.1, 1)M_{\odot}$ при $\delta_c = 1/3$. Кривые (4, 5, 6) соответствуют $\delta_c = 1/2$, а кривые (7, 8, 9) соответствуют $\delta_c = 0.7$ при тех же массах. Горизонтальные линии отвечают верхним пределам $\Omega_{\text{BH}} = 0.1$ и $\Omega_{\text{BH}} = 10^{-3}$, а вертикальные линии соответствуют $\kappa\varepsilon = 0.3, 1.44$. Допустимые области расположены ниже горизонтальных и правее вертикальных линий.

минигало вокруг ПЧД и СТМ без центральной ПЧД.

В [309] предполагалось, что спектр возмущений имеет хорошо выраженный максимум, ведущий к формированию СТМ. В [96] показано, что в случае адиабатических возмущений плотности существование этого максимума неизбежно привело бы к формированию на радиационной стадии эволюции Вселенной большого количества ПЧД с массой $\sim 10^5 M_{\odot}$. СТМ может служить гравитационной линзой и объяснять наблюдаемые события микролинзирования лишь в том случае, если его радиус не более чем в десять раз превосходит радиус Эйнштейна [309]. Из этого условия следуют жесткие ограничения на коэффициент нелинейного сжатия СТМ [96].

Итоговый вириальный радиус СТМ

$$R_x = \kappa R_{\max}, \quad (2.40)$$

где R_{\max} – радиус максимального расширения на стадии формирования, κ – коэффициент нелинейного сжатия. Обычно полагают, что после остановки расширения СТМ вириализуется, сжимаясь по радиусу в 2 раза, то есть $\kappa = 0.5$ [168]. Однако согласно теории гравитационной неустойчивости в многопоточной области $\kappa \simeq 0.3$ [309]. Пока не известны физические процессы, которые могли бы вызвать сжатие СТМ до меньших величин $\kappa < 0.3$, поэтому мы приемлем значение $\kappa \simeq 0.3$ как нижнюю границу.

Для того, чтобы СТМ мог служить гравитационной линзой, его радиус не должен значительно превышать радиус Эйнштейна

$$R_E = 2\sqrt{GMd/c^2}, \quad (2.41)$$

где $d \sim 20$ кпс для гало Галактики. Определим ε как

$$\varepsilon \equiv 10 \frac{R_E}{R_x} \quad (2.42)$$

В работе [309] получено $\varepsilon \geq 1$, а если $\varepsilon < 1$, то теория вступает в противоречие с наблюдательными данными о кривых блеска линзируемых звезд [309]. В работе [310] исследовано одно из событий микролинзирования с массой линзы $M \simeq 0.02M_\odot$ и показано, что если СТМ не имеет в центре барионного ядра, то СТМ должен иметь радиус $R = 1.6 \times 10^{13}$ см и параметр компактности (в принятых здесь обозначениях) $\varepsilon \simeq 19$. При наличии барионного ядра с массой $0.05M$ получены значения $R = 5.7 \times 10^{13}$ см и $\varepsilon \simeq 4.8$. В [310] отмечено также, что ввиду больших наблюдательных погрешностей модель точечной линзы также допустима.

Из выражений (2.7), (2.41) и (2.42) получаем

$$\kappa\varepsilon = 10 \frac{R_E}{R_{\max}} = \frac{1.9 \times 10^{15} \text{ см}}{R_{\max}} \left(\frac{M_x}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{d}{20 \text{ кпс}} \right)^{1/2}. \quad (2.43)$$

Вычисления раздела 2.1.2 дают связь R_{\max} с δ_H , а δ_H определяет современную космологическую плотность ПЧД согласно (2.39). При этом нужно учесть, что СТМ образуются из флуктуаций среднеквадратичной величины, поэтому

величину $\delta_{\text{H}} = \Delta_{\text{H}}$. В итоге получаем зависимость Ω_{BH} от произведения $\kappa\varepsilon$, показанную на Рис. 2.8.

Рассмотрим событие микролинзирования, исследованное в работе [310], предполагая, что $\varepsilon = 0.3$. Без барионного ядра $\kappa\varepsilon \simeq 5.7$, и ограничение $\Omega_{\text{BH}} < 0.1$ исключает интерпретацию этого события как микролинзирования на СТМ для значений $\delta_{\text{c}} = 1/3 \div 0.7$.

Рассмотрим теперь более слабое условие $\kappa\varepsilon > 0.3$, имеющее место при $\varepsilon > 1$ и $\kappa > 0.3$. Ограничение $\Omega_{\text{BH}} < 0.1$ исключает модели с $\delta_{\text{c}} < 0.5$. При $\Omega_{\text{BH}} > 10^{-6}$ остается возможным модель с $\delta_{\text{c}} \simeq 0.7$. Ограничение $\Omega_{\text{BH}} < 10^{-3}$ полностью исключает варианты с $\delta_{\text{c}} = 1/3$, но допускает модели с $\delta_{\text{c}} > 1/3$.

Следовательно, СТМ могут служить гравитационными линзами лишь при большом пороге образования ПЧД $\delta_{\text{c}} > 0.5$, полученном в моделях критического гравитационного коллапса, а при меньших значениях δ_{c} (в том числе, при $\delta_{\text{c}} = 1/3$) модель СТМ как объектов микролинзирования исключается.

Наоборот, если в будущем некомпактная природа некоторых линз будет доказана, то в случае адиабатических возмущений плотности это приводит к выводу о возможности формирования большого количества ПЧД с массами $\sim 10^5 M_{\odot}$. Не исключено, что одна из таких ПЧД уже найдена космической рентгеновской обсерваторией Чандра в галактике M82 [311].

Можно рассмотреть ситуацию, обратную описанной выше. Согласно гипотезе [20], объекты в гало, ответственные за микролинзирование, представляют собой ПЧД с массами $\sim (0.01 \div 1) M_{\odot}$. Если оставшаяся часть ТМ составляют элементарные частицы, то из них на пылевидной стадии будут формироваться СТМ. По формуле (2.35) можно оценить массы СТМ $\sim 10^{-11} \div 10^{-8} M_{\odot}$. Такие массы возможны, если масса частиц ТМ больше 1 ГэВ [309].

2.6. Вторичная аккреция и “ультракомпактные минигало”

В духе моделей “вторичной аккреции” [70], [71], [72] предположим, что на стадии доминирования излучения имеется затравочная масса M_{c} , а в некоторой области пространства вблизи нее до наступления пылевидной стадии ТМ распределена однородно (влияние соседних возмущений обсудим позже). При

$t \ll t_{\text{eq}}$ в масштабах масс $M \gg M_c$ возмущение в ТМ $\delta_i = M_c/M$ не эволюционирует. Действительно, согласно решению Месзароша $\delta = \delta_i(1 + 3x/2)$, где $x = a/a_{\text{eq}}$. Это решение легко получить из уравнения (2.4) в линейном приближении. Формально в момент t_{eq} имеем $\delta_{\text{eq}} = (5/2)\delta_i$, однако вид решения Месзароша при $x \gg 1$ показывает, что в качестве начального условия, соответствующего растущей моде возмущения, необходимо подставлять $\delta_{\text{eq}} = (3/2)\delta_i$.

Далее при $t > t_{\text{eq}}$ можно воспользоваться известным решением для сферически-симметричного случая с заменой $5\delta_{\text{eq}}/3 \rightarrow \delta_{\text{eq}}$ [72]. В сферическом случае $M = (4\pi/3)\rho_{\text{eq}}r_{\text{eq}}^3$, где r_{eq} – радиус области возмущения в момент перехода к пылевидной стадии. Радиус слоя, испытавшего вириализацию,

$$r_c = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{M^{4/3}}{\rho_{\text{eq}}^{1/3} M_c} \simeq 3.2 \left(\frac{M_c}{10^2 M_\odot} \right)^{1/3} \left(\frac{100}{1+z} \right)^{4/3} \text{ пк}, \quad (2.44)$$

а масса вириализованного объекта в зависимости от красного смещения:

$$M(z) = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3\pi} \right)^{2/3} \frac{1+z_{\text{eq}}}{1+z} M_c \approx 1.7 \times 10^3 \left(\frac{M_c}{10^2 M_\odot} \right) \left(\frac{1+z}{100} \right)^{-1} M_\odot, \quad (2.45)$$

причем $(3/2)(2/(3\pi))^{2/3} \approx 0.53$. Используя связь массы индуцированного гало с его радиусом (2.44), находим профиль плотности индуцированного гало

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r_c^2} \left. \frac{dM(r_c)}{dr_c} \right|_{r_c=r} \simeq 3 \times 10^{-21} \left(\frac{r}{1 \text{ пк}} \right)^{-9/4} \left(\frac{M_c}{10^2 M_\odot} \right)^{3/4} \text{ г см}^{-3}. \quad (2.46)$$

В случае некомпактной центральной массы, например протяженного скопления ПЧД, профиль плотности не совпадает с профилем $\rho \propto r^{-9/4}$, образующемся при вторичной аккреции. Таким образом, вокруг сверхплотного СТМ, образующегося на РД-стадии, в процессе вторичной аккреции [72] может нарастать дополнительное гало ТМ с профилем плотности $\propto r^{-9/4}$ [95]. Аналогичное гало может нарастать вокруг ПЧД [76], [77], [78], [81].

Полная масса индуцированного гало растет со временем, поскольку все больше удаленных областей отделяются от космологического расширения и вириализуются вокруг затравки. Рост индуцированного гало прекращается в ту эпоху, когда на нелинейную стадию выходят обычные (образовавшиеся из инфляционных возмущений) флуктуации плотности ТМ с массой M равной массе

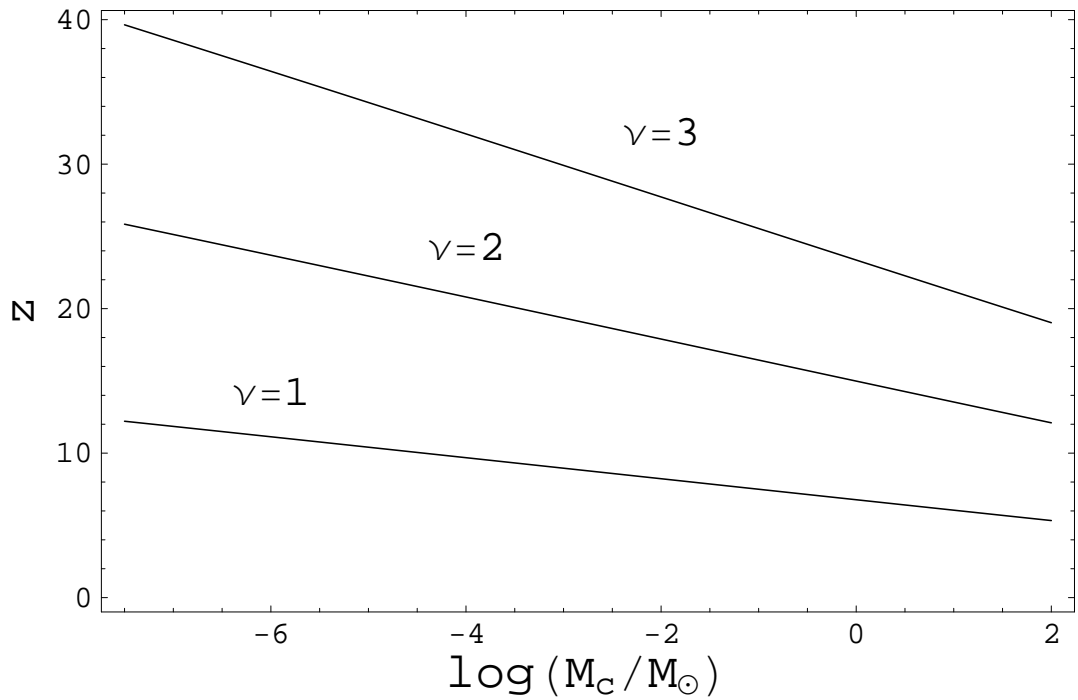


Рис. 2.9. Красное смещение z остановки роста гало, согласно решению уравнения (2.47) при высоте пиков $\nu = 1, 2$ и 3 .

индуцированного гало. Законы роста обычных возмущений и возмущений, индуцированных затравочной массой, одинаковы в эпоху доминантности материи. Следовательно, условие прекращения роста типичного индуцированного гало из-за гравитационной неустойчивости есть

$$\nu\sigma_{\text{eq}}(M) = \frac{9}{10} \frac{M_c}{M}, \quad (2.47)$$

где ν - величина возмущения плотности в единицах среднеквадратичной величины флуктуаций. Правая часть уравнения (2.47) обозначает амплитуду возмущения, создаваемого массой M_c с учетом поправочных коэффициентов [7]. Левая часть уравнения обозначает обычные гауссовы флуктуации в момент t_{eq} . Численное решение уравнения (2.47) дает красное смещение, см. Рис. 2.9, и итоговую среднюю массу индуцированного гало, см. Рис. 2.10.

В частности, по рассмотренному в этом разделе механизму могут образовываться СТМ вокруг ПЧД [76], [77], [78].

В последнее время в ряде работ [78], [89], [79], [90], [80], [81], [91], [85], [82], [83], [92], [93] были рассмотрены так называемые ультракомпактные минигало – СТМ образовавшиеся очень рано (в начале пылевидной стадии) из больших воз-

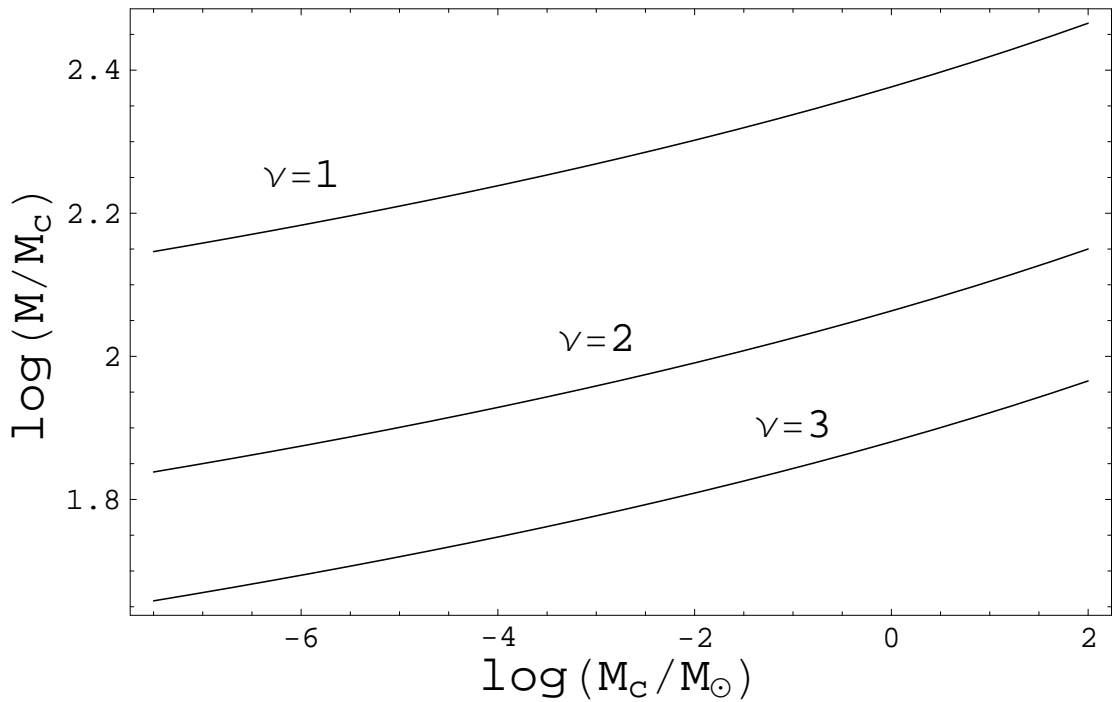


Рис. 2.10. Масса индуцированного гало, сформировавшегося в процессе вторичной аккреции, в зависимости от массы затравочного центрального объекта при относительных величинах возмущений плотности $\nu = 1, 2$ и 3 (сверху вниз). Масса индуцированного гало останавливает рост благодаря силам гравитации со стороны соседних возмущений.

возмущений плотности различной природы: пиков в спектре или из возмущений, усиленных в результате фазовых переходов в ранней Вселенной.

В [95] рассматривалось образование сверхплотных СТМ на РД-стадии эволюции Вселенной из энтропийных возмущений (возмущений постоянной кривизны). В работе [96] рассмотрено образование СТМ на РД-стадии из адиабатических возмущений и было указано, что спектры масс ПЧД и СТМ могут быть связаны их единым происхождением из общего спектра возмущений плотности с пиком. Позже похожая идея ультракомпактных минигало из больших возмущений плотности обсуждалась в работах [79], [90], [80], [82], [83] и более подробно с детальным расчетом эволюции спектра возмущений – в работе [91]. Важная идея, которая сформулирована в [90] и [91], заключается в том, что ограничения по аннигиляции, в принципе, позволяют ограничить спектр первичных возмущений, из которых формируются СТМ. Однако для надежного установления таких ограничений, помимо свойств частиц ТМ, необходимо выяснить структуру СТМ, особенно в его центральной области.

В работах [78], [79], [80], [81], [83], [83] не был четко сформулирован критерий окончания роста массы СТМ в процессе вторичной аккреции. Предполагалось, что это происходит при $z \sim 10 - 30$, когда начинают активно формироваться крупномасштабные структуры в ТМ. Ранее более строгий критерий окончания роста (2.47) был найден в работах [76], [77].

2.7. Аннигиляция темной материи в сверхплотных сгустках

2.7.1. Аннигиляционный критерий для радиуса ядра

Для расчет темпа аннигиляции ТМ в сверхплотных СТМ и для вычисления потоков производимого при аннигиляции излучения требуется знать профиль плотности СТМ и, прежде всего, максимальную плотность в центре СТМ: величину ρ_c или радиус ядра R_c в формуле (1). В [114], [136] максимальная плотность в центре СТМ была оценена на основе темпа аннигиляции и прошедшего с момента образования СТМ времени:

$$\rho(r_{\min}) \simeq \frac{m}{\langle \sigma v \rangle (t_0 - t_f)} \quad (2.48)$$

где t_0 – современный момент времени, а t_f – момент формирования СТМ. Согласно этой оценке, радиус ядра со временем становится больше из-за аннигиляционных потерь частиц на орбитах, проходящих вблизи центра СТМ. Для изотермического профиля $\rho(r) \propto r^{-2}$ соответствующий радиус ядра

$$\frac{R_c}{R} \simeq \left(\frac{\langle \sigma v \rangle t_0 \bar{\rho}}{3m} \right)^{1/2}, \quad (2.49)$$

приведен в Таблице 1.3 для сечения аннигиляции $\langle \sigma v \rangle \simeq 3 \times 10^{-26} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$, соответствующего тепловому рождению частиц, и $m = 100 \text{ ГэВ}$. Этот подход подразумевает, что орбиты частиц вблизи центра СТМ не заполняются вновь после аннигиляции находившихся на них частиц. Выражение (2.48) применялось в работах [79], [90], [80], [81], [91], [82], [83]. Противоположный случай с компенсацией потерь частиц был рассмотрен в работах [114] и [115]. В реальном СТМ есть некоторые механизмы регенерации орбит с малыми угловыми

моментами, которые проходят через область ядра СТМ. Заполнение орбит приведет к большей плотности в центре по сравнению с (2.48). Отметим, что до аннигиляции в действие могут вступить другие факторы, препятствующие росту плотности в центре, например, ограничение по теореме Лиувилля.

2.7.2. Аннигиляция нейтралино в сверхплотных сгустках

Рассмотрим аннигиляцию обычных нейтралино с массами $m \sim 100$ ГэВ и найдем аннигиляционный сигнал от СТМ и формирующихся вокруг них гало ТМ. Темп аннигиляции в единичном объекте содержит вклад от трех компонент: от СТМ на радиусах $r < R$, от промежуточной области $R \leq r \leq R_e$ и от внешнего гало $R_e \leq r \leq R_h$, образуемому по механизму вторичной аккреции на пылевидной стадии,

$$\dot{N}_{\text{cl}} = 4\pi \left[\int_0^R + \int_R^{R_e} + \int_{R_e}^{R_h} \right] r^2 dr \rho_{\text{int}}^2(r) m^{-2} \langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle. \quad (2.50)$$

Первый интеграл в квадратных скобках равен

$$\dot{N}_{\text{cl}}^{(1)} = \frac{3}{4\pi} \frac{\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle M^2}{m^2 R^3} S, \quad (2.51)$$

где функция S дается выражением (1.150). Если $\beta \geq 1.5$, то вклад (2.51) в (2.50) является доминирующим, поэтому в (2.50) можно пренебречь двумя последними интегралами. Отметим, однако, что в случае ультракомпактного минигало, затравкой которого является ПЧД, доминирующим был бы второй интеграл.

Параметризуем аннигиляционный сигнал в направлении ψ (по отношению к центру Галактики) в телесном угле $\Delta\Omega$ стандартным способом (1.146). Для диффузного сигнала от кластеризованной ТМ

$$\langle J(\psi) \rangle_{\Delta\Omega} = f_{\text{cl}} S \left(\frac{\bar{\rho}_{\text{int}}}{0.3 \text{ ГэВ см}^{-3}} \right) \int_{l.o.s.} \frac{dL}{8.5 \text{ кпк}} \left(\frac{\rho_H(r)}{0.3 \text{ ГэВ см}^{-3}} \right), \quad (2.52)$$

где в качестве профиля плотности гало Галактики $\rho_H(r)$ мы выбрали профиль Наварро-Френка-Уайта. Предполагаем, что аннигиляция идет в преимущественно в канале с рождением и распадом пионов $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$.

Выше мы оценили долю f_{cl} выживших СТМ, которая оказалась чувствительной к порогу возможной несферичности $\Delta s_f/b_f < 1$, обсуждавшейся в разделе 2.2. Мы положили для оценки в правой части порог равным единице, но точное значение, вероятно, может быть найдено в будущих численных моделированиях формирования СТМ методом N -тел. На данной стадии f_{cl} может рассматриваться как свободный параметр. Обозначим через ω следующую комбинацию параметров

$$\omega = \left(\frac{\eta_{\pi^0}}{10}\right) \left(\frac{m}{100 \text{ ГэВ}}\right) \left(\frac{\langle\sigma v\rangle}{10^{-26} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}}\right) \left(\frac{f_{\text{cl}}}{10^{-5}}\right) S. \quad (2.53)$$

Сравним рассчитанный сигнал в направлении на антицентр Галактики с диффузным фоном, измеренным Fermi-LAT $J_{\text{obs}}(E > m_{\pi^0}/2) = 1.8 \times 10^{-5} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1} \text{ ср}^{-1}$ [312]. Рассчитанный предел сверху на величину ω показан на Рис. 2.11. Как можно видеть, аннигиляция обычных нейтрино в СТМ возможна, если принять во внимание эффект несферичности (см. Рис. 2.5). Без этого эффекта было бы $f_{\text{cl}} \sim 1$, и аннигиляционный сигнал превышал бы предел Fermi-LAT даже в случае минимально возможного сечения аннигиляции, полученного в [115].

2.7.3. Гравитермическая катастрофа в ядре для сверхтяжелых частиц

Рассмотрим сверхплотные СТМ, состоящие из сверхтяжелых частиц ТМ. Эти СТМ долгое время эволюционируют как изолированные объекты без слияний друг с другом. Первая стадия их эволюции – обычное гравитационное сжатие – ведет к формированию профиля плотности $\rho(r) \propto r^{-1.8}$ и, вероятно, большого ядра с радиусом $R_c \sim (0.01 - 0.1)R$, где R – вириальный радиус СТМ. На этом этапе радиус ядра ограничен пределом на фазовую плотность согласно теореме Лиувилля [105].

Гравитационная неустойчивость и “гравитермическая катастрофа” в шаровых скоплениях развивается за счет парных гравитационных рассеяний звезд. Аналогичный процесс может стать главным фактором эволюции для сверхплотных СТМ, состоящих из сверхмассивных частиц ТМ. Большая плотность в сверхплотных СТМ приводит к тому, что время релаксации $t_{\text{rel,gr}}$ становится меньше возраста Вселенной t_0 . Время двухчастичной гравитационной релакса-

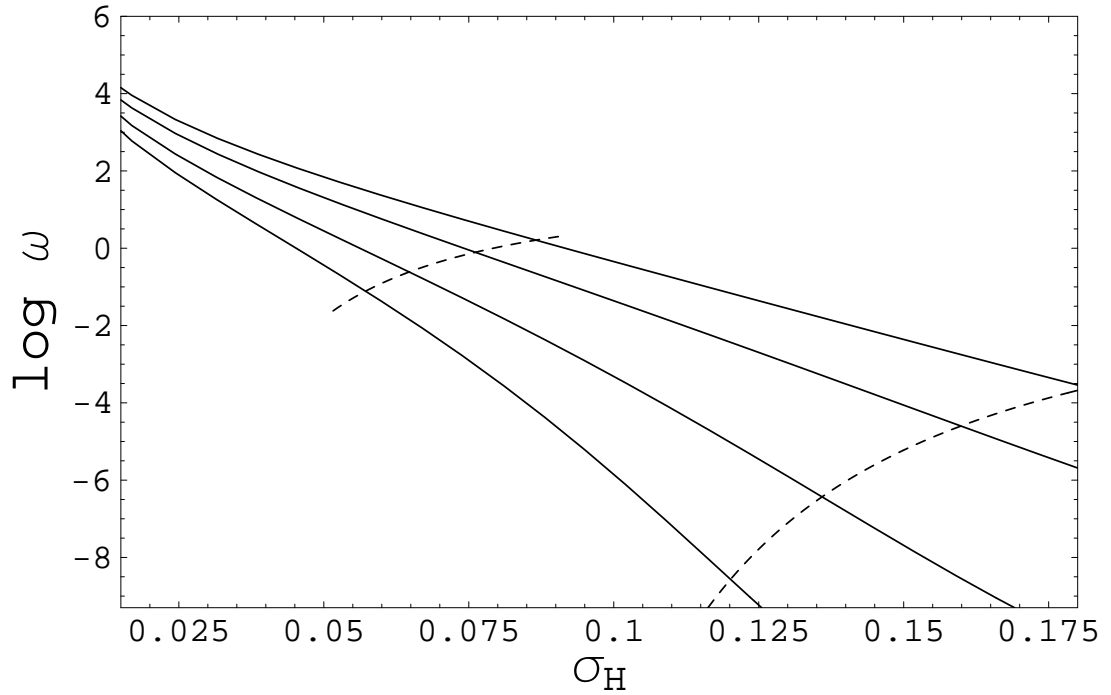


Рис. 2.11. Сплошные линии показывают верхние пределы на величину ω , определяемую выражением (2.53), для масс СТМ $M = 10^2, 10^{-1}, 10^{-6} M_\odot$ и $10^{-11} M_\odot$ (сверху вниз). Ограничение по ПЧД с порогами $\delta_{\text{th}} = 1/3$ и $\delta_{\text{th}} = 0.7$ показаны, соответственно, левой и правой штрихованными кривыми.

ции выражается следующей формулой (см. [313] и ссылки в статье)

$$t_{\text{rel,gr}} \simeq \frac{1}{4\pi G^2 m \rho \ln(0.4N)} v^3, \quad (2.54)$$

где $v \sim (GM/R)^{1/2}$ – вириальная скорость частиц, N – полное число частиц в СТМ, $N = M/m$, $\rho = mn$. Из (2.54) видно, что время релаксации обратно пропорционально m^2 и концентрации n частиц в ядре, что делает это время малым при больших значениях этих величин.

В режиме “гравитермической катастрофы” происходит испарение (вылет) частиц из ядра СТМ, которое при этом уменьшается в размерах [313]. Эволюция ядра определяется темпом испарения и теоремой вириала в следующем виде

$$\dot{N}_c/N_c = -a/t_{\text{rel,gr}}, \quad \dot{R}_c/R_c = 2\dot{N}_c/N_c - \dot{E}_c/E_c, \quad (2.55)$$

где величина $a \approx 7.4 \times 10^{-3}$ соответствует максвелловскому начальному распределению скоростей. Интегрирование приведенных выше уравнений с логарифмической точностью ($\ln(0.4N) \approx \text{const}$) при условии $E_c = \text{const}$ дает зави-

симось массы M_c и радиуса R_c ядра от времени:

$$M_c(t) = mN_c(t) = M_{c,i}(1 - (t - t_i)/t_e)^{2/7}, \quad (2.56)$$

$$R_c(t) = R_{c,i}(1 - (t - t_i)/t_e)^{4/7}, \quad (2.57)$$

где $t_e = 2/(7\alpha)t_{\text{rel,gr},i} \simeq 40t_{\text{rel,gr},i}$, и индексом i помечены величины в начальный момент t_i формирования СТМ. Момент времени t_e меньше возраста Вселенной для СТМ выше точечной кривой на Рис. 2.12 для $m = 10^{11}$ ГэВ. Таким образом, для СТМ, расположенных в пространстве параметров выше точечной кривой, гравитационная релаксация ведет к “гравитермической катастрофе” с образованием изотермического профиля плотности $\rho \propto r^{-2}$ с очень малым новым ядром в центре СТМ. Должен существовать физический процесс, который предотвращает появление экстремально больших плотностей.

Первый из кандидатов в такие процессы – это электрослабое рассеяние частиц, т. е. их самовзаимодействие. Время релаксации для этого процесса оценивается следующим образом

$$t_{\text{rel},\chi\chi}^{-1} \simeq \frac{4(2\pi)^{1/2}v\sigma_{\chi\chi}n_c}{3^{5/2}}, \quad (2.58)$$

где $\sigma_{\chi\chi}$ – сечение упругого рассеяния нейтралино:

$$\frac{d\sigma_{\chi\chi}}{d\Omega} \simeq \frac{A\alpha^2}{m^2}, \quad (2.59)$$

где A – константа порядка единицы, которая зависит от параметров суперсимметрии, $\alpha = 1/137$ и $v \simeq (GM/R)^{1/2}$ – вириальная скорость. Это время релаксации имеет ту же функциональную зависимость от плотности ядра ($\propto n_c$) как и время гравитационной релаксации (2.54), но в случае СЧТМ (2.58) на много порядков меньше. Таким образом, самовзаимодействие не может остановить коллапс ядра. Более того, в работе [114] показано, что упругие рассеяния частиц не изменяют центрального распределения ТМ.

Другой эффект, который мог бы остановить коллапс ядра, – это аннигиляция частиц ТМ. Этот эффект был ранее исследован в [114] для расчета максимально достижимой плотности. Радиус ядра был найден из условия, что характерное время аннигиляции в ядре больше гидродинамического времени

образования ядра $t_h \sim (G\bar{\rho})^{-1/2}$. Для изотермического профиля плотности соответствующий радиус x_c выражается следующим образом

$$x_c^2 \simeq \frac{\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle \rho^{1/2}}{G^{1/2} m}. \quad (2.60)$$

Большая масса сверхтяжелой частицы m в знаменателе делает этот радиус очень малым

$$x_c \simeq 7.4 \times 10^{-13} m_{11}^{-3/2} \left(\frac{\rho}{10^5 \text{ г см}^{-3}} \right)^{1/4}, \quad (2.61)$$

где $m_{11} = m/(10^{11} \text{ ГэВ})$. В другом подходе [115] рассчитанный радиус ядра оказывается значительно меньшим, чем (2.61).

Если сверхтяжелые частицы ТМ являются фермионами, как в случае с нейтрино, тогда имеет место давление вырожденного ферми-газа. Максимальная плотность в ядре и, соответственно, радиус ядра могут быть найдены из равенства импульса Ферми частицы вырожденного газа и ее вириального импульса на границе ядра $r = r_c$.

$$p_F = (3\pi^2)^{1/3} (\rho_c/m)^{1/3} = mV_c, \quad (2.62)$$

где $V_c = \sqrt{GM_c/r_c}$ – вириальная скорость на границе ядра, $M_c = (4\pi/3)\rho_c r_c^3$ – масса ядра. Для профиля плотности $\rho(r) \propto r^{-2}$ вириальная скорость одинакова на всех радиусах r . Выражая радиус ядра соотношением $x_c = (\bar{\rho}/3\rho_c)^{1/2}$, получаем

$$x_c^2 = \pi^2 \frac{\bar{\rho}}{m^4} \left(\frac{GM}{R} \right)^{-3/2}. \quad (2.63)$$

Для СТМ с массой $M \sim 1 \times 10^5$ г средняя плотность $\bar{\rho} \sim 3 \times 10^3$ г/см³ и $R \sim 3$ см, получающийся радиус ядра $x_c \sim 10^{-11}$.

В качестве конкретных примеров рассмотрим три набора параметров, которые далее мы будем использовать для расчета аннигиляционного сигнала от СТМ. Сначала рассмотрим оптимистический вариант для бино с $m = 10^{11}$ ГэВ. Рассмотрим СТМ с массами $M \simeq 10^5$ г, образовавшиеся из флуктуаций величиной $\delta_H \simeq 0.09$. Этот вариант отмечен на Рис. 2.12 звездочкой. Профиль плотности такого СТМ $\rho(r) \propto r^{-2}$ (мы выбрали изотермический профиль, который близок к аналитическим и численным результатам ряда работ $\beta \simeq 1.7 - 2$) и начальный радиус ядра $x_{c,1} \sim 0.01$. Такие СТМ имеют среднюю плотность

$\bar{\rho} \simeq 1.3 \times 10^3 \text{ г см}^{-3}$, радиус $R \simeq 2.6 \text{ см}$ и вириальную скорость $v \simeq 0.05 \text{ см/с}$. Для этих параметров время эволюции начального ядра $t_e \simeq 0.4t_0$. Вырождение Ферми ограничивает рост плотности в центре СТМ, и новый радиус ядра $R_{c,2} \simeq 2.9 \times 10^{-11} \text{ см}$ ($x_{c,2} \simeq 1.1 \times 10^{-11}$).

Более типичные параметры (этот случай отмечен крестиком на Рис. 2.12): $M \simeq 10^{15} \text{ г}$ и $\delta_H \simeq 0.07$. Эти СТМ имеют тот же самый профиль плотности и начальный радиус ядра $\rho(r) \propto r^{-2}$ и $x_{c,1} \sim 0.01$. Но теперь $\bar{\rho} \simeq 6.3 \times 10^{-11} \text{ г см}^{-3}$, $R \simeq 1.6 \times 10^8 \text{ см}$, $v \simeq 0.65 \text{ см/с}$, и сингулярность плотности в центре СТМ не возникает.

В случае хиггсина с той же массой $m = 10^{11} \text{ ГэВ}$ оптимистический выбор параметров соответствует СТМ с $M = M_d \simeq 6 \times 10^{21} \text{ г}$. Профиль плотности таких СТМ $\rho(r) \propto r^{-2}$, и радиус ядра $x_{c,1} \sim 0.01$. “Гравитермической катастрофы” в этом случае также не происходит. Эти СТМ имеют $\bar{\rho} \simeq 10^{-6} \text{ г см}^{-3}$, $R \simeq 10^9 \text{ см}$ и $v \simeq 600 \text{ см/с}$.

2.7.4. Аннигиляция сверхмассивных частиц в сверхплотных сгустках

Для достаточно плотных СТМ релаксация за счет двухчастичного гравитационного рассеяния может инициировать “гравитермическую катастрофу”, и профиль плотности в центральной части СТМ трансформируется в изотермический профиль $\rho \propto r^{-2}$ с очень малым новым ядром. Этот процесс имеет место для бино. Благодаря возрастанию плотности аннигиляция ТМ в таких СТМ существенно усилена.

В противоположность бино, вино и хиггсина сильно связаны с тепловой плазмой. В результате “гравитермическая катастрофа” не возникает. Вириальные скорости частиц ТМ в сверхплотный СТМ очень малы, что ведет к усилению Зоммерфельда для темпа аннигиляции вино и хиггсина. Принимая во внимание этот эффект, мы покажем, что аннигиляционный поток может быть на наблюдаемом уровне на всех типов нейтралино.

Используя в случае хиггсина “оптимистические” параметры, приведенные в разделе 2.7.3, мы получаем гигантское усиление $\mathcal{R} \sim 10^{10}$. С другой стороны, хиггсина относительно сильно связано с тепловой плазмой, что ведет к относительно большой величине M_d . Таким образом, в случае с хиггсина “гравитерми-

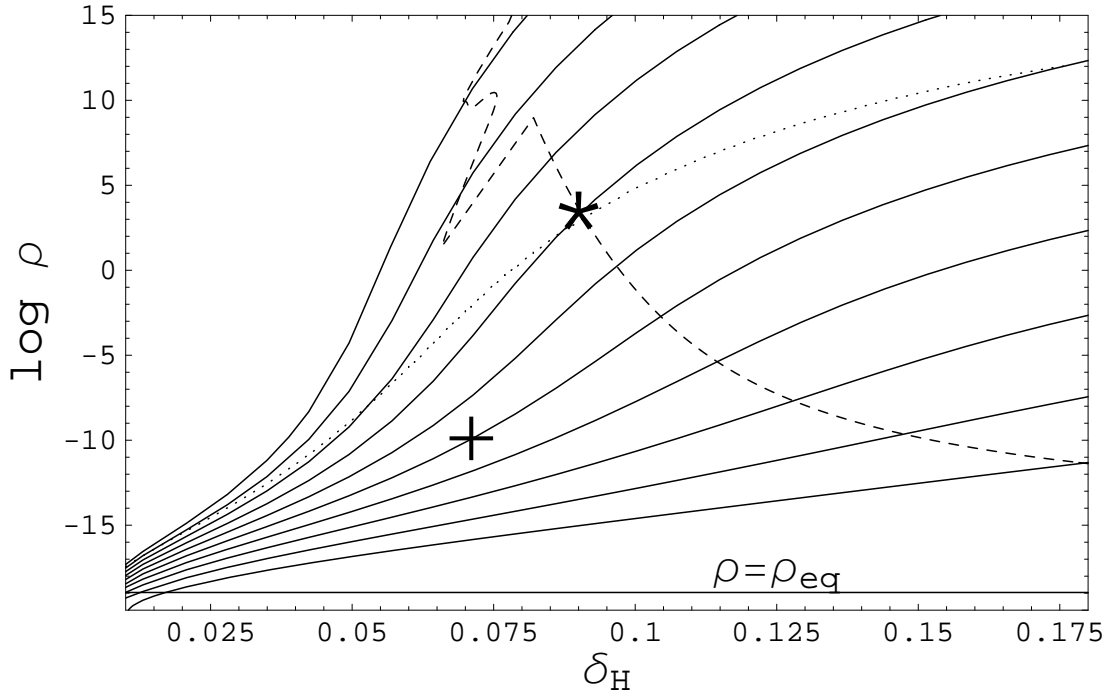


Рис. 2.12. Средняя плотность ρ (в г см^{-3}) СТМ в зависимости от величины возмущения δ_{H} в плотности излучения на масштабе горизонта; сплошные линии соответствуют массам СТМ (сверху вниз) $M = 10^{-10}, 10^{-5}, 1, 10^5, 10^{10}, 10^{15}, 10^{20}, 10^{25}, 10^{30}, 10^{35}$ г. Штриховая кривая показывает верхний предел плотности СТМ согласно эффекту перепроизводства ПЧД с порогом образования $\delta_c = 0.7$. Время двухчастичной релаксации меньше возраста Вселенной для СТМ выше точечной кривой при $m = 10^{11}$ ГэВ. Звездочкой отмечены наиболее благоприятные параметры для аннигиляции, крест обозначает типичные параметры для сравнения.

ческой катастрофы” в СТМ не происходит, и мы используем $S = 1$. Для бино усиление Зоммерфельда не эффективно – $\mathcal{R} = 1$. Используя “оптимистические” параметры, мы находим $S \simeq 4/(9x_{c,2}) \sim 4 \times 10^{10}$. Таким образом, аннигиляция бино в СТМ, образовавшихся на стадии доминирования излучения, может быть усилена в $S \sim 4 \times 10^{10}$ раз по сравнению со случаем однородного распределения ТМ внутри СТМ.

Вычисленные в работе [119] максимальные потоки фотонов, нуклонов и нейтрино от аннигиляции частиц с $m = 10^{11}$ ГэВ, допустимые имеющимися данными по космический лучам, показаны на Рис. 2.13 вместе с верхними пределами по потокам нейтрино из экспериментов Pierre Auger [314] и RICE, а также с ожидаемыми данными на уровне 90% чувствительности за пять лет наблюдений на детекторе IceCube [315]. Для величин, полученных в “оптимисти-

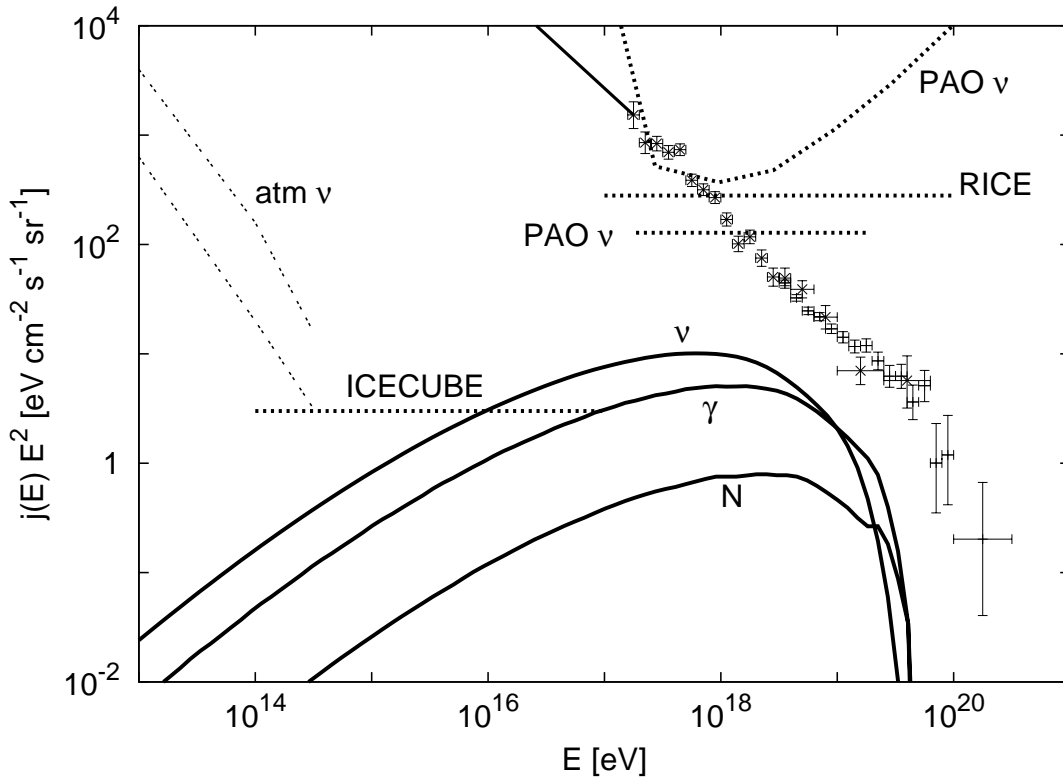


Рис. 2.13. Максимальный поток $I_i(E)$ фотонов, нуклонов и нейтрино от аннигиляции нейтралино с массами 10^{11} ГэВ в гало Галактики вместе с данными наблюдений.

ческом” примере для бино поток на Рис. 2.13 был умножен на множитель 10^{-14} , а для хиггсина – на множитель 10^{-5} . Как видно, в “оптимистическом” случае рассчитанный поток на много порядков величины превосходит экспериментальные данные. При переходе к более консервативным параметрам (прежде всего, к меньшей средней плотности СТМ) рассчитанные потоки уменьшаются. Таким образом, имеется достаточно широкий диапазон параметров, при которых наша модель может соответствовать данным наблюдений. В настоящее время модель с аннигиляцией сверхтяжелых частиц более всего ограничена данными по доле фотонов в составе космических лучей сверхвысоких энергий [316] и по их анизотропии [317]. Однако в будущем большие нейтринные телескопы, такие как IceCube могут представить более жесткие ограничения.

2.7.5. Ограничения на аннигиляцию частиц по реликтовому излучению и первичному нуклеосинтезу

Возмущение спектра космического микроволнового фонового излучения за счет дополнительного выделения энергии (например, при распадах массивных частиц [318]) до рекомбинации рассматривалось в [319]. Особенности в спектре могли формироваться только в интервале красных смещений $z_1 = 10^7 \leq z \leq z_{rec} \simeq 10^3$. Энерговыведение характеризуется безразмерной величиной

$$q = \int_{t_1}^{t_{rec}} \frac{Q(t)dt}{\varepsilon_r(t)}, \quad (2.64)$$

где $\varepsilon_r(t)$ – плотность энергии реликтового излучения и $Q(t)$ – темп выделения энергии в единице объема. Мы будем рассматривать случай, когда источником Q является аннигиляция частиц в сверхплотных СТМ:

$$Q = 2mc^2 r_{em} n_{cl}(t) \dot{N}_{ann}, \quad (2.65)$$

где $n_{cl}(t) = \xi \rho_{DM}/M$ – концентрация СТМ, r_{em} – доля массы покоя частиц, переходящая в реликтовое излучение. Интегрирование в (2.64) можно выполнить с помощью известной связи $t = t(z, \Omega_\Lambda, \Omega_m)$. В результате, находим

$$q = 2 \times 10^{-15} m_{13}^{-3} \left(\frac{\xi}{0.5} \right) \left(\frac{r_{em}}{0.5} \right) \left(\frac{\rho}{10^{-10} \text{Г см}^{-3}} \right) \left(\frac{x_c}{10^{-27}} \right)^{-0.6} \left(\frac{z_{rec}}{10^3} \right)^{-5/2}. \quad (2.66)$$

Согласно наблюдениям, эта величина ограничена значением $q \leq 10^{-2}$. Таким образом, (2.66) дает лишь слабое ограничение по сравнению с ограничениями по первичному нуклеосинтезу, к рассмотрению которых мы сейчас переходим.

Рассмотрим производство ${}^3\text{He}$ и дейтерия за счет аннигиляционного энерговыведения. Мы получим ограничения на СТМ, состоящие из сверхтяжелых частиц ТМ, которые могут аннигилировать в частицы, которые создают каскады c ($X \rightarrow c + \text{что-то еще}$) с вероятностью (branching ratio) b_c [320]. Фотодезинтеграция ${}^4\text{He}$ каскадными фотонами и производство ${}^3\text{He}$ и дейтерия рассматривалось в [320], [321]. Аналогично расчетам [320], можно записать относительные количества элементов в следующем виде

$$\frac{{}^3\text{He} + D}{\text{H}} = f_c b_c \frac{n_{cl}}{n_{\text{H}}} 2 \left(\frac{mc^2}{1 \text{ ГэВ}} \right) \dot{N}_{ann} \int dt [N({}^3\text{He}, z_c(t)) + N(D, z_c(t))], \quad (2.67)$$

где $n_{cl} = \xi \rho_{DM}/M$ – концентрация СТМ при $z = 0$, n_H – концентрация атомов водорода, f_c – доля массы частицы m , трансформируемая в каскадную энергию, $N(^3He, z_c(t))$ – число ядер 3He , получаемых из 1 ГэВ полной каскадной энергии на красном смещении $z_c(t)$ (эта величина приведена на Рис. 5 работы [320]). Интеграл в (2.67) равен $5.6 \times 10^{-6} H_0^{-1} \text{ ГэВ}^{-1}$. Из (2.67) получаем

$$\frac{^3He + D}{H} \simeq 7 \times 10^{-16} f_c b_c \xi m_{13}^{-3} \left(\frac{\xi}{0.5} \right) \left(\frac{\rho}{10^{-10} \text{ г см}^{-3}} \right) \left(\frac{x_c}{10^{-27}} \right)^{-0.6}, \quad (2.68)$$

где ρ – средняя плотность СТМ. Наблюдательный предел $(^3He + D)/H < 5 \times 10^{-5}$ в сравнении с (2.68) даже в случае $\xi = 0.5$ дает ограничение, которое значительно слабее, чем ограничение по ПЧД.

2.8. Сгустки вокруг топологических дефектов

В этом разделе мы рассмотрим сценарий образования СТМ вокруг петель космических струн, служащих затравками энтропийных возмущений. Эти СТМ могут формироваться на космологической стадии радиационного доминирования и могут достигать плотностей $\gg \rho_{eq}$ [322]. Сравнение с данными Fermi-LAT показывает, что нейтралы с массами 100 ГэВ несовместимы с некоторым диапазоном параметров космических струн, поскольку в этом случае гамма-сигнал превышает наблюдаемый Fermi-LAT гамма-фон.

Линейные топологические дефекты — космические струны могут формироваться в ранних космологических фазовых переходах (см. обзор в [323], [324]). Вместе с бесконечными струнами возможно образование замкнутых петель из-за взаимопересечений. Согласно численному моделированию, после переходной стадии возникает режим скейлинга, когда типичные расстояния между струнами и длина когерентности изменяются пропорционально размеру горизонта [325]. Петли струн, формирующихся в космологический момент t_i имеют длину $l \simeq \alpha c t_i$, где в режиме скейлинга $\alpha \simeq 0.1$ согласно [325] и [326].

Фундаментальной характеристикой струны является масса на единицу длины $\mu \equiv M_l/l$, которая имеет порядок квадрата энергии нарушения симметрии η^2 . В безразмерных единицах $G\mu/c^2$ является мерой гравитационного потенциала струны. Например, в масштабе Великого объединения $G\mu/c^2 \sim 10^{-6}$.

Имеется ряд ограничений на μ . Из наблюдений реликтового излучения следует $G\mu/c^2 \leq 2 \times 10^{-7}$ [327]. При $G\mu/c^2 \geq 10^{-7}$ в температуре и поляризации реликтового излучения был бы заметен вклад от космических струн, что могло бы быть выявлено в данных спутника Планк [328]. Ограничение $G\mu/c^2 \leq 10^{-7}$ было получено на основе изучения нуклеосинтеза [325]. Поиск парных изображений галактик, согласующихся с гравитационным линзированием на струнах, дает предел $G\mu/c^2 < 3 \times 10^{-7}$ на уровне достоверности 95% [329]. В [330] было рассмотрено формирование звезд в первых гало ТМ, инициируемых петлями. Было установлено, что для избежания противоречия с данными WMAP по красному смещению реионизации должно быть $G\mu/c^2 < 3 \times 10^{-8}$. Поиск производимых струнами гравитационных всплесков на детекторе LIGO дает объединенные ограничения на параметры струн (на μ и на вероятность пересоединения) [331], но $G\mu/c^2$ только слабо ограничено в сравнении с приведенными выше ограничениями. И наконец, наиболее сильное ограничение $G\mu/c^2 \leq 4 \times 10^{-9}$ было получено по таймингу пульсаров [332].

Формирование СТМ на стадии доминирования излучения подробно исследовано в работе [95]. В частном случае возмущений плотности, производимых петлями, максимальная плотность СТМ ограничена из-за адиабатического расширения уже сформировавшихся СТМ во время испарения петель. Далее мы опишем модификацию данного ограничения в случае, когда распад петли происходит до вириализации СТМ. В этом случае плотность СТМ может достигать $\rho_{cl} \gg 140\rho_{eq}$.

2.8.1. Формирование сгустков вокруг петель космических струн

Рассмотрим сначала влияние на эволюцию возмущений начальных скоростей формирующихся петель и ракетного эффекта. Необходимым условием формирования СТМ является малая скорость петли [95]. Компоненты скорости петли имеют на корреляционной длине среднее значение $\langle v_i^2 \rangle^{1/2} \simeq 0.15c$ [333], поэтому распределение вероятности для полной скорости

$$P(v_i)dv_i \simeq \frac{2^{1/2}dv_i v_i^2}{\pi^{1/2}\langle v_i^2 \rangle^{3/2}} e^{-v_i^2/2\langle v_i^2 \rangle}. \quad (2.69)$$

Перемещение петли, начиная с момента ее рождения t_i , до момента распада t_d :

$$\Delta r = a(t_d) \int_{t_i}^{t_d} \frac{v(t)dt}{a(t)}, \quad (2.70)$$

где peculiarная скорость $v(t) = v_i a(t_i)/a(t)$. Мы требуем, чтобы смещение Δr было малым в сравнении с радиусом петли $l/(2\pi)$. Из этого условия и из (2.70) получаем ограничение на скорость петли

$$v_i t_i \ln(t_d/t_i) < l/(2\pi). \quad (2.71)$$

Для вероятных параметров струны $t_d/t_i \simeq 2 \times 10^5$, и зависимость в (2.71) только логарифмическая. Поэтому, используя (2.69), можно оценить вероятность формирования петель с малыми скоростями

$$P_{lv} \sim \frac{(2/\pi)^{1/2} v_i^3}{3 \langle v^2 \rangle^{3/2}} \simeq 2 \times 10^{-7}. \quad (2.72)$$

Как мы покажем далее, даже малая доля (2.72) формирующихся петель могут производить сверхплотные СТМ и сильный аннигиляционный сигнал.

Рассмотрим теперь ракетный эффект. Скорость петли растет линейно со временем $v_r = 3\Gamma_P G\mu t/(5l)$, где $\Gamma_P \sim 10$ [323]. Момент формирования СТМ соответствует $y_{TA} \simeq 500y_i$ или $t_{TA}^2 \simeq 500t_i^2$, и относительное смещение струны за время формирования СТМ равно

$$\frac{1}{l} \int_{t_i}^{t_{TA}} v_r dt \simeq 1.5 \times 10^{-4} \mu_{-8} \alpha_{0.1}^{-1} \ll 1. \quad (2.73)$$

Таким образом, для малых петель, формирующихся на стадии радиационного доминирования, большие ракетные скорости не достигаются. В работе [328] также было показано, что ракетный эффект не играет заметной роли в формировании структур вокруг петель космических струн.

Эволюция СТМ вокруг петли описывается уравнением (2.4). Однако необходимо модифицировать величину Φ . В отличие от [95], мы допускаем зависимость Φ от времени: медленное уменьшение в приближении непрерывного испарения и ступенчатое поведение в приближении быстрого распада петли.

Назовем сферическую область с объемом $(4\pi/3) \times (l/2\pi)^3$ “объемом струны”. Отношение массы струны $M_l = \mu l$ к массе M_{DM}^l ТМ внутри объема струны в момент рождения струны $t_i = l/(\alpha c)$ записывается следующим образом

$$\left. \frac{M_l}{M_{\text{DM}}^l} \right|_{t=t_i} = \left(\frac{M_l}{M_\beta} \right)^{-1/2}, \quad (2.74)$$

где $M_\beta = 1.6 \times 10^3 \mu_{-8}^3 \alpha_{0.1}^{-3} M_\odot$. Отношение (2.74) дает также величину Φ возмущения плотности внутри объема струны в момент ее рождения t_i . Петли с $M_l = M_{\text{DM}}^l(t = t_i)$ рождаются в момент $t_\beta = 3.9 \times 10^{-6} \mu_{-8}^2 \alpha_{0.1}^{-4} t_{\text{eq}}$ ($y_\beta = 2 \times 10^{-3} \mu_{-8} \alpha_{0.1}^{-2}$). Мы рассмотрим только наиболее плотную область СТМ внутри объема струны, где аннигиляция проходит наиболее эффективно. Эту центральная часть СТМ вокруг петли можно назвать ядром СТМ. Внешняя область СТМ формируется за счет вторичной аккреции ТМ с профилем плотности $\rho(r) \propto r^{-9/4}$ на достаточно большом расстоянии от центра СТМ. Таким образом, аннигиляция сосредоточена, преимущественно, вблизи ядра СТМ.

Будем рассматривать две аппроксимации для эволюции струны: непрерывное испарение и быстрый распад. Характерное время жизни петли относительно процесса излучения гравитационных волн $\tau \simeq lc/(G\mu\Gamma)$, где $\Gamma \sim 50$ – числовой коэффициент [334]. Одной из возможностей является постепенная потеря массы струной в соответствии с усредненным уравнением $dM_l/dt = -\Gamma G\mu^2/c$, но, вероятно, более адекватной аппроксимацией является резкий распад струны через интервал времени τ после ее рождения t_i . При $t > t_i + \tau$ конфигурация петли существенно изменяется, так что петля наверняка самопересекается. Образующиеся дочерние петли разлетаются с большими скоростями. Мы используем последнее приближение как основное, но для сравнения приводим результаты расчетов в приближении непрерывного испарения.

Если СТМ формируется вокруг петли, то в уравнении (2.4) величина $\Phi \simeq M_l/M$, но во многих случаях достигаемая максимальная плотность СТМ равна лишь $\rho_{\text{cl}} \simeq 140\rho_{\text{eq}}$ из-за адиабатического расширения уже сформировавшегося СТМ в продолжение гравитационного испарения петли [95]. Действительно, сохранение универсального адиабатического инварианта Пуанкаре $J = \oint \sum p_i dq_i = \text{const}$ для СТМ с дополнительной массой петли внутри него предполагает $M_{\text{tot}} R = \text{const}$ или $\rho_{\text{cl}} \propto M_{\text{tot}}^{-3}$, где $M_{\text{tot}} = M_l(t) + M_{\text{DM}}$ – суммарная масса

петли и ТМ. Для петли с постоянной массой СТМ формируется с плотностью $\rho_{cl} \simeq 140\rho_{eq}(M_l/M_{DM})^3$ (см. уравнение (3.4) в [95]). Вслед за распадом петли плотность уменьшается благодаря указанному сохранению адиабатического инварианта в пропорции $\simeq (M_{DM}/M_l)^3$ до величины $\rho_{cl} \simeq 140\rho_{eq}$.

Мы утверждаем, что этот аргумент, основанный на сохранении адиабатических инвариантов, не применим в том случае, если распад струны происходит до момента остановки расширения СТМ (отщепления от космологического расширения и вириализации). Действительно, в этом случае частицы ТМ движутся не по орбитам вокруг петли, а вдоль радиальных траекторий. Распад струны ведет только к уменьшению ускорения частиц за счет уменьшения центральной притягивающей массы. Эволюция СТМ замедляется, но продолжается под влиянием скоростей db/dt , набранных до распада. Оценку этих процессов можно выполнить следующим образом. Для рассматриваемых СТМ условия $y \ll 1$, $\Phi \gg 1$ и $\Phi y \ll 1$ выполняются почти все время до остановки расширения. Вначале эволюция идет благодаря большой величине Φ , и начальные скорости db/dy at $t = t_i$ не важны. В этом случае можно пренебречь первым членом в (2.4), и приближенное решение имеет вид $b \simeq 1 - y\Phi/2$ [95]. Если остановка случится до t_d , то момент остановки может быть оценен как $y_{TA} \sim 1/\Phi$ [95]. В противном случае $y_d < y_{TA}$ непосредственно перед распадом петли (при $y = y_d$) мы должны положить $\Phi = 0$ в (2.4) и скорость в этот момент $db/dy = -\Phi/2$ становится больше, чем последний член в (2.4). При $y > y_d$ мы можем пренебречь последним членом, но оставить первый. Это ведет к красному смещению скорости следующим образом

$$\frac{db}{dy} = -\frac{\Phi y_d}{2y}, \quad (2.75)$$

и к соответствующему логарифмическому уменьшению b . Из условия $db/dy = -b/y$ получаем новый момент остановки:

$$y_{TA} \sim y_d \exp\left(\frac{2(1 - \Phi y_d)}{\Phi y_d}\right). \quad (2.76)$$

Мы видим, что при достаточно малых $\Phi y_d \ll 1$ СТМ может не сформироваться вовсе, потому что y_{TA} будет экспоненциально большим. Для достаточно малых величин $\Phi y_d \ll 1$ СТМ формируется, но с малой плотностью. Величина Φy_d

может быть выражена следующим образом

$$\Phi y_d \simeq 0.9 \mu_{-8}^{1/2} \alpha_{0.1}^{-3/2} \Gamma_{50}^{-1/2}. \quad (2.77)$$

Для петли с постоянной массой $y_{\text{ТА}} \sim 1/\Phi$ [95] и (2.77) равно $\sim y_d/y_{\text{ТА}}$. Эта величина близка к единице при $\mu_{-8} \sim 1$, и таким образом мы ожидаем изменения характера формирования СТМ вблизи величины $\mu_{-8} \sim 1$.

В приближении непрерывного испарения темп потери массы петли из-за гравитационного излучения $dM_l/dt = -\Gamma G \mu^2/c$, и после интегрирования

$$M_l(t) = M_l(t_i) \left(1 - 5 \times 10^{-6} \frac{\mu_{-8} \Gamma_{50}}{\alpha_{0.1}} \left[\frac{t}{t_i} - 1 \right] \right), \quad (2.78)$$

где $M_l(t_i) = \mu \alpha t_i$ – начальная масс петли в момент ее образования t_i . Необходимо обобщить массу петли – зародыша возмущения плотности СТМ на случай ее эволюции. Единственная величина, которую требуется изменить, это Φ . Из известных решений уравнений Фридмана имеем зависимость $t = \tilde{t}(y)$ и, используя (2.74), в итоге получаем

$$\Phi(y, y_i) = \frac{2 \times 10^{-3} \mu_{-8} \alpha_{0.1}^{-2} M_l(\tilde{t}(y))}{y_i M_l(\tilde{t}(y_i))}. \quad (2.79)$$

Это выражение верно для $\Phi \geq 0$. Если формально $\Phi < 0$, то мы полагаем $\Phi = 0$ в (2.4). Это означает, что петля полностью испарилась (ее масса равна нулю), и последующая эволюция СТМ происходит только под действием самогравитации ТМ и благодаря бусту скорости по направлению к центру СТМ, который был получен до распада струны. Буст скорости ведет к росту возмущений даже после полного испарения петли. СТМ вириализуется с некоторой плотностью $\rho_{\text{cl}}(t_{\text{ТА}})$. Если масса петли становится нулевой только после остановки, то адиабатическое расширение СТМ происходит лишь под влиянием остатка от массы петли $M_l(t_{\text{ТА}})$, и итоговая плотность

$$\rho_{\text{cl}} = \rho_{\text{cl}}(t_{\text{ТА}}) \left(\frac{M_{\text{DM}}}{M_l(t_{\text{ТА}}) + M_{\text{DM}}} \right)^3 = \frac{\rho_{\text{cl}}(t_{\text{ТА}})}{(1 + \Phi(y_{\text{ТА}}))^3}. \quad (2.80)$$

В случае $t_d > t_{\text{ТА}}$ эта плотность больше по сравнению с плотностью $\rho_{\text{cl}} \simeq 140 \rho_{\text{eq}}$, получаемой в приближении быстрого распада.

Рассматриваем только наиболее плотную центральную часть СТМ, которая дает главный вклад в аннигиляционный сигнал. Это часть СТМ внутри

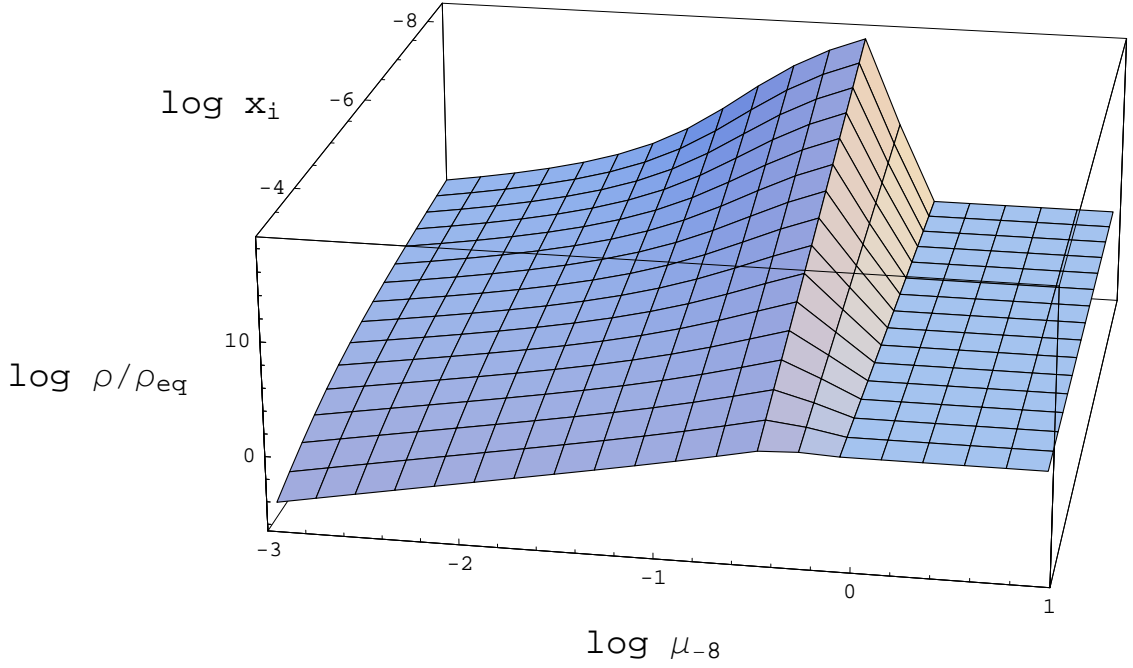


Рис. 2.14. Плотность СТМ ρ в единицах плотности ρ_{eq} в зависимости от момента рождения петли y_i и параметра $\mu_{-8} = G\mu/(10^{-8}c^2)$. Излом поверхности до величины $\rho = 140\rho_{\text{eq}}$ соответствует равенству момента остановки расширения СТМ и момента распада петли.

объема струны. В первом приближении считаем плотность в этой области однородной и найдем плотность СТМ в зависимости от y_i и μ . Момент остановки определяется численно из условия $db/dy = -b/y$ и уравнения (2.4), а плотность СТМ из (2.7) и (2.80). Если момент остановки предшествует распаду петли, мы полагаем итоговую плотность СТМ равной $\rho = 140\rho_{\text{eq}}$ согласно аргументу сохранения адиабатического инварианта, представленному в [95].

Результаты вычисления плотности СТМ в аппроксимации быстрого распада представлены на Рис. 2.14. Как и ожидалось из (2.77), условие $y_{\text{TA}} \simeq y_d$ выполняется вблизи $\mu_{-8} \sim 1$, и режим формирования СТМ изменяется около значения $\mu_{-8} \sim 1$ поскольку при больших μ_{-8} остановка происходит до распада петли. Похожий рисунок может быть получен для непрерывного испарения, но с более гладким изломом и с большей плотностью СТМ.

Распределение петель по длинам было получено в работе [330]:

$$dn_{\text{loop}} = \frac{Ndl}{c^{3/2}t^{3/2}l^{5/2}}, \quad (2.81)$$

где $N \sim 2$. Обрезание по массам за счет испарения петель должно быть наложено на (2.81) в каждый конкретный момент времени. Если мы пренебрежем (временно) испарением петель, тогда массовая доля вещества во Вселенной в форме петель в момент t_{eq} равна

$$\frac{d\rho_l(t_{\text{eq}})}{\rho_{\text{eq}}} = 0.042\mu_{-8}^{3/2} \left(\frac{M_l}{M_\odot}\right)^{-3/2} \frac{dM_l}{M_\odot} \quad (2.82)$$

Распределение петель по параметрам транслируется в распределение СТМ. В терминах космологической плотности СТМ (доли массы ТМ в форме СТМ) распределение (2.82) (с использованием (2.74) может быть переписано в виде:

$$d\xi_{\text{cl}} \simeq \frac{d\rho_l(t_{\text{eq}})}{\rho_{\text{eq}}} \left(\frac{M_l}{M_\beta}\right)^{1/2} P_{\text{lv}}, \quad (2.83)$$

где P_{lv} дается выражением (2.72). Петли распадаются, но СТМ остаются, поэтому нет необходимости в специальном обрезании спектра масс СТМ по примеру испарительного обрезания спектра функции масс петель. Следовательно, (2.83) является реальным распределением СТМ в эпоху радиационного доминирования. Плотность этих СТМ была рассчитана выше.

Для возмущений плотности, создаваемых петлями, в отличие от случая обычных инфляционных возмущений, эффекты диффузии и свободного разлета для минимальной массы СТМ не важны, поскольку формирующийся СТМ находится под влиянием притяжения центральной петли и эволюционирует нелинейно задолго до момента t_{eq} . Температура кинетического отщепления для обычного нейтрално слабо зависит от массы частиц $T_d \propto m^{1/4}$ и для типичных параметров суперсимметрии SUSY $T_d \simeq 25$ ГэВ, что соответствует космологическому моменту времени 1.2×10^{-3} с. Петли, которые формируются в этот момент имеют массы $M_{l,\text{min}} = 2.5 \times 10^{-7} m_{100}^{-1/2} \mu_{-8} \alpha_{0.1} M_\odot$ и минимальная масса СТМ, таким образом, $M_{\text{cl},\text{min}} = M_{l,\text{min}}^{3/2} / M_\beta^{1/2} \simeq 2 \times 10^{-15} m_{100}^{-3/4} \alpha_{0.1}^3 M_\odot$ в соответствии с (2.74). СТМ с такой минимальной массой могут достигать плотностей $\rho_{\text{cl}} \sim 3 \times 10^{-4}$ г см $^{-3}$, если $\mu_{-8} \simeq 0.4$ (см. Рис. 2.14).

2.8.2. Аннигиляция в сгустках вокруг петель космических струн

Рассматриваемые СТМ имеют очень большие плотности, и гамма-сигнал от аннигиляции ТМ в СТМ может превышать наблюдательные пределы для

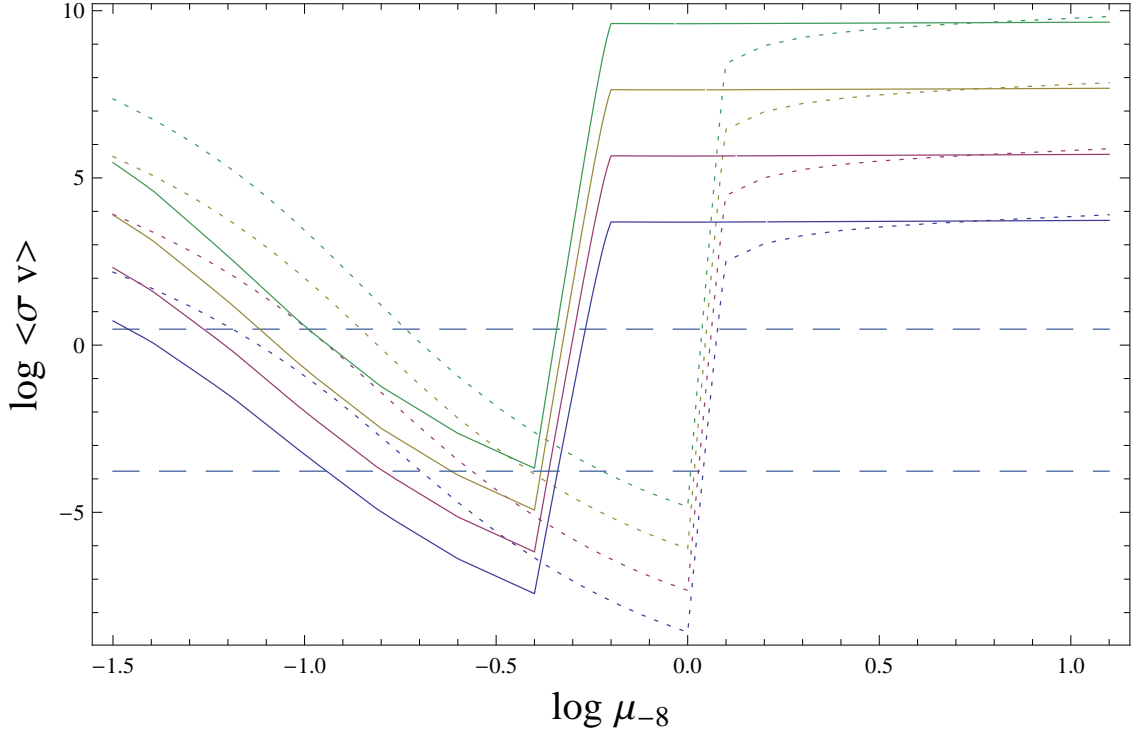


Рис. 2.15. Сплошной линией показан верхний предел на $\langle\sigma v\rangle$ (в единицах 10^{-26} см 3 с $^{-1}$) в зависимости от параметра $\mu_{-8} = G\mu/(10^{-8}c^2)$ для масс нейтралино (сверху вниз) $m = 10$ ТэВ, 1 ТэВ, 100 ГэВ и 10 ГэВ в приближении быстрого распада. Этот предел был получен путем сравнения вычисленного сигнала и данных Fermi-LAT. Верхняя и нижняя горизонтальные линии показывают, соответственно, типичное и минимально возможное сечение аннигиляции нейтралино. Точечная кривая показывает аналогичный верхний предел в приближении непрерывного испарения.

некоторых значений параметров струны $\mu_{-8} = G\mu/(10^{-8}c^2)$. Рассмотрим аннигиляцию нейтралино с рождением π^0 и распадами $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, см. (1.151). В качестве профиля плотности гало $\rho_H(r)$ используем (3). Нижний предел интегрирования по массе в $d\xi_{cl}$ был оценен выше. Этот предел слабо зависит от m посредством зависимости $T_d(m)$. Мы полагаем $M_{l,\max} \simeq 1.6 \times 10^3 \mu_{-8}^3 M_\odot$ (эта масса петли соответствует моменту формирования СТМ вблизи t_{eq}) как верхний предел интегрирования, и зависимость итогового результата от $M_{l,\max}$ слаба.

Сравним рассчитанный сигнал с данными Fermi-LAT по диффузному межгалактическому гамма-фону $J_{\text{obs}}(E > m_{\pi^0}/2) = 1.8 \times 10^{-5}$ см $^{-2}$ с $^{-1}$ ср $^{-1}$ [312]. Для наиболее консервативного ограничения сравниваем J_{obs} с рассчитанным сигналом в направлении антицентра $\psi = \pi$. Это дает ограничение сверху на $\langle\sigma v\rangle$ в зависимости от $\mu_{-8} = G\mu/(10^{-8}c^2)$. Результаты расчетов показаны на

Рис. 2.15. В общем случае должны возникнуть ограничения в 3D пространстве параметров $\langle\sigma v\rangle$, m и μ_{-8} . Мы рассмотрели несколько фиксированных значений масс нейтралино: $m = 10$ ТэВ, 1 ТэВ, 100 ГэВ и 10 ГэВ. Величина массы m влияет на результат, в основном, через множитель m^{-2} в интеграле (1.151).

В случае типичного сечения аннигиляции нейтралино $\langle\sigma v\rangle \simeq 3 \times 10^{-26} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ ограничение исключает диапазон параметров $0.05 < \mu_{-8} < 0.51$ в приближении быстрого распада и $0.1 < \mu_{-8} < 1.16$ в приближении непрерывного испарения. Если взять минимально допустимую величину $\langle\sigma v\rangle = 1.7 \times 10^{-30} m_{100}^{-2} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ [115] и $m_\chi = 100$ ГэВ, то будут исключены области $0.16 < \mu_{-8} < 0.43$ и $0.27 < \mu_{-8} < 1.07$. Ограничения будут другими для других моделей ТМ. В этом смысле полученные ограничения должны рассматриваться как единые ограничения параметры петель космических струн и на параметры частиц ТМ.

Данные Fermi-LAT были использованы как верхний предел. В принципе, аннигиляция в СТМ вокруг петель может объяснять наблюдаемый гамма-фон при некоторых конкретных значениях параметров, например, при $G\mu/c^2 \simeq 5 \times 10^{-10}$. Необходимость в аннигиляции ТМ в СТМ может возникнуть в том случае, если окажется, что обычные астрофизические источники дают слишком слабый сигнал в сравнении с наблюдаемым фоном.

Глава 3

Темная материя и черные дыры

В данном разделе мы рассмотрим несколько астрофизических моделей, когда ЧД или их скопления служат центрами конденсации сгущений ТМ, и обсудим возможные наблюдательные проявления этих сценариев.

3.1. Квазистационарная аккреция на первичные черные дыры и кротовые норы

Если ПЧД образуются на стадии доминирования излучения, то они создают возмущение в плотности излучения. Излучение, являясь термализованной жидкостью с уравнением состояния $p = \varepsilon/3$, после прохода волны разряжения начинает течь в направлении ПЧД. В этом разделе мы рассмотрим квазистационарную аккрецию идеальной жидкости на ЧД (а также на кротовые норы). Полученные результаты найдут применение в следующем разделе.

Пусть имеется сферически-симметричный гравитирующий объект. Будем использовать приближение пробной жидкости, движущейся в создаваемой им фоновой метрике

$$ds^2 = f_0 dt^2 - f_1^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.1)$$

которая может описывать как ЧД, так и кротовую нору. Соответствующий тензор энергии-импульса идеальной жидкости имеет вид

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

где ρ и p , соответственно, плотность энергии и давление жидкости в системе покоя, $u^\mu = dx^\mu/ds$ — 4-скорость. Предполагается, что уравнение состояния жидкости адиабатическое $p = p(\rho)$. Стационарная аккреция возможна в том случае, когда в потоке имеется критическая звуковая точка [335].

Определим вспомогательную функцию $dn/n = d\rho/(\rho+p)$, которая в случае атомарного газа соответствует концентрации частиц. Решаем уравнение движения $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ в заданной фоновой метрике. Из нулевой компоненты $\mu = 0$ этого

уравнения и из проекции на 4-скорость $u_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ следуют два интеграла движения:

$$(\rho + p) (f_1 + u^2)^{1/2} \gamma^2 x^2 u = C_1, \quad (3.3)$$

$$nu\gamma x^2 = -An_\infty, \quad (3.4)$$

где $u \equiv u^1$, $\gamma(x) \equiv (f_0/f_1)^{1/2}$, и n_∞ – величина n при $x \rightarrow \infty$. Поток массы по направлению к началу координат $\dot{M} = -4\pi r^2 T_0^r$, выражается в виде [336]

$$\dot{M} = 4\pi AM^2[\rho_\infty + p(\rho_\infty)]. \quad (3.5)$$

Численная константа A может быть найдена путем фиксации потока в звуковой точке, и в типичных случаях $A \sim \mathcal{O}(1)$. Для расчета параметров жидкости в критической точке удобно разделить (3.3) на (3.4). Это дает

$$(\rho + p) (f_1 + u^2)^{1/2} \gamma n/n_\infty = C_2, \quad (3.6)$$

где $C_2 \equiv -C_1/A$. Обозначим через $V^2 = dp/d\rho$ квадрат скорости звука в аккрецируемой жидкости. Критическая точка находится стандартным методом [335]. Берем логарифмическую производную (3.4) и (3.6), исключаем dn/n и полагаем равными нулю множители перед dx/x и du/u . Таким путем получаем систему уравнений для критической точки

$$V^2 = \frac{u^2}{f_1 + u^2} \quad (3.7)$$

$$2V^2 \left(2 + \frac{\gamma'x}{\gamma} \right) = 2\frac{\gamma'x}{\gamma} + \frac{f_1'x}{f_1 + u^2}, \quad (3.8)$$

где штрих обозначает производную по x . Легко проверить, что в том случае, когда f_0 и f_1 соответствуют метрике нейтральной ЧД или заряженной ЧД Рейснера-Нордстрема, эти уравнения сводятся к известным уравнениям для критической точки при аккреции, соответственно, на нейтральную [336] или на заряженную ЧД [337].

Распределение аккрецируемой жидкости с уравнением состояния $p = \rho c^2/3$, согласно [336], имеет вид

$$\rho = \rho_\infty(t) \left[z + \frac{1}{3(1 - 1/\xi)} \right]^2, \quad (3.9)$$

где $\xi = r/r_g$.

$$z = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{a}{3}} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\omega}{3}\right), & 1 \leq \xi \leq 3/2, \\ 2\sqrt{\frac{a}{3}} \cos\left(\frac{\omega}{3}\right), & \xi > 3/2, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\omega = \arccos\left[\frac{b}{2(a/3)^{3/2}}\right], \quad (3.11)$$

$$a = \frac{1}{3\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^2}, \quad b = \frac{2}{27\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^3} - \frac{27}{4\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\xi^4}. \quad (3.12)$$

Кротовые норы также могли образовываться в ранней Вселенной, поэтому они относятся к ранним нелинейным объектам. Следуя работе [338], рассмотрим квазистационарный поток через кротовую нору с метрикой [339]:

$$f_0(x) = e^{2\Phi(x)}, \quad (3.13)$$

$$f_1(x) = 1 - \frac{K(r)}{r} = 1 - \frac{S(x)}{x}, \quad (3.14)$$

где $x = r/M$, и введена безразмерная функция $S(x)$. Для метрики кротовой норы используем точное решение [340], в котором кротовая нора поддерживается фантомной энергией. В этой модели фантомная энергия концентрируется в ограниченной области $r_0 < r < r_1$ между горловиной $r = r_0$ и некоторым радиусом $r = r_1$. При $r > r_1$ метрика кротовой норы совпадает с метрикой ЧД Шварцшильда. Влияние кротовой норы на материю при $r > r_1$ может быть рассмотрено аналогично случаю ЧД. Аккреция идеальной жидкости через кротовую нору обсуждалась в [341], но критическая точка найдена не была.

Рассмотрим критические точки для метрики кротовой норы в приближении пробной жидкости, движущейся в заданной метрике. Учет гравитации аккрецируемой жидкости несколько сдвинул бы как положение критической точки, так и параметры потока в критической точке. Из системы уравнений (3.7), (3.8) находим квадрат скорости в критической точке

$$u^2 = \frac{1}{2}\Phi'(x - S). \quad (3.15)$$

Отсюда ясно, что стационарная аккреция имеет место в случае конечной величины Φ' и $x > S$ (вне горловины). Также скорость жидкости при пересечении горловины $x = S$ не должна быть нулевой. Эти условия выполняются только если $\Phi' \propto (x - S)^{-1}$ и Φ' остается положительной. Это имеет место для кротовой

норы, поддерживаемой фантомной энергией [340]. Действительно, уравнения Эйнштейна, записанные в [340], в наших обозначениях:

$$S' = 8\pi x^2 \tilde{\rho} M^2, \quad (3.16)$$

$$\Phi' = \frac{8\pi x^3 \tilde{p} M^2 + S}{2x(x - S)}, \quad (3.17)$$

где $\tilde{\rho}$ и \tilde{p} , соответственно, плотность энергии и давление поддерживающей фантомной энергии. Из (3.17) ясно, что условие $\Phi' \propto (x - S)^{-1}$ выполняется при $x \rightarrow S$. Заметим, что проходимые кротовые норы, поддерживаемые фантомной энергией, рассматривались также в [342].

Радиальная координата x критической точки удовлетворяет уравнению

$$V^2(2 + \Phi'x) = \Phi'x. \quad (3.18)$$

Подставляя Φ' из (3.17), получаем следующее уравнение

$$V^2[4(x - S) + 8\pi x^3 \tilde{p} M^2 + S] = 8\pi x^3 \tilde{p} M^2 + S, \quad (3.19)$$

которое в общем случае является нелинейным. Сразу видно, что $x = S = x_0$ удовлетворяет этому уравнению, где $x_0 = (-8\pi \tilde{p}_0 M^2)^{-1/2}$ – радиус горловины, а p_0 – давление фантомной энергии на горловине. Таким образом, одна из критических точек всегда расположена точно на горловине кротовой норы.

В случае, если реализуется примерно однородное распределение фантомной энергии вблизи горловины кротовой норы [340], решение уравнения (3.16) вблизи горловины имеет вид

$$S = x_0 + 8\pi \tilde{\rho} M^2 (x^3 - x_0^3)/3. \quad (3.20)$$

Соответственно, уравнение (3.19) в этом случае принимает вид

$$y^3 \left(\frac{1 - V^2}{1 + 3V^2} + \frac{1}{3w} \right) + \frac{4V^2}{1 + 3V^2} y - \frac{1 + 3w}{3w} = 0 \quad (3.21)$$

где $y \equiv x/x_0$, $w \equiv \tilde{p}/\tilde{\rho} < -1$. Легко видеть, что $y_1 = 1$ является корнем уравнения (3.21) при любых V и w . Два других корня могут быть найдены из соотношений Виета

$$1 + y_2 + y_3 = 0, \quad y_2 y_3 = -\frac{1 + 3w}{3w} \quad (3.22)$$

в виде

$$y_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 + 15w}{3w}}, \quad y_3 = -\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 + 15w}{3w}}. \quad (3.23)$$

Один из корней $y_{2,3}$ может быть ≥ 1 только при $0 < w \leq 1/3$. Однако в рассматриваемом фантомном случае $w < -1$ корни < 1 или даже комплексные. Это означает, что решение с $y < 1$ не соответствует какой-либо критической (звуковой) точке и, таким образом, не является физическим решением. Следовательно, в области распределения фантомной энергии имеется одна критическая точка, расположенная точно на горловине. Это значит, что кротовая нора, поддерживаемая фантомной энергией, является проходимой для гидродинамических потоков. Вне области фантомной энергии могут существовать другие критические точки. Они могут быть вычислены так же, как в случае метрики Шварцшильда [336]. Поток жидкости должен последовательно проходить через все критические точки – это условие стационарного самосогласованного решения.

У второго выхода из кротовой норы поток жидкости может иметь такое же распределение плотности, как у первого, но с обращенным направлением скорости, т. е., в случае истечения $u > 0$.

Обсудим возможность аккреции барионов на кротовую нору и возможность существования потоков барионного газа через кротовую нору. Газ будет перетекать через кротовую нору от входа, вблизи которого плотность газа больше, ко тому входу, где она меньше. Для примера рассмотрим случай, когда первый вход расположен в гало галактики далеко от звездного диска на некотором радиусе $r = r_w$ от центра Галактики, а второй вход расположен там, где плотность барионов $\ll \rho_H(r_w)$. В этом случае вещество будет перетекать от первого входа ко второму. Вытекание вещества из второго входа может иметь наблюдательные следствия. Эта область истечения может выглядеть как источник излучения (вследствие нагрева), а также вблизи второго входа могут иметься аномалии химического состава.

В качестве числового примера рассмотрим аккрецию Бонди-Хойла на кротовую нору с массой M , расположенную на расстоянии $l = 30$ кпк от центра Галактики, где плотность (3) равна $\rho_H \simeq 5.7 \times 10^{-26}$ г см⁻³. Темп аккреции

Бонди-Хойла

$$\dot{M} = \frac{4\pi G^2 M^2 \rho}{v^3} \simeq 1.6 \times 10^{10} \left(\frac{M}{10^2 M_\odot} \right)^2 \left(\frac{v}{200 \text{ км с}^{-1}} \right)^{-3} \text{ г с}^{-1}, \quad (3.24)$$

где v – скорость звука или скорость входа кротовой норы относительно окружающего газа. Для типичной оценки мы подставили вириальную скорость. Если радиус входа в кротовую нору меньше внутреннего радиуса аккреционного диска, то будет видно выделение энергии в рентгеновском диапазоне. Соответствующая светимость объекта $L_X = \eta \dot{M} c^2$, где $\eta \simeq 0.1$ – типичная эффективность конвертации массы в энергию. Для выбранных параметров в (3.24) соответствующая светимость равна $L_X \sim 1.4 \times 10^{30} \text{ эрг}^{-1}$, т. е. на уровне оптической светимости слабых звезд. Часть излучения будет проходить через вход в кротовую нору. Прохождение света через кротовую нору исследовано в [343, 344]. Некоторые из неидентифицированных источников в галактиках могут являться аккрецирующими кротовыми норами.

В работе [338] обсуждается концепция зеркальной материи в присутствии во Вселенной неориентируемых кротовых нор, при пролете через которые происходит пространственное отражение. Приводятся аргументы, что при пролете через неориентируемую кротовую нору частицы зеркальной материи должны превращаться в обычные частицы, и наоборот, обычные частицы должны превращаться в зеркальные. Рассмотрены наблюдательные следствия моделей, в которых зеркальная материя играет роль темной материи (скрытой массы) во Вселенной. В этом случае возможно перетекание зеркальной материи через неориентируемую кротовую нору с трансформацией в обычное вещество, а горловина кротовой норы может проявляться как рентгеновский источник или область с необычным химическим составом. Также в [338] обсуждаются необычные электромагнитные свойства неориентируемых кротовых нор.

3.2. Темная материя вокруг первичных черных дыр, аннигиляция

В данном разделе мы покажем, что вокруг ПЧД после их образования на космологической стадии радиационного доминирования формируются плотные

пики из ТМ. Это происходит по причине того, что в тепловом распределении частиц имеются частицы с малыми скоростями, которые остаются на финитных орбитах вокруг ЧД и не участвуют в космологическом расширении. Накопление таких частиц на орбитах вблизи ЧД приводит к формированию пиков плотности [88], более плотных, чем получилось бы в механизме вторичной аккреции [72].

Возможны два режима формирования пика плотности вокруг ПЧД. В первом случае, который имеет место для масс ПЧД $M_{\text{ВН}} \leq 40M_{\odot}$, образование ПЧД происходит до кинетического отщепления частиц ТМ (мы предполагаем, что частицы ТМ – это нейтралы с массами $m \sim 70$ ГэВ). В промежутке времени между образованием ПЧД и моментом кинетического отщепления вокруг ПЧД успевает сформироваться некоторый избыток плотности ТМ. После отщепления частицы разлетаются в гравитационном поле ПЧД, имея распределение по скоростям максвелловского типа. Частицы с малыми скоростями, скорости которых были направлены под определенными углами, остаются гравитационно связанными с ПЧД, образуя в дальнейшем вокруг нее гало. В случае $M_{\text{ВН}} > 40M_{\odot}$ ПЧД образуется после момента кинетического отщепления частиц ТМ, а начальный избыток плотности излучения и ТМ вблизи ПЧД отсутствует. В этом случае медленные частицы ТМ также остаются на финитных орбитах вокруг ПЧД, создавая избыток плотности.

В центральных областях пиков плотность ТМ оказывается столь велика, что к настоящему времени частицы ТМ успели уже проаннигилировать (мы предполагаем, что ТМ составляют нейтралы) на расстояниях, на несколько порядков превышающих гравитационные радиусы ПЧД. Поэтому для расчета итогового профиля плотности вокруг ПЧД достаточно рассмотреть явления на больших расстояниях от ПЧД, где хорошим приближением является ньютоновская гравитационная динамика. ТМ продолжает аннигиляцию и в настоящее время, производя сигналы в космическом гамма-излучении. Сравнение рассчитанных потоков излучения с данными наблюдений телескопа Fermi-LAT позволяет получить ограничения на количество ПЧД во Вселенной.

Аннигиляция частиц ТМ вокруг ПЧД уже рассматривалась в работах [86], [81], [87], и из сравнения с наблюдениями были получены ограничения на кос-

монологический параметр плотности ПЧД. В работах [86], [81] формально (без детальных расчетов) предполагалось, что профиль плотности в центральной области гало близок к $\rho \propto r^{-3/2}$, а в работе [87] формально рассматривались степенные профили с $\rho \propto r^{-\alpha}$ с $\alpha = 1.5 - 3$. Мы произведем расчет профиля плотности в центральной области гало ТМ вокруг ПЧД с учетом начального теплового распределения частиц ТМ по скоростям и покажем, что профиль плотности имеет более сложный вид, чем предполагавшийся в [86], [81], [87] профиль $\rho \propto r^{-\alpha}$.

3.2.1. Эволюция плотности вокруг первичных черных дыр до кинетического отщепления

Рассмотрим формирование ПЧД на космологической стадии радиационного доминирования [148], когда вещество имеет уравнение состояния $p = \rho c^2/3$. В ПЧД коллапсирует термализованная смесь фотонов и других ультрарелятивистских частиц, которую для краткости обычно называют излучением. Нерелятивистские частицы ТМ движутся в общем гравитационном потенциале и, кроме того, могут взаимодействовать с излучением. В качестве примера рассмотрим частицы ТМ в модели нейтралино с массами $m \simeq 70$ ГэВ. По мере остывания Вселенной нейтралино вышли из химического равновесия, но еще продолжали эффективно взаимодействовать с частицами излучения за счет рассеяний. Температура газа нейтралино поддерживалась на уровне температуры излучения, и нейтралино могли увлекаться гидродинамическими потоками излучения, в том числе, потоком в направлении аккрецирующей ПЧД. Наконец, при охлаждении излучения до некоторой температуры T_d в момент времени t_d происходит кинетическое отщепление частиц ТМ от излучения, и далее частицы ТМ движутся свободно только под влиянием гравитационных сил. Предварительно необходимо обсудить начальный профиль плотности вещества вокруг ПЧД непосредственно перед кинетическим отщеплением.

ПЧД в области с избытком плотности формируется в момент t_H пересечения этой областью космологического горизонта, который зависит от полной

массы M_{H} вещества внутри этой области:

$$t_{\text{H}} \simeq \frac{GM_{\text{H}}}{c^3} = 2.6 \times 10^{-13} \left(\frac{M_{\text{BH}}}{10^{-8} M_{\odot}} \right) \text{ с.} \quad (3.25)$$

Здесь учтено, что масса M_{BH} образующейся ПЧД равна $M_{\text{BH}} = M_{\text{H}}/3^{3/2}$ [148]. Возраст Вселенной связан с температурой излучения соотношением (1.11), поэтому зависимость M_{BH} от T в момент t_{H} имеет вид

$$M_{\text{BH}} \simeq 40 \left(\frac{g_*}{10} \right)^{-1/2} \left(\frac{T}{27 \text{ МэВ}} \right)^{-2} M_{\odot}. \quad (3.26)$$

Нормировочный коэффициент в формуле (3.26) был выбран соответствующим температуре кинетического отщепления нейтралино с массами $m \simeq 70 \text{ ГэВ}$ [7]

$$T_d \simeq 27 \left(\frac{m}{70 \text{ ГэВ}} \right)^{1/4} \left(\frac{\tilde{M}}{0.2 \text{ ТэВ}} \right) \left(\frac{g_*}{10} \right)^{1/8} \text{ МэВ}, \quad (3.27)$$

которое происходит в момент времени

$$t_d \simeq 10^{-3} \left(\frac{m}{70 \text{ ГэВ}} \right)^{-1/2} \left(\frac{\tilde{M}}{0.2 \text{ ТэВ}} \right)^{-2} \left(\frac{g_*}{10} \right)^{-3/4} \text{ с}, \quad (3.28)$$

где \tilde{M} – параметр, характеризующий теорию суперсимметрии, см. [7]. Масса $\sim 40M_{\odot}$, даваемая выражением (3.26), представляет собой граничную величину. Если $M_{\text{BH}} < 40M_{\odot}$, то кинетическое отщепление нейтралино происходит после образования ПЧД, а от момента образования ПЧД до момента t_d поток излучения на ПЧД увлекал за собой частицы ТМ. А если $M_{\text{BH}} > 40M_{\odot}$, то в момент образования ПЧД нейтралино были свободными и двигались независимо от излучения. Излучение могло вытекать из некоторого объема, а ТМ оставаться в нем.

Рассмотрим случай $M_{\text{BH}} < 40M_{\odot}$. Выделим ближнюю зону, ограниченную радиусом влияния ПЧД $r_{\text{infl}}(t)$, в которой масса ПЧД равна массе излучения $M_{\text{BH}} = (4\pi/3)\rho_{\infty}(t)r_{\text{infl}}^3$, где $\rho_{\infty}(t) = 3/(32\pi Gt^2)$. Отсюда

$$r_{\text{infl}}(t) = (8GM_{\text{BH}}t^2)^{1/3}. \quad (3.29)$$

В безразмерном виде

$$\xi = \frac{r_{\text{infl}}}{r_g} = \frac{c^2 t^{2/3}}{G^{2/3} M_{\text{BH}}^{2/3}} = 7.4 \times 10^6 \left(\frac{M_{\text{BH}}}{10^{-8} M_{\odot}} \right)^{-2/3} \left(\frac{t}{10^{-3} \text{ с}} \right)^{2/3}, \quad (3.30)$$

где $r_g = 2GM_{\text{ВН}}/c^2$ – гравитационный радиус ПЧД. Видно, что влияние ПЧД становится относительно велико при малых массах $M_{\text{ВН}}$ и больших временах t . Масса ТМ в пределах сферы с радиусом влияния равна

$$M_{\text{DM}}(t) \simeq M_{\text{ВН}} \left(\frac{t}{t_{\text{eq}}} \right)^{1/2} = 2 \times 10^{-8} M_{\text{ВН}} \left(\frac{t}{10^{-3} \text{ с}} \right)^{1/2}, \quad (3.31)$$

где $t_{\text{eq}} \approx 2.4 \times 10^{12}$ с. В области влияния движение частиц определяется в наибольшей степени гравитационным полем ПЧД, а вне области влияния продолжается космологическое расширение. Такое разделение носит приближенный характер, и в реальности существует переходная область. Отметим, что радиус космологического горизонта на стадии доминирования излучения $r_H = 2ct$ близок к радиусу влияния $r_{\text{инф}}$ только вблизи момента образования ПЧД, а позже $r_H = 2ct$ расширяется быстрее, чем $r_{\text{инф}}$, поэтому рассматриваемые нами процессы происходят на масштабах, много меньше r_H .

Для точного расчета распределения плотности вокруг ПЧД требуются численные гидродинамические вычисления, аналогичные расчетам образования ПЧД [345], [346], [347], [348]. Но если рассматривать явления спустя некоторое время после момента образования ПЧД, когда волновые процессы затухнут, то можно ограничиться приближением квазистационарной аккреции [335], [336]. До эпохи рекомбинации фотоны часто рассеиваются на барионах и термализуются. Это приводит к тому, что, во-первых, в такой сплошной среде появляется общая гидродинамическая скорость в направлении ПЧД, хотя отдельные фотоны не захвачены ПЧД. Во-вторых, хотя расширение в ближней зоне не фридмановское, за счет давления в излучении происходит частичное выравнивание плотности вблизи ПЧД и на больших расстояниях, и локальный рост плотности вблизи ПЧД, обусловленный ее гравитацией, сглаживается. Выравнивание должно происходить на расстояниях от ПЧД, меньших размера звукового горизонта $r \ll r_s = 2ct/\sqrt{3}$, по порядку величины близкому к $r_H = 2ct$. На этих расстояниях можно использовать приближение квазистационарной аккреции [335], [336], которое мы кратко описали в разделе 3.1, и найденная там функция (3.9) показана на Рис. 3.1.

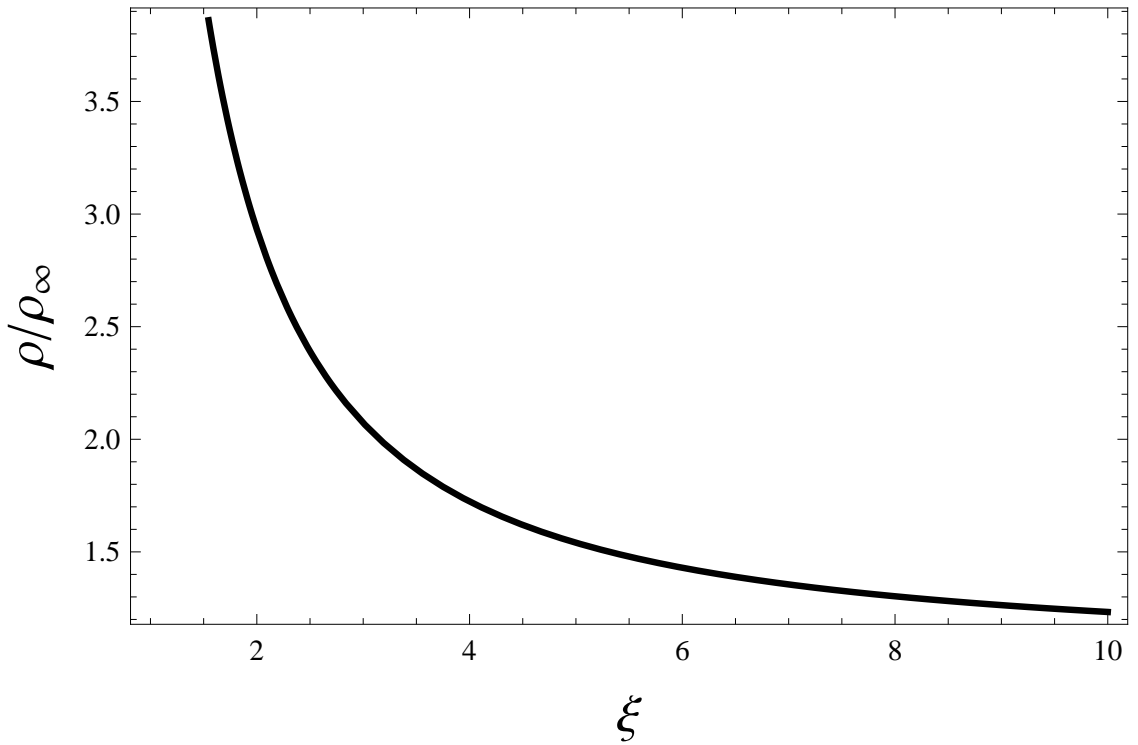


Рис. 3.1. Плотность газа с уравнением состояния $p = \rho c^2/3$ вблизи ЧД в зависимости от радиальной переменной $\xi = r/r_g$ в приближении квазистационарной аккреции.

Формализм работы [336] позволяет найти скорость в потоке $u \equiv dr/ds$:

$$4u\xi^2 \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{3/4} = -A, \quad (3.32)$$

где $A = 2 \times 3^{3/2}$. На больших расстояниях $\xi \gg 3$ решение (3.9) имеет асимптотику $\rho \simeq \rho_\infty(t)/(1 - 1/\xi)^2$, из которой видно, что плотность на этих расстояниях слабо отличается от средней космологической плотности. При этом, согласно (3.32), скорость гидродинамического потока равна $v \sim c/\xi^2$. Эта величина много меньше скоростей частиц ТМ, которые будут рассматриваться далее. Таким образом, в ньютоновской области $r \geq 10r_g$ до момента кинетического отщепления частиц ТМ можно пренебречь ростом плотности и анизотропией скорости частиц ТМ. В случае же $M_{\text{ВН}} > 40M_\odot$ ПЧД образуется после кинетического отщепления, и распределение плотности ТМ тем более не связано с ростом плотности излучения вокруг ПЧД.

Рассмотрим диффузионное вытекание фотонов из области повышенной плотности – эффект Силка (см., например, [241]), которое приводит к дополнительному сглаживанию плотности излучения и ТМ вокруг ПЧД. Длина свобод-

ного пробега фотона в космической плазме $l_{re} = 1/(n_e \sigma_T)$, где σ_T – томсоновское сечение, а концентрация электронов

$$n_e \simeq \frac{\rho_{\text{eq}} \Omega_b t_{\text{eq}}^{3/2}}{m_p t^{3/2}}, \quad (3.33)$$

$\Omega_b \approx 0.045$. Длина Силка $\lambda_S \simeq (l_{re} r_H)^{1/2}$

$$\frac{\lambda_S}{r_g} = 1.5 \times 10^5 \left(\frac{t}{10^{-3} \text{ с}} \right)^{3/4} \left(\frac{M_{\text{ВН}}}{10^{-8} M_{\odot}} \right)^{-1}. \quad (3.34)$$

Отсюда видно, что область сглаживания на несколько порядков меньше размера гало.

3.2.2. Разлет частиц темной материи после кинетического отщепления

Исследуем нарастания плотности ТМ вокруг ПЧД после момента кинетического отщепления t_d , когда частицы ТМ становятся свободными. Распределение частиц по скоростям вдали от ПЧД имеет вид

$$f(\mathbf{v}) d^3 v = \frac{m^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} d^3 v, \quad (3.35)$$

где

$$T(t) = T_d \frac{t_d}{t} \quad \text{при} \quad t > t_d, \quad (3.36)$$

т.к. импульс свободной частицы $p \propto 1/a(t)$. Вблизи ПЧД на расстояниях $r \leq 10r_g$ распределение частиц отличается от (3.35) из-за возрастания плотности излучения по сравнению с однородным космологическим фоном и ввиду наличия общей гидродинамической скорости в направлении к ПЧД. Мы ограничиваемся рассмотрением областей с $r \geq 10r_g$, в которых, как было показано в предыдущем разделе, эти поправки невелики. Поэтому далее используем (3.35).

Пусть ПЧД находится в начале координат. Обозначим через r_i начальное расстояние от центра некоторой частицы ТМ, а через \mathbf{v}_i – ее начальную скорость. Тогда полная энергия частицы $E = mv_i^2/2 + U(r_i)$, где $U(r) = -GmM_{\text{ВН}}/r$. Если угловой момент частицы равен $l = mr_i v_i \sin \theta_i$ (см. Рис 3.2), то эксцентриситет ее орбиты [349]

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{G^2 M_{\text{ВН}}^2 m^3}}. \quad (3.37)$$

Рассмотрим некоторую точку В на Рис 3.2 на расстоянии r от центра и найдем условия того, что некоторая частица из начального распределения (3.35) после кинетического отщепления окажется на финитной орбите и будет давать вклад в плотность ТМ в точке В. Первое из этих условий $E < 0$ означает, что начальная скорость меньше второй космической

$$v_i < \left(\frac{2GM_{\text{ВН}}}{r_i} \right)^{1/2}. \quad (3.38)$$

Второе условие сводится к тому, что расстояние r заключено между минимальным и максимальным расстоянием частицы от центра

$$r_{\min} = a(1 - e) \leq r \leq r_{\max} = a(1 + e), \quad (3.39)$$

где большая полуось орбиты [349]

$$a = \frac{GmM_{\text{ВН}}}{2|E|}. \quad (3.40)$$

Двойное условие (3.39) после преобразований записывается в виде

$$\sqrt{1 + \frac{2El^2}{G^2M_{\text{ВН}}^2m^3}} \geq \left| 1 + \frac{2Er}{GM_{\text{ВН}}m} \right|. \quad (3.41)$$

Введем обозначения

$$x = \frac{r}{r_i}, \quad \gamma = \frac{GM_{\text{ВН}}}{r_i v_i^2}, \quad (3.42)$$

тогда (3.41) запишется как

$$\cos^2 \theta_i \geq \cos^2 \theta_m = 2x(x - 1)\gamma + 1 - x^2. \quad (3.43)$$

Участок радиальных расстояний от r до $r + dr$ (см. Рис 3.2) частица проходит дважды за орбитальный период

$$T_{\text{orb}} = \frac{\pi GM_{\text{ВН}} m^{3/2}}{2^{1/2} |E|^{3/2}}, \quad (3.44)$$

поэтому на расстояниях от r до $r + dr$ частица проводит долю $2dt/T_{\text{orb}}$ своего орбитального времени, где dt – время, за которое частица смещается от r до

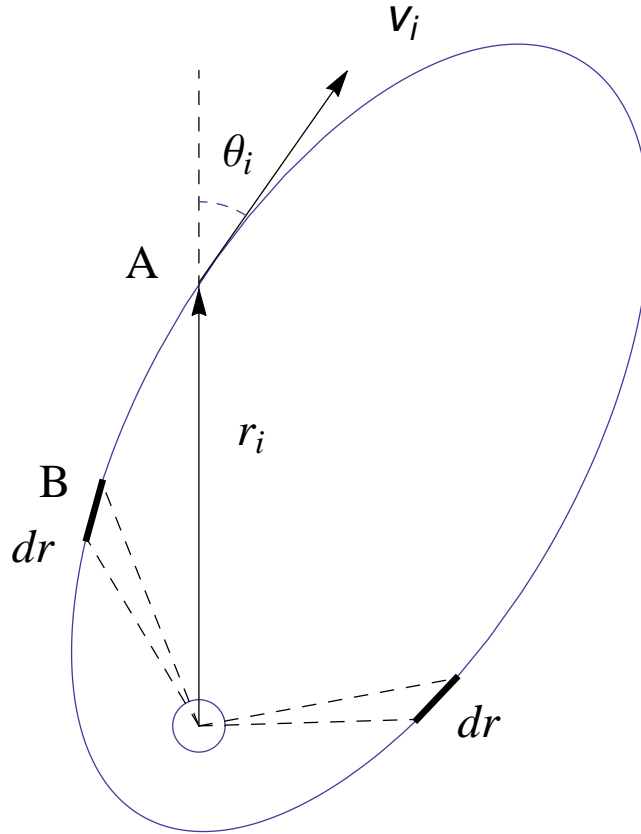


Рис. 3.2. Пример орбиты частицы ТМ вокруг ПЧД, проходящей через точку В. Вычисляется вклад всех таких орбит в плотность ТМ в точке В, находящейся на расстоянии r от центра. Вектор \mathbf{r}_i показывает начальное положение частицы в тот момент, когда она оказалась внутри радиуса влияния ЧД, а \mathbf{v}_i – скорость частицы в этот момент.

$r + dr$. Итоговую плотность $\rho(r)$ можно выразить через начальную плотность ТМ $\rho_i(r_i)$ в виде следующего соотношения

$$\rho(r)4\pi r^2 dr = \int 4\pi r_i^2 dr_i \rho_i(r_i) \int d^3 v f(v) \frac{2(dt/dr)}{T_{\text{orb}}} dr, \quad (3.45)$$

где dt/dr находится из уравнения движения частицы по орбите [349]

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\sqrt{2m[E - U(r)] - l^2/r^2}}, \quad (3.46)$$

а начальную плотность $\rho_i(r_i)$ на расстояниях $r \geq 10r_g$ мы, согласно результатам предыдущего раздела, полагаем приблизительно однородной и равной космологической плотности ТМ

$$\rho_i(r_i) \simeq \rho_d \frac{t_d^{3/2}}{t^{3/2}}, \quad (3.47)$$

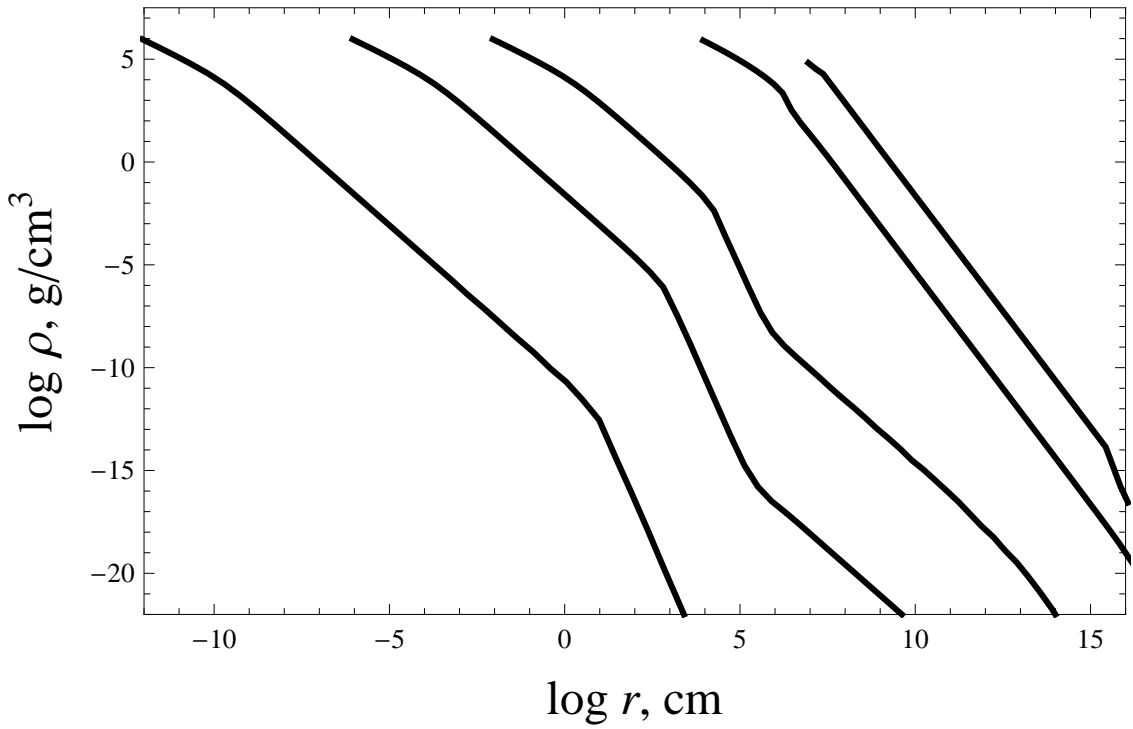


Рис. 3.3. Плотность ТМ вокруг ПЧД в зависимости от радиуса r для масс ПЧД (слева направо): $M_{\text{BH}} = 10^{-18}, 10^{-12}, 10^{-8}, 10^{-2}$ и $10M_{\odot}$.

где

$$\rho_d \simeq \Omega_m \rho_{\text{eq}} \left(\frac{t_{\text{eq}}}{t_d} \right)^{3/2} \simeq 4.7 \times 10^3 \text{ г см}^{-3}. \quad (3.48)$$

В (3.45) при интегрировании по r_i необходимо отдельно рассматривать области с $r_i \leq r_{\text{infl}}(t_d)$ и $r_i > r_{\text{infl}}(t_d)$, где радиус влияния дается выражением (3.29). Первая из этих областей в момент t_d полностью оказывается в области влияния ПЧД, и частицы в этой области имеют распределение (3.35) с $T = T_d$ и плотность $\rho_i(r_i) \simeq \rho_d$. Напротив, при $r_i > r_{\text{infl}}(t_d)$ происходит расширение области влияния. Для каждого радиуса r_i температура T и плотность ρ_i вычисляются, соответственно, из выражений (3.36) и (3.47), в которых t задается уравнением $r_{\text{infl}}(t) = r_i$.

Неравенства (3.38) и (3.43) задают в пространстве параметров область, по которой выполняется интегрирование в (3.45), и удобно разделить этот интеграл на две части с $x < 1$ и $x \geq 1$. Внутреннее интегрирование по направлениям скорости (по углам $\cos \theta_i$) выполняется аналитически, а оставшиеся двойные интегралы по начальным радиусам r_i и абсолютным величинам v_i находятся

численно. Максимальные возможные значения радиусов r_i полагаются равными радиусу влияния (3.30) в момент $t = t_{\text{eq}}$. При $t = t_{\text{eq}}$ внутри области влияния ПЧД оказывается масса ТМ, равная массе ПЧД, и далее формирование гало ТМ вокруг ПЧД происходит по механизму вторичной аккреции, когда ПЧД уже не определяет все гравитационное поле, а служит только малым возмущением.

Результаты вычислений для различных масс ПЧД показаны на Рис. 3.3. Построенный здесь численный алгоритм дает приемлемую точность только в интервале масс $M_{\text{ВН}} \sim (10^{-18} - 1)M_{\odot}$. Получающаяся плотность на малых расстояниях от ПЧД превышает ρ_d . Это означает, что частицы с малыми угловыми моментами оказываются на вытянутых орбитах, сближающихся с ПЧД на малых радиусах, увеличивая там плотность. При $M_{\text{ВН}} \leq 10^{-2}M_{\odot}$ видно универсальное поведение плотности на малых радиусах, где имеются участки с профилем плотности, близким к r^{-1} , но на больших r профиль испытывает излом за счет изменения режима формирования гало ТМ. На Рис. 3.3 радиусы показаны формально, начиная с $r = 3r_g$, но в действительности наши расчеты, выполненные в рамках ньютоновской динамики, применимы при $r \geq 10r_g$, поэтому величина плотности на меньших радиусах должна рассматриваться как оценка. Далее мы покажем, что плотность в центральной области гало роли не играет, т.к. ТМ в центральных пиках к настоящему моменту сильно проаннигилировала.

3.2.3. Аннигиляция темной материи вокруг первичных черных дыр, наблюдательные ограничения

Если частицы ТМ могут аннигилировать, то их плотность с течением времени будет уменьшаться. Как показано в [114], [136], максимальная плотность ТМ в каком-либо объекте не превышает величину (2.48):

$$\rho_{\text{max}} \simeq \frac{m}{\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle t_0} \simeq 9.4 \times 10^{-15} \left(\frac{m}{70 \text{ ГэВ}} \right) \times \left(\frac{\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle}{3 \times 10^{-26} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}} \right)^{-1} \left(\frac{t_0}{1.4 \times 10^{10} \text{ лет}} \right)^{-1} \text{ г см}^{-3}, \quad (3.49)$$

где t_0 – время, прошедшее с момента формирования объекта.

Как видно из Рис. 3.3, гало ТМ на малых радиусах значительно превосходит (3.49) по плотности. Это означает, что плотные центральные области гало существовали лишь в ранние эпохи, а к настоящему моменту плотность ТМ в гало уменьшилась до величины (3.49). Таким образом, вокруг ПЧД существовали плотные пики ТМ, от которых в настоящее время остались гало с центральной плотностью $\rho \sim \rho_{\max} \sim 10^{-14}$ г см⁻³ и со спадающей плотностью на периферии. Размеры этих гало порядка радиусов влияния ПЧД (3.29) в момент $t = t_{\text{eq}}$.

Рассмотрим аннигиляцию частиц ТМ в пиках плотности в современную эпоху. Аннигиляция вокруг единичной ПЧД, т. е. число проаннигилировавших частиц в единицу времени

$$\dot{N} = 4\pi \int r^2 dr \rho^2(r) \frac{\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle}{m^2}, \quad (3.50)$$

где в качестве профиля плотности в пике $\rho(r)$ используются профили, рассчитанные в разделе 3.2.2 с учетом ранней аннигиляции. В центральной части, начиная от радиуса $\sim 3r_g$, полагается $\rho(r) \sim \rho_{\max} = 10^{-14}$ г см⁻³, а на больших радиусах, когда плотности на Рис. 3.3 уменьшаются до величины ρ_{\max} , в интеграле (3.50) используются профили, показанные на Рис. 3.3.

На пылевидной стадии эволюции Вселенной при $t > t_{\text{eq}}$ вокруг ПЧД при $r > r_{\text{infl}}(t_{\text{eq}})$ начинает формироваться гало из ТМ по механизму вторичной аккреции [72]. Оно имеет профиль плотности

$$\rho(r) \simeq 3 \times 10^{-21} \left(\frac{r}{1 \text{ пс}} \right)^{-9/4} \left(\frac{M_{\text{ВН}}}{10^2 M_{\odot}} \right)^{3/4} \text{ г см}^{-3}, \quad (3.51)$$

в котором внешняя граница (3.51) определяется влиянием инфляционных возмущений плотности, так что полная масса гало ТМ вокруг ПЧД примерно на два порядка превосходит массу ПЧД $M_{\text{ВН}}$ [154]. Плотность (3.51) меньше плотности гало при $r = r_{\text{infl}}(t_{\text{eq}})$, поэтому (3.51) дает малый вклад в (3.50), а основной вклад создает центральная часть с плотностью (3.49) и примыкающие к ней участки гало, показанные на Рис. 3.3.

Суммарный гамма-сигнал из направления, характеризуемого углом ψ по отношению к центру Галактики,

$$J_{\gamma} = 2\eta_{\pi^0} \dot{N} \frac{\Omega_{\text{ВН}}}{\Omega_m M_{\text{ВН}}} \int dL \rho_{\text{H}}(r(L)), \quad (3.52)$$

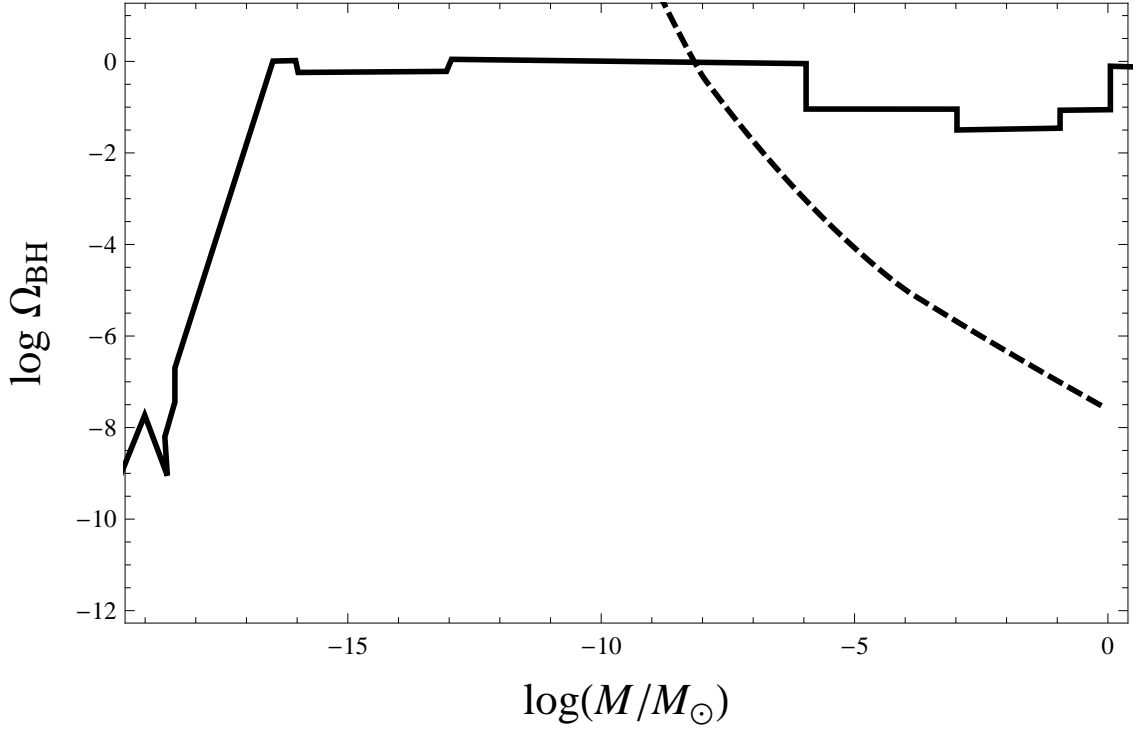


Рис. 3.4. Сплошная кривая показывает известные ограничения сверху на космологический параметр плотности ПЧД $\Omega_{\text{ВН}}$, приведенные в [140]. Штрихованной кривой показаны новые ограничения на основе эффекта аннигиляции частиц ТМ, полученные в данном разделе.

где $\Omega_{\text{ВН}}$ – космологический параметр плотности ПЧД, $\eta_{\pi^0} \sim 10$, а интегрирование производится вдоль луча зрения. Предполагается адронный канал аннигиляции, когда большинство гамма-фотонов излучается при распадах пионов $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, родившихся при аннигиляции частиц ТМ. В качестве профиля плотности гало Галактики $\rho_H(r)$ предполагается профиль (3).

Сравним сигнал (3.52), вычисленный в направлении на антицентр Галактики $\psi = \pi$ (это дает минимальный сигнал и наиболее консервативное ограничение) с данными телескопа Fermi-LAT по диффузному гамма-фону $J^{\text{obs}}(E > m_{\pi^0}/2) = 1.8 \times 10^{-5} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1} \text{ ср}^{-1}$ [312]. Для примера полагаем $m = 70 \text{ ГэВ}$ и $\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle \simeq 3 \times 10^{-26} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$. Условие $J_\gamma < J^{\text{obs}}$ ограничивает сверху величину $\Omega_{\text{ВН}}$, которое показано на Рис. 3.4 вместе с рядом других известных ограничений на ПЧД, приведенных в [140]. Эти ограничения часто выражают через долю β массы вещества в ранней Вселенной, вошедшей в состав ПЧД в момент (2.36) их образования. Величина β связана с $\Omega_{\text{ВН}}$ соотношением [140]

$$\Omega_{\text{ВН}} \simeq 5 \times 10^{17} \beta \left(\frac{M_{\text{ВН}}}{10^{15} \text{ г}} \right)^{-1/2}. \quad (3.53)$$

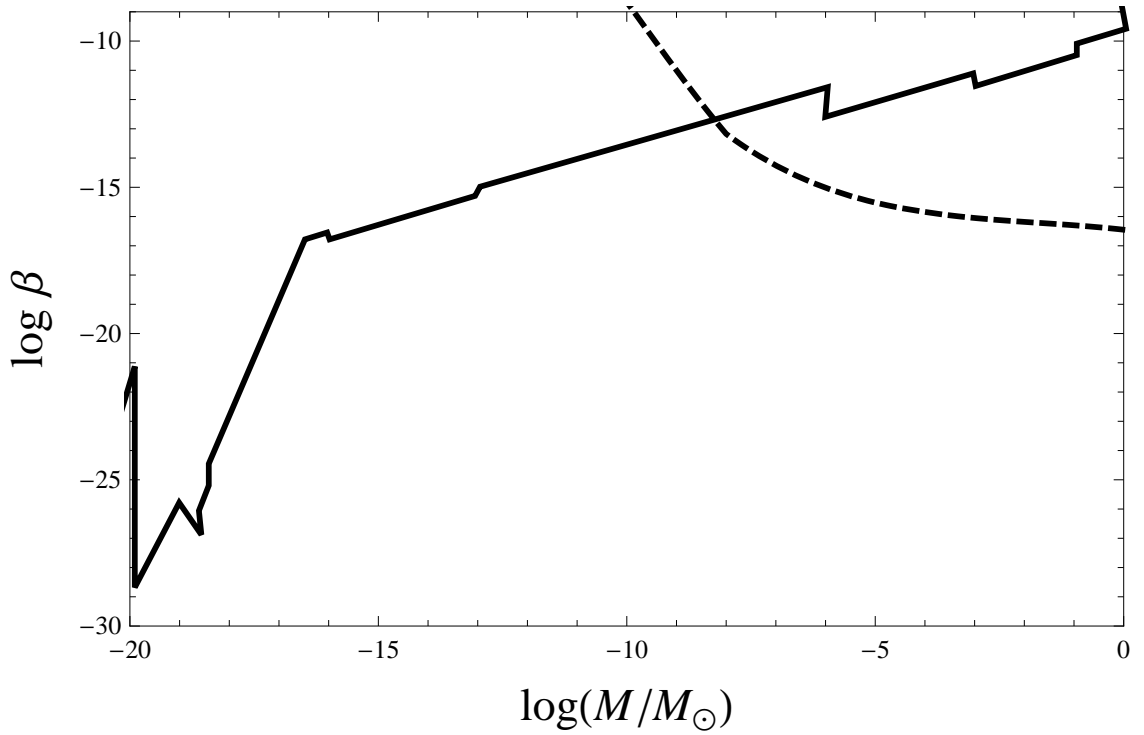


Рис. 3.5. То же, что на Рис. 3.4, но для доли β массы, вошедшей в ПЧД в момент их образования.

Ограничение на β показано на Рис. 3.5.

Из Рис. 3.4 и Рис. 3.5 мы видим, что ограничение по аннигиляции при массах $M_{\text{ВН}} \geq 10^{-8} M_{\odot}$ дает ограничения на количество ПЧД на несколько порядков более сильные, чем другие известные ограничения. Более слабые ограничения $\Omega_{\text{ВН}} \leq 10^{-4}$ ранее были получены в работе [86], где делалось предположение о профиле плотности в пике в виде $\rho \propto r^{-3/2}$. Следует однако заметить, что полученные нами ограничения в значительной мере модельно-зависимые, т.к. они принципиальным образом зависят от неизвестных пока свойств частиц ТМ, в частности, от их сечения аннигиляции. Нейтралино в неминимальных суперсимметричных моделях пока остаются среди наиболее вероятных кандидатов ТМ, поэтому полученные нами ограничения могут иметь место.

3.3. Индуцированные гало вокруг единичных первичных черных дыр

В данном разделе мы обсудим модель формирования особого класса карликовых галактик с ПЧД в качестве источника первичных возмущений плотности, вокруг которых могут формироваться “индуцированные гало” [76], [77] в режиме вторичной аккреции [72]. В этой модели предсказывается раннее формирование плотных сфероидальных галактик, а также существование ЧД промежуточных масс вне динамических центров современных галактик и в межгалактическом пространстве. Мы исследуем структуру получающегося гало, и обсудим возможные следствия для моделей формирования сверхмассивных ЧД в ядрах галактик. На число ПЧД в зависимости от их масс имеется ряд астрофизических ограничений (см. Введение), но в данном разделе мы предполагаем, что ПЧД имеют $\Omega_{\text{ВН}} < 0.001$, поэтому ограничения не нарушаются.

3.3.1. Структура гало вокруг первичных черных дыр

Индуцированные гало формируются по механизму вторичной аккреции аналогично ультракомпактным минигало, рассмотренным нами в разделе 2.6. Структура гало дается теми же формулами (2.44), (2.45), (2.46), но теперь мы рассматриваем большие затравочные массы. Выпишем профиль (2.46) с нормировкой на большую массу ПЧД:

$$\rho(r) \simeq 4.5 \times 10^{-25} \left(\frac{r}{500 \text{ пк}} \right)^{-9/4} \left(\frac{M_c}{10^5 M_\odot} \right)^{3/4} \text{ г см}^{-3}. \quad (3.54)$$

Вириализованная область ТМ прекращает нарастать в ту эпоху, когда на нелинейную стадию выходят окружающие инфляционные возмущения. Соответствующее уравнение имеет тот же вид, что и (2.47). Однако теперь $P(k)$ соответствует большим масштабам [350]:

$$P(k) = \frac{Ak}{(1 + 1.71u + 9u^{1.5} + u^2)^2}, \quad (3.55)$$

где $u = k/[(\Omega_{m,0} + \Omega_{b,0})h^2 \text{ Мpc}^{-1}]$, а k – сопутствующий волновой вектор. Нормировочная константа A соответствует среднеквадратичной величине возмущения

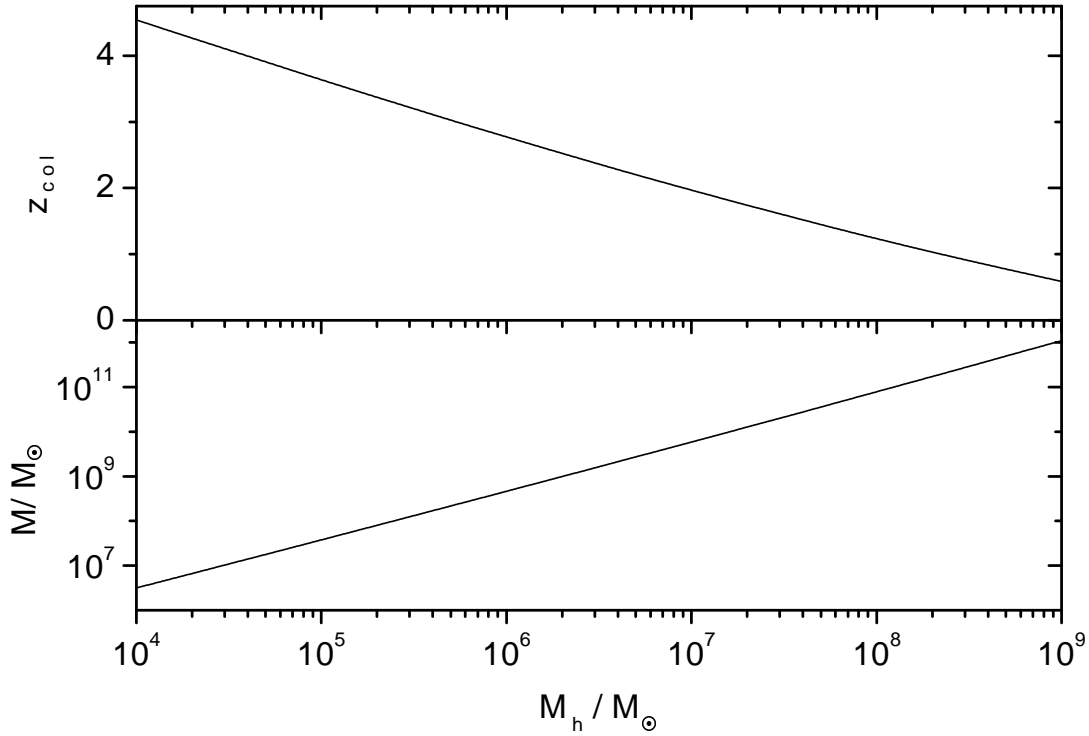


Рис. 3.6. Красное смещение окончания роста индуцированного гало и его масса в зависимости от массы ПЧД.

0.9 в масштабе 8 Мпк. Результаты численного решения уравнения (2.47) показаны на Рис. 3.6.

Интересно также обсудить вопрос о росте масс ПЧД за счет аккреции барионов за время их пролетов через галактические диски. При аккреции Бонди-Хойла излучается мощность $L_X = 4\pi\eta c^2 G^2 M^2 \rho v^{-3}$, где v – скорость движения ЧД через газ с плотностью ρ , а η – эффективность трансформации массы в энергию. Для дисковой аккреции на ЧД Шварцшильда $\eta \simeq 0.06$ и достигает $\eta \simeq 0.42$ для аккреции на экстремальную ЧД Керра. Типичным значением является $\eta \simeq 0.1$. Масса ЧД растет с характерным временем $t_{\text{ВН}} = (4\pi G^2 M \rho v^{-3})^{-1}$. Если предположить, что светимость соответствует светимости наблюдаемых ультраярких источников, то

$$t_{\text{ВН}} \simeq 6 \times 10^{10} \left(\frac{M}{10^4 M_\odot} \right) \left(\frac{L_X}{10^{39} \text{ эрг с}^{-1}} \right)^{-1} \text{ лет.} \quad (3.56)$$

Следовательно, ПЧД за время жизни Вселенной не успевает заметно нарастить свою массу даже если она все время движется в диске. Большого роста массы можно было бы ожидать в случае ПЧД, находящейся в молекулярном облаке.

Однако вероятность нахождения ПЧД непосредственно в облаке холодного газа мала, т.к. молекулярные облака занимают лишь долю объема диска $f_{\text{МС}} \simeq 0.017$.

3.3.2. Корреляции $\sigma - M_{\text{ВН}}$ между центральными черными дырами и балджами галактик

Покажем, что наблюдаемые корреляции между массами центральных сверхмассивных ЧД $M_{\text{ВН}}$ и дисперсиями скоростей в балджах σ_e в виде $M_{\text{ВН}} \propto \sigma_e^4$ может свидетельствовать о догалактическом происхождении ЧД. ПЧД могут быть центрами роста отдельного класса протогалактик, которые входят в состав больших галактик, а их центральные ЧД далее испытывают слияния и рост [76], [77].

Данные наблюдений говорят о том, что не менее 20% современных структурированных галактик содержат в своих центрах сверхмассивные ЧД. Было показано [351] наличие корреляций между массами M_{SMBH} центральных сверхмассивных ЧД в ядрах галактик и дисперсиями скоростей σ_e на половине оптического радиуса балджей [352]:

$$M_{\text{SMBH}} = 1.2(\pm 0.2) \times 10^8 \left(\frac{\sigma_e}{200 \text{ km/s}} \right)^{3.75(\pm 0.3)} M_{\odot}. \quad (3.57)$$

Мы применяем термин “балдж” как для эллиптических галактик, так и для центральных сфероидальных подсистем спиральных галактик. Заметим однако, что другой анализ [353], основанный на меньшем объеме наблюдательных данных, дает корреляции в несколько иной форме $M_{\text{SMBH}} \propto \sigma_e^{4.8(\pm 0.5)}$.

Происхождение данных корреляций пока не выяснено. Простейшее предположение о том, что рост сверхмассивной ЧД определяется процессами в балдже, наталкивается на проблему большой разницы в масштабах: масштаб балджа составляет несколько кпк, а масштаб аккреционного диска вокруг ЧД менее 1 пк. Необходим некий детерминированный механизм [354], определяющий поток газа из балджа в центральную область.

Здесь мы развиваем альтернативную модель [76], [178], в которой предполагается, что наблюдаемые корреляции имеют стохастическую природу. Базовым предположением является предположение о существовании во Вселенной

догалактической популяции ЧД с массами $M_h \sim 10^5 M_\odot$, это могут быть ПЧД. Похожая гипотеза о существовании догалактических ЧД привлекалась в работе [355] для интерпретации квазарной активности. Мы предполагаем, что ПЧД в больших масштабах однородно перемешаны с ТМ, так что полная масса ПЧД в любой большой галактике $\sum M_h$ пропорциональна полной массе ТМ в этой галактике M . В результате, будут иметь место корреляции в виде $\sum M_h \propto M$, которые являются в данной модели первичными, а наблюдаемые корреляции $M_{BH} \propto \sigma_e^4$ возникают позже за счет слияния ПЧД.

Поскольку дисперсия скоростей в галактике определяется преимущественно массой ТМ, следует ожидать существование зависимости между M_{SMBH} и σ_e . Найдем форму этой зависимости. Запишем условие формирования галактики из флуктуации плотности величиной δ :

$$\delta_{\text{eq}}(M) \frac{g(z)(1+z_{\text{eq}})}{g(z_{\text{eq}})(1+z)} = \delta_c, \quad (3.58)$$

где функция $g(z)$ учитывает влияние Λ -члена и дается выражением $\delta(t)/\delta(z_{\text{eq}}) = g(z)(1+z_{\text{eq}})/[g(z_{\text{eq}})(1+z)]$ [356], где

$$g(z) \approx \frac{5}{2} \Omega_m [\Omega_m^{4/7} - \Omega_\Lambda + (1 + \Omega_m/2)(1 + \Omega_\Lambda/70)]^{-1}, \quad (3.59)$$

$\Omega_m = \Omega_{m,0}(1+z)^3/E^2(z)$ и т.п., а $\delta_c = 1.686$ и M - масса галактики. В качестве $\delta_{\text{eq}}(M)$ возьмем среднеквадратичные флуктуации. Уравнение (3.58) в неявном виде задает функцию $z(M)$. Плотность вириализованного объекта в $\varkappa = 18\pi^2$ раз больше средней плотности $\rho_m(z) = \rho_{c,0}\Omega_{m,0}(1+z)^3$ ТМ в момент z формирования объекта. Это позволяет найти радиус и дисперсию скоростей в галактиках:

$$r(M, z) = \left(\frac{3M}{4\pi\varkappa\rho_m(z)} \right)^{1/3}, \quad \sigma_e(M) = \left(\frac{GM}{r(M, z(M))} \right)^{1/2}, \quad (3.60)$$

где $z(M)$ находится из (3.58). Обращая функцию $\sigma_e(M)$ и используя спектр флуктуаций (3.55), получаем численно

$$\frac{M}{M_\odot} \simeq 7 \times 10^{11} \left(\frac{\sigma_e}{200 \text{ km s}^{-1}} \right)^{4.3}. \quad (3.61)$$

В случае эффективного слияния ПЧД в одну сверхмассивную ЧД предшеству-

ющее соотношение дает итоговую массу ЧД

$$M_{\text{SMBH}} = \psi \Omega_{\text{BH}} M = 1.4 \times 10^8 \left(\frac{\psi \Omega_{\text{BH}}}{2 \times 10^{-4}} \right) \left(\frac{\sigma_e}{200 \text{ km s}^{-1}} \right)^{4.3}, \quad (3.62)$$

где множитель ψ описывает возможный дополнительный рост массы ЧД за счет аккреции. Рассматриваемая модель находится в согласии с данными наблюдений (3.57). Однако показатель степени α в соотношении $M_{\text{SMBH}} \propto \sigma_e^\alpha$ несколько смещен в сторону значений, полученных в [357]. Величина этого показателя степени определяется формой спектра возмущений плотности на масштабах галактик. Возможная зависимость $\psi(M)$ могла бы изменить соотношение $M_{\text{SMBH}}(\sigma_e)$. Но простейший вариант $\psi = \text{const}$ дает хорошее согласие с наблюдений (3.57).

Необходимым условием реализации предложенной модели является множественное слияние ПЧД с массами M_h в одну большую ЧД с массой M_{BH} за хаббловское время. Известно, что для единичной ЧД с массой $M_h \ll 10^7 M_\odot$ динамическое трение в гало галактики неэффективно для движения ЧД к центру гало. Тем не менее, для образовавшихся рано ЧД имело место процесс вторичной аккреции, в результате которого ПЧД была окружена гало с профилем плотности $\rho \propto r^{-9/4}$ и массой, которая примерно на два порядка превышает массу ЧД. Такие комбинированные системы “ЧД+гало” уже успевают осесть к центру галактики, и их ЧД получают возможность слиться в одну большую ЧД. Предположение о слиянии малых ЧД в одну большую может нарушаться для галактик поздних хаббловских типов, т.к. они образовались позже. Действительно, согласно наблюдениям, массы центральных ЧД в галактиках Sa, Sb, Sc в среднем меньше, чем в E и S0 галактиках. Принципиальная возможность регистрации множественных слияний ПЧД в галактиках появится в случае запуска детектора гравитационных волн LISA.

3.4. Скопления первичных черных дыр

Механизм образования ПЧД в процессе коллапса замкнутых доменных стенок был предложен в [153, 179, 180], [358]. В данном разделе мы будем использовать эту модель для объяснения раннего формирования особого класса галактик вокруг скопления ПЧД. Скопление ПЧД в этом случае могло играть

роль начального возмущения плотности в дополнении к обычным инфляционным космологическим возмущениям. В случае достаточно массивных и плотных скоплений, в них могли возникнуть ранние квазары на больших z . Параметры инфляционных моделей используются те же, что в работах [153, 179].

Имеются следующие стадии формирования и эволюции скоплений ПЧД и порождаемых ими галактик: 1. Формирование замкнутых доменных стенок из скалярного поля сразу после стадии инфляции и коллапс стенок в скопления ПЧД. Формирование наиболее массивной ЧД в центре скопления сразу после пересечения гравитационным радиусом космологического горизонта. 2. Отщепление центральной достаточно плотной области скопления от космологического расширения и вириализация этой области. Многие из окружающих менее массивных ЧД сливаются с центральной ЧД и увеличивают ее массу. 3. Зажигание квазаров в результате аккреции на центральную ЧД (в случае достаточно плотных скоплений). 4. Отщепление от космологического расширения внешних слоев скоплений, где доминирует ТМ, и дальнейший рост галактики. Остановка роста галактики в результате гравитационного взаимодействия с окружающими возмущениями плотности. 5. Охлаждение газа и формирование звезд в галактике.

3.4.1. Раннее образование квазаров

Рассмотрим сначала достаточно плотные скопления, которые эволюционируют рано, и в которых могут зажигаться ранние квазары. Обнаружение далеких квазаров на красных смещениях $z > 6$ в обзоре Sloan Digital Sky Survey [165] поставило перед теорией формирования галактик сложные вопросы. Светимость квазара на красном смещении $z = 6.41$ соответствует аккреции на ЧД с массой $3 \times 10^9 M_{\odot}$ [166]. Раннее формирование ЧД с массами $\sim 10^9 M_{\odot}$ приводит к трудностям для обычных астрофизических сценариев формирования сверхмассивных ЧД [170], [172], [359, 360]. Поэтому сценарии с массивными догалактическими ПЧД [137, 148] становятся актуальными.

Предполагаем, что доля массы Вселенной $\sim 10^{-3}$ состоит из компактных скоплений ПЧД, возникших в результате фазовых переходов в ранней Вселенной. Скопление ПЧД становится центром конденсации ТМ. В результате, фор-

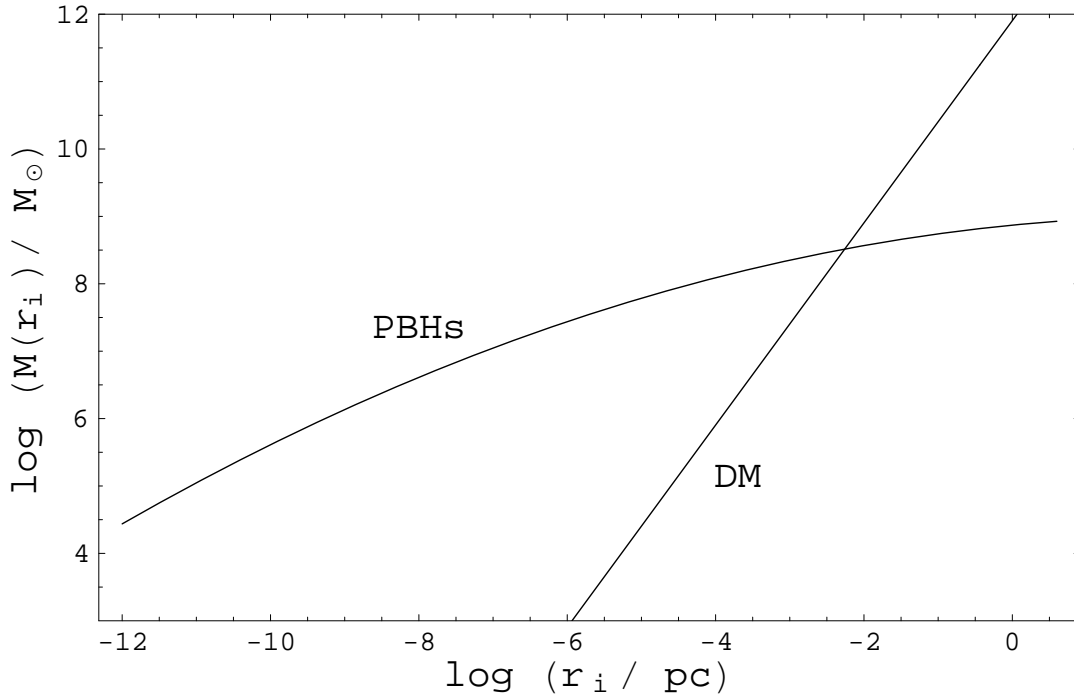


Рис. 3.7. Начальный профиль массы $M_h(r_i)$ скопления ПЧД и профиль массы $M_{\text{DM}}(r_i)$ ТМ.

мируются галактики с центральной ЧД, масса которой растет в процессе аккреции. Эта аккреция сопровождается ранней квазарной активностью. Начальный профиль массы $M_h(r_i)$ скопления ПЧД, рассчитанный согласно [358], показан на Рис. 3.7. Для сравнения показана масса ТМ $M_{\text{DM}}(r_i)$ внутри сферических слоев с теми же радиусами. Радиус r_i выражен в физических масштабах в момент t_i (когда температура Вселенной была равна T_i), когда этот радиус пересекает космологический горизонт. Отметим, что оболочки на Рис. 3.7 берутся в различные моменты t_i . Соответственно, ТМ с однородным распределением плотности не следует закону $M_{\text{DM}} \propto r^3$, как это было бы для фиксированного момента времени.

Согласно вычислениям на основе указанной выше структуры скопления, под гравитационным радиусом окажется центральная масса $4.3 \times 10^7 M_\odot$. Таким образом, весь диапазон масс и радиусов, показанных на Рис. 3.7, в действительности не реализуется.

Исследуем гравитационную динамику скопления ПЧД и окружающей его ТМ. Рассмотрим сферически симметричную систему с радиусом $r < ct$, состоящую из ПЧД с общей массой M_h внутри сферы радиуса r , излучения с плотностью ρ_r , ТМ с плотностью ρ_{DM} и космологического Λ -члена, которому

соответствует плотность ρ_Λ . Используя второе уравнение Фридмана (для \ddot{a}) можно переписать (2.1) в виде

$$\frac{d^2b}{dz^2} + \frac{db}{dz}S(z) + \left(\frac{1 + \delta_h}{b^2} - b\right) \frac{\Omega_{m,0}(1+z)}{2E^2(z)} = 0, \quad (3.63)$$

где функция

$$S(z) = \frac{1}{E(z)} \frac{dE(z)}{dz} - \frac{1}{1+z} \quad (3.64)$$

и величина возмущения $\delta_h = M_h/M_{\text{DM}}$. В предельном случае $\varepsilon_\Lambda = 0$ уравнение (3.63) эквивалентно тому, что было получено в работе [95]. К сожалению, фитирующая формула из [95] $\rho \simeq 140\Phi^3(\Phi + 1)\rho_{\text{eq}}$, где $\Phi = \delta_h$, не описывает очень плотные скопления (с $\delta_h > 10^4$), поэтому нужно решать уравнение (3.63). Начинаем рассмотрение эволюции скопления с большого красного смещения z_i , когда рассматриваемый слой пересекает горизонт $r \sim ct$. Начальные условия показаны на Рис. 3.7.

Момент остановки расширения слоя $\dot{r} = 0$ соответствует условию $db/dz = b/(1+z)$ и происходит на некотором радиусе r_s . Мы полагаем, что после сжатия от r_s до $r_c = r_s/2$ слой вириализуется и фиксируется на радиусе r_c . Следовательно, средняя плотность вириализованного объекта ρ в 8 раз больше его плотности в момент максимального расширения

$$\rho = 8\rho_{m,0}(1+z_s)^3b_s^{-3}, \quad (3.65)$$

и эффективный (вириальный) радиус объекта равен

$$r_c = \left(\frac{3M_{\text{DM}}}{4\pi\rho}\right)^{1/3}. \quad (3.66)$$

Внутренние слои прекращают расширение раньше внешних. Как объяснено ранее, ЧД с массой $M_c = 4.3 \times 10^7 M_\odot$ формируется в центре скопления в момент t_i . Следующие слои, в которых $\delta_h > 1$ ($M_{\text{DM}} < M_h$), также отщепляются от космологического расширения на радиационно-доминированной стадии. Эти слои аккрецируются центральной ЧД за счет их сжатия в результате парной релаксации, что будет обсуждаться ниже. Граничная величина $\delta_h = 1$ соответствует массе $M_h = M_{\text{DM}} = 3.3 \times 10^8 M_\odot$.

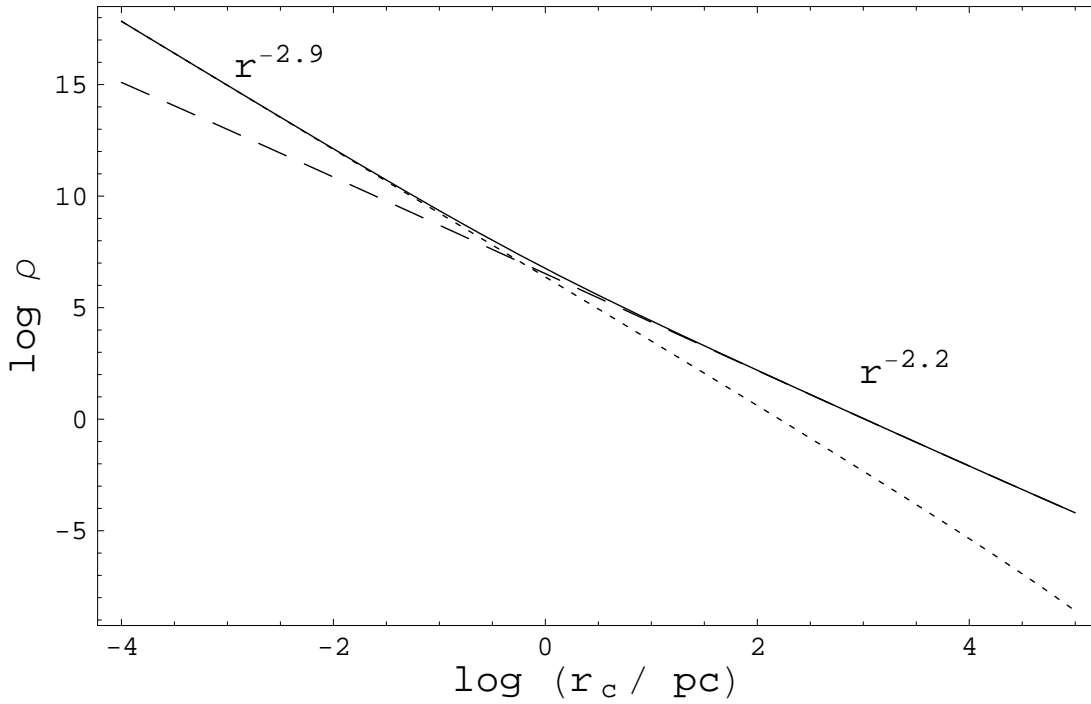


Рис. 3.8. Итоговый профиль плотности (3.67) индуцированной гало (ρ в единицах $M_{\odot}\text{пк}^{-3}$) в зависимости от расстояния до центра скопления r_c для ТМ (штрихованная линия), для ПЧД (точечная линия) и для суммы плотностей (сплошная линия). Также показаны асимптотические степенные зависимости.

Для рано формирующихся ПЧД возможен процесс, аналогичный “вторичной аккреции”. В результате, ПЧД будет окружена гало ТМ. Мы называем такие гало индуцированными. Их профиль плотности не будет следовать профилю вторичной аккреции $\rho \propto r^{-9/4}$ из-за того, что центральная масса (скопление ПЧД) некомпактна. После вириализации распределение ТМ имеет вид

$$\rho_{\text{DM}}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM_{\text{DM}}(r)}{dr}, \quad (3.67)$$

где функция $M_{\text{DM}}(r_c)$ определяется решением уравнения (3.63). Аналогично ТМ может быть найден профиль плотности ЧД и суммарный профиль плотности. Соответствующие результаты показаны на Рис. 3.8, где плотность выражена в единицах $M_{\odot}\text{пк}^{-3}$, а расстояние от центра – в пк. Как видно на Рис. 3.8, при $r = 8$ кпк полная плотность 0.7 ГэВ см^{-3} . Таким образом, по некоторым своим характеристиками рассматриваемые объекты напоминают нашу Галактику, но они более плотные в центральной части и содержат сверхмассивные ЧД.

Итоговая структура индуцированного гало имеет следующий вид. Внутри

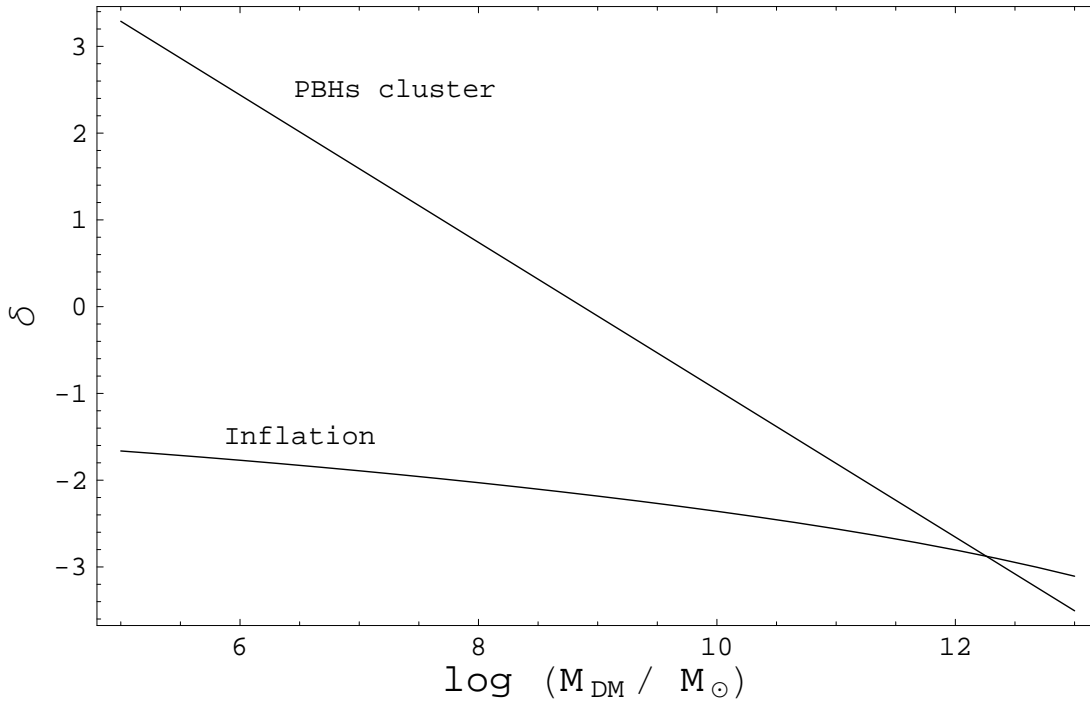


Рис. 3.9. Среднеквадратичная величина возмущений в момент времени t_{eq} , производимых скоплением ПЧД и по инфляционному механизму.

радиуса $r = 10$ пк от центра масса первичных ЧД (включая массу центральной ЧД) равна $2.9 \times 10^8 M_{\odot}$. Внутри того же радиуса масса ГМ $3.4 \times 10^8 M_{\odot}$. На больших расстояниях профиль плотности

$$\rho(r) = 2.2 \times 10^4 \left(\frac{r}{10 \text{ пк}} \right)^{-2.2} M_{\odot \text{пк}}^{-3}. \quad (3.68)$$

В данной модели окончание роста индуцированных гало также определяется окружающими инфляционными возмущениями. Возмущения, производимые скоплением,

$$\delta_{\text{eq}}^h(M) = 0.044 \left(\frac{M}{10^{10} M_{\odot}} \right)^{-0.85}. \quad (3.69)$$

Путем численного решения (2.47) получаем массу гало ГМ в момент окончания ее роста $M_{\text{DM}} = 1.8 \times 10^{12} M_{\odot}$. Расширение останавливается на красном смещении $z = 1.64$. Формирующиеся индуцированные гало выглядят как большие галактики-сфероиды или эллиптические галактики с малой эллиптичностью. Они имеют центральный пик плотности ГМ, показанный на Рис. 3.8 и центральные сверхмассивные ЧД.

Рассмотрим эволюцию квазарной активности в данном сценарии. Описываемая модель может объяснить появление сверхмассивных ЧД с массами $M_Q =$

$3 \times 10^9 M_\odot$ в квазарах на красных смещениях $z = 6$ (в эту эпоху возраст Вселенной $t_6 = 9 \times 10^8$ лет). В этой модели сверхмассивные ЧД формируются на радиационно-доминированной стадии задолго до формирования галактик. Вначале масса ЧД в центре скопления $M_c = 4.3 \times 10^7 M_\odot$ или больше (за счет поглощения окружающих меньших ПЧД из скопления). Предположим, что эта ЧД аккрецирует вещество и излучает на эддингтоновском пределе $L_E = 1.3 \times 10^{46}$ эрг/с. За счет аккреции масса ЧД нарастает экспоненциально с характерным временем $t_E = 4.5 \times 10^8 \eta$ лет, где η – эффективность трансформации массы в энергию при аккреции. Время роста от $M_c = 4.3 \times 10^7 M_\odot$ до $M_Q = 3 \times 10^9 M_\odot$ составляет $\Delta t = t_E \ln(M_Q/M_c) \simeq 2 \times 10^8$ лет при $\eta \sim 0.1$. Это означает, что квазарная активность началась в момент времени $t_6 - \Delta t \simeq 7 \times 10^8$ лет, соответствующий красному смещению $z = 7.3$. На этом красном смещении индуцированное гало имело массу $4.3 \times 10^{11} M_\odot$, вириальный радиус 40 кпк, среднюю вириальную скорость 140 км с^{-1} и среднюю вириальную температуру $T_v = m_p v^2 / 3 \simeq 2 \times 10^6 \text{ К}$, где m_p – масса протона. Эти величины были получены путем численного решения уравнения (3.63). Для этих параметров эффективно действует механизм радиационного охлаждения барионного газа, что дает возможности для появления потоков газа к центру и его аккреции на ЧД.

Вероятной считается модель, в которой квазарная активность в галактике начинается за счет появления приливных потоков газа на центральную ЧД при слиянии галактики с другой галактикой или за счет взаимодействия с окружающими возмущениями плотности вблизи $z \sim 1.6$, как это было объяснено выше.

Для более точного расчета необходимо принимать во внимание распределение скоплений ПЧД, а также гауссово распределение окружающих возмущений плотности. Покажем, как может быть учтен последний фактор – распределение по ν . В среднем $\nu = 1$, и до момента $z = 1.6$ возмущение от скопления ПЧД преобладает над стандартными инфляционными возмущениями. Однако могут реализоваться и менее вероятные случаи с $\nu > 1$. Эти редкие большие возмущения ответственны в нашей модели за приливные силы и квазарную активность на больших z . Из (3.63) получаем вириальные радиусы индуцированных гало в зависимости от красного смещения $M_{DM}(z)$. Подставляя эту функцию в (2.47),

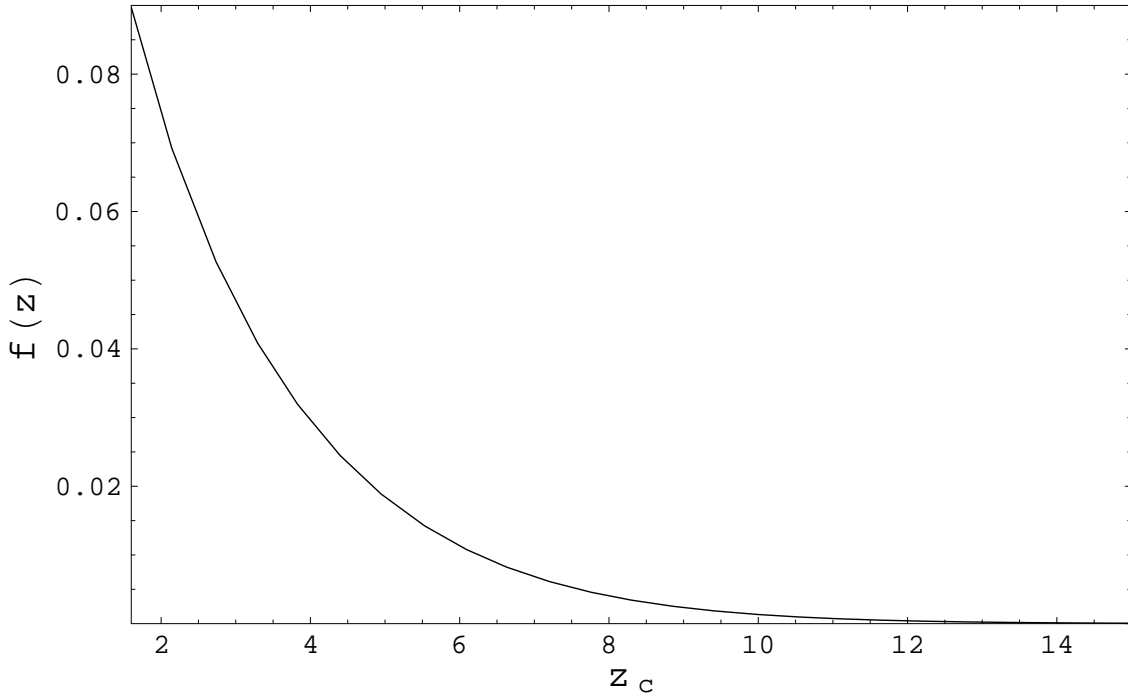


Рис. 3.10. Распределение по z моментов начала квазарной активности в скоплениях ПЧД.

получаем зависимость $\nu(z)$. Функция $\nu(z)$ дает величину пика в инфляционном возмущении, необходимую для остановки роста индуцированного гало на красном смещении z и начала в этом гало квазарной активности. Распределение таких событий имеет вид

$$f(z) = -\frac{d}{dz} \int_{\nu(z)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\nu'^2/2} d\nu' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\nu^2(z)/2} \frac{d\nu(z)}{dz} \quad (3.70)$$

и показано на Рис. 3.10. На Рис. 3.10 показано распределение событий начала квазарной активности до момента $z = 1.6$, когда начинается формирование крупномасштабной структуры по обычному механизму. Заметим, что Рис. 3.10 не дает распределение по красным смещениям количества квазаров $F_{\text{QSO}}(z)$. Чтобы вычислить $F_{\text{QSO}}(z)$ необходимо принять во внимание плохо известную величину – время длительности квазарной активности в галактике $t_q(z, M_{\text{ВН}})$ (см. подробнее в [361]). Для заданной $t_q(z, M_{\text{ВН}})$ имеем $F_{\text{QSO}}(z) \simeq \delta z(t_q, z) f(z)$, где $\delta z(t_q, z)$ – интервал красных смещений, соответствующий интервалу времени t_q при среднем z .

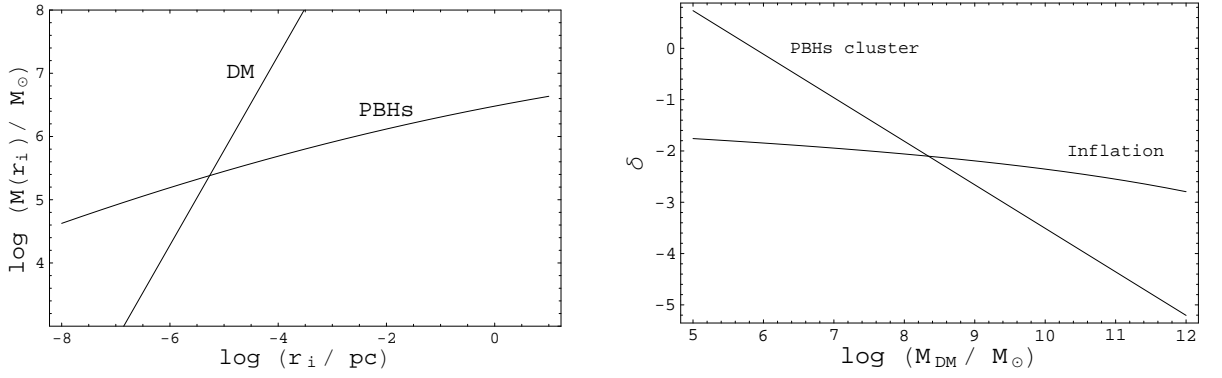


Рис. 3.11. Слева представлены начальное распределение ПЧД $M_h(r_i)$ и ТМ $M_{\text{DM}}(r_i)$. Справа представлено распределение флуктуаций плотности энергии на момент t_{eq} равенства плотности энергии материи и излучения. Сравниваются две величины - суммарная флуктуация плотности в присутствии скопления ПЧД и стандартная флуктуация плотности как результат инфляционной стадии.

3.4.2. Раннее образование галактик

В этом разделе изучается формирование при красном смещении $z = 15$ протогалактик особого типа с массой порядка $2 \times 10^8 M_\odot$, содержащих в своих центрах скопления ЧД. В них содержатся центральные ЧД с массами $\sim 10^5 M_\odot$. Протогалактики в целом похожи на карликовые сферические галактики с пиком плотности в центре. Последующие слияния этих протогалактик с обычными гало ТМ приводят к стандартной картине формирования крупномасштабной структуры Вселенной. В результате слияния ПЧД образуются сверхмассивные ЧД в центре галактик.

Предполагается, что скопления ПЧД образуются по механизму, предложенном в [363], [179]. Используемые далее начальные данные взяты из работ [153, 179, 180, 358], где рассматривался инфляционный потенциал типа “Мексиканская шляпа”. Начальное распределение по массам $M_h(r_i)$ ПЧД в скоплении представлено на Рис. 3.11 (левый рисунок). В отличие от обсуждавшейся в предыдущем разделе модели образования квазаров, здесь рассматриваются менее массивные и менее плотные скопления ПЧД. Общая масса ПЧД, с самого начала оказавшаяся под горизонтом, равна $2.7 \times 10^4 M_\odot$.

Рассмотрим динамику скопления ПЧД и ТМ в общем гравитационном поле. Результаты численного решения уравнения (3.63) показаны на Рис. 3.12.

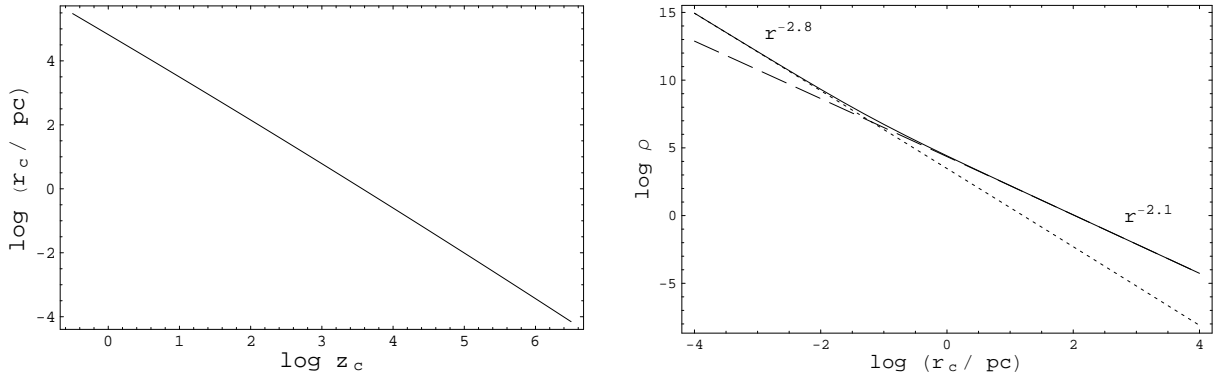


Рис. 3.12. На левом рисунке показан вириальный радиус r_c протогалактики как функция красного смещения z . На правом рисунке показан конечный профиль плотности (3.67) в зависимости от расстояния до центра скопления r_c в протогалактике (ρ в единицах M_\odot/pc^3). ТМ - пунктирная линия, ЧД - точки, суммарная плотность - непрерывная линия. Также отмечено асимптотическое поведение плотности

Здесь также имеет место процесс, сходный со “вторичной аккрецией”. В результате скопление ЧД оказывается окруженным гало ТМ. Результаты представлены на правом Рис. 3.12, где плотность выражена в $M_\odot/\text{пк}^3$, а расстояние от центра - в пк. Профиль фитируется следующим законом

$$\rho_{\text{DM}}(r) = 2.3 \times 10^4 \left(\frac{r}{1 \text{ пк}} \right)^{-2.13} M_\odot \text{пк}^{-3}, \quad (3.71)$$

$$\rho_{\text{BH}}(r) = 2.9 \times 10^3 \left(\frac{r}{1 \text{ пк}} \right)^{-2.85} M_\odot \text{пк}^{-3}. \quad (3.72)$$

Плотность ТМ преобладает над усредненной плотностью ЧД (произведением масс ЧД на их концентрацию) при $r > 0.056$ пк, в то время как полная масса ТМ преобладает над суммарной массой ЧД при $r > 0.7$ пк. Поэтому влияние ЧД на динамику протогалактики ограничено центральным пк.

Численное решение (точка пересечения на правом Рис. 3.11) уравнения (2.47) дает итоговую массу индуцированного гало $M_{\text{DM}} = 2.2 \times 10^8 M_\odot$. Выбирая начальное значение $\delta(z_{\text{eq}}) = \sigma_{\text{eq}}(M_{\text{DM}})$ для $M_{\text{DM}} = 2.2 \times 10^8 M_\odot$ в момент t_{eq} , находим момент прекращения роста гало из (3.59). Это происходит при $z = 15$, так что весь интервал значений, показанный на Рис. 3.11 и Рис. 3.12 не реализуется.

Окончательная структура индуцированного гало следующая. Центральная ЧД с массой $2.7 \times 10^4 M_\odot$ окружена скоплением ЧД с массой $2.2 \times 10^5 M_\odot$ внутри сферы радиуса $r \sim 0.7$ пк. Вне этой области доминирует ТМ с про-

филем плотности (3.71). Размер среднего $\nu = 1$ индуцированного гало равен $R = 1.8$ кпк, а полная масса внутри гало $2.2 \times 10^8 M_\odot$. В центральном пк индуцированного гало идут процессы релаксации и аккреции, в то время как, начиная с красного смещения $z = 15$, само индуцированное гало участвует в иерархическом сгущивании с более многочисленными обычными протогалактиками. Индуцированные гало выглядят как карликовые сфероидальные галактики с центральным пиком, как на Рис. 3.12 справа, и центральной ЧД, окруженной ЧД промежуточных масс. Некоторые из этих индуцированных гало могли сохраниться до настоящего времени.

ЧД, движущаяся внутри сферы некоторого радиуса r с центром в центре индуцированного гало, аккрецирует окружающую ТМ со скоростью

$$\dot{M}_{\text{DM}} = \sum_i N_i \sigma_{\text{acc},i} v \rho_{\text{DM}}, \quad (3.73)$$

где N_i - число ЧД с массами M_i внутри сферы радиусом r (в действительности, распределение ЧД по массам непрерывно), $v \simeq (GM_{\text{tot}}/r)^{1/2}$ - средняя скорость, $M_{\text{tot}} = M_{\text{DM}} + \sum M_i N_i$ и сечение захвата частиц ЧД равно $\sigma_{\text{acc},i} = \pi r_{g,i} (c/v)^2$, $r_{g,i} = 2GM_i/c^2$. Характерное время аккреции ТМ

$$t_{\text{acc}}^{-1} \simeq \dot{M}_{\text{DM}}/M_{\text{DM}} = \frac{3G^2}{cvr^3} \sum_i N_i M_i^2. \quad (3.74)$$

Используя рассчитанное выше распределение плотности, получаем

$$t_{\text{acc}}(r)/t_0 \simeq 8 \times 10^3 \left(\frac{r}{1 \text{ пк}} \right)^{2.7}, \quad (3.75)$$

где t_0 - возраст Вселенной. Таким образом, ТМ полностью аккрецируется к настоящему моменту $t_{\text{acc}} \sim t_0$ внутри сферы радиуса $R_c \simeq 0.036$ пк. Закон роста плотности ТМ (3.71) к центру скопления справедлив только при $r \geq R_c$, и $\rho_{\text{DM}} = 0$ при $r < R_c$. Аккрецируемая масса ТМ пренебрежимо мала по сравнению с суммарной массой ЧД, и поэтому аккреция ТМ не является существенным фактором роста массы центральной ЧД.

В “испарительной” модели время до гравитационного коллапса скопления $t_e \simeq 40t_{\text{rel}}$ [313]. Коллапсы сферических слоев дают довольно малый вклад в массу ЧД. Действительно, масса центральной ЧД к моменту $z = 15$, когда

рост индуцированного гало заканчивается, равна $M_{\text{ВН}} = 6.9 \times 10^4 M_{\odot}$, эта величина является суммой начальной массы $2.7 \times 10^4 M_{\odot}$ и суммарной массы коллапсировавших слоев. К моменту формирования больших современных галактик $z \simeq 1.7$ масса равна $M_{\text{ВН}} = 7.2 \times 10^4 M_{\odot}$. Если индуцированное гало выживает до настоящего момента $z = 0$ оно имеет центральную ЧД с массой $M_{\text{ВН}} = 7.3 \times 10^4 M_{\odot}$. Таким образом, мы ожидаем, что главным фактором роста сверхмассивных ЧД в галактиках являются слияния центральных ЧД, принадлежащих различным индуцированным гало, а также - аккреция обычной барионной материи.

Рассмотрим теперь процессы слияния индуцированных протогалактик и ПЧД. В предшествующих вычислениях мы показали, что индуцированная галактика с массой $2.2 \times 10^8 M_{\odot}$ формируется вокруг скопления ПЧД к моменту $z = 15$, и затем они входят в состав больших галактик. Индуцированные галактики являются достаточно массивными для того, чтобы опуститься к центру галактики за хаббловское время под влиянием динамического трения. По мере того, как индуцированная галактика движется к центру галактики, может происходить обдирание ее внешних слоев приливными гравитационными силами со стороны гало галактики. Но ввиду большой плотности индуцированной галактики этот процесс неэффективен. Действительно, условием приливного обдирания частиц на расстоянии r_s от центра индуцированной галактики и на расстоянии r от центра главного большого гало является равенство силы притяжения со стороны индуцированной галактики и дифференциальной приливной силы со стороны гало:

$$r_s \frac{\partial}{\partial r} \frac{GM_H(r)}{r^2} = \frac{GM(r_s)}{r_s^2}, \quad (3.76)$$

где $M(r_s)$ и $M_H(r)$ - профили масс индуцированной галактики и гало большой галактики, соответственно. Профиль плотности гало Галактики имеет вид (3).

Используя профиль (3.71), из (3.76) получаем, что r_s больше радиуса индуцированной галактики 1.8 кпк для любого r . Таким образом, индуцированная галактика как целое может опускаться к центру галактики, что ведет к притоку дополнительной массы в центральную область гало.

Возможность опускания индуцированного гало к центру галактики зависит от начального радиуса его орбиты. Предположим, что орбита круговая.

Используя выражение для силы динамического трения [168], из уравнения для потери углового момента можно найти закон эволюции радиуса орбиты

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4\pi G^2 M_s(r) \rho_H(r) \Lambda B r}{v(r)^3}, \quad (3.77)$$

где $v(r) = (GM_H(r)/r)^{1/2}$, $\Lambda \approx 10$, $B \approx 0.427$. Как было показано ранее, приливное обдирание неэффективно, поэтому масса индуцированной галактики равна $M_s(r) = \text{const} = 2.2 \times 10^8 M_\odot$. Численное решение (3.77) показывает, что к центру Галактики успевают опуститься только индуцированные галактики внутри начального радиуса 26 кпк. Типичные эллиптические галактики сформировались намного раньше и имеют большие плотности. Поэтому все индуцированные гало в эллиптических галактиках опустились к галактическим центрам.

Согласно наблюдениям, массы центральных сверхмассивных ЧД в Sa, Sb и Sc галактиках в среднем меньше, чем в E и S0 галактиках. В нашей модели это связано с относительно поздним временем формирования Sa, Sb и Sc галактик, ввиду того, что значительная часть ПЧД не имела достаточно времени для приближения к галактическим центрам. В частности, $\sim 10^3$ ЧД с массами $\sim 10^5 M_\odot$, окруженные индуцированными гало, могут присутствовать в гало нашей Галактики. Некоторые из них, попавшие в область с достаточно высокой плотностью газа и аккрецирующие газ могут являться неидентифицированными рентгеновскими источниками.

Судьба ЧД внутри центрального парсека галактики остается неясной, мы предполагаем, что в течение хаббловского времени происходит слияние ЧД в одну сверхмассивную ЧД, поскольку плотность индуцированного гало $\rho \propto r^{-2.8}$ (см. Рис. 3.12, справа) сильно нарастает к центру и сглаживается лишь на малом расстоянии $R_c \simeq 0.036$ пк от центральной ЧД. Дополнительное динамическое трение возникает от взаимодействия со звездами. В результате, последняя стадия слияний ЧД может происходить очень быстро, а вероятность одновременного присутствия трех и более ЧД в центре галактики мала, что исключает рогаточный выброс. Напротив, галактика в целом может содержать значительное число массивных ЧД, которые изначально сформировались далеко от центра главного скопления [153, 179, 180].

Множественное слияние ПЧД в галактиках неизбежно сопровождается

всплесками гравитационных волн. Планируемый интерферометрический детектор LISA будет способен регистрировать подобные слияния. Простая оценка темпа слияний из наблюдаемой области Вселенной дает

$$\dot{N}_{grav} \sim \frac{4\pi N}{3} (ct_0)^3 n_g \sim 100 \left(\frac{n_g}{10^{-2} \text{Мпк}^{-3}} \right) \left(\frac{t_0}{10^{10} \text{лет}} \right)^2 \left(\frac{N}{10^3} \right) \text{лет}^{-1}, \quad (3.78)$$

где n_g - средняя концентрация структурированных галактик и N - среднее число слияний на одну галактику. Таким образом, имеется принципиальная возможность проверки рассматриваемой модели детектором LISA.

3.4.3. Всплески гравитационных волн от столкновений черных дыр в скоплениях

В данном разделе рассчитан темп всплесков гравитационных волн от слияний массивных ПЧД в скоплениях, и дана оценка ожидаемого темпа регистрации всплесков гравитационно-волновым детектором LISA [362].

В обозримой перспективе ожидается запуск космического лазерного интерферометра LISA (Laser Interferometer Space Antenna), предназначенного для регистрации гравитационных волн [364]. По сравнению с наземными детекторами, LISA будет способен регистрировать сигналы с малыми частотами $10^{-4} - 1$ Гц. Их источником могут быть слияния массивных ЧД в галактиках, т.к. многие из предложенных моделей формирования сверхмассивных ЧД включают в качестве необходимого этапа множественные слияния ЧД промежуточных масс [365], [366], [367]. Предложенные сценарии предсказывают различное распределение ЧД, поэтому будущие наблюдения с помощью LISA помогут сузить круг возможных моделей по характерным особенностям в распределении гравитационных всплесков.

В качестве начальных данных используем распределения ЧД промежуточных масс из работы [368]. Дифференциальная концентрация ЧД в скоплении может быть представлена в виде:

$$\frac{dn}{dM} = 1.6 \times 10^3 \left(\frac{r}{1 \text{ пк}} \right)^{-3} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-2} M_\odot^{-1} \text{пк}^{-3}. \quad (3.79)$$

Полная масса ТМ больше суммарной массы первичных ЧД на расстояниях от

центра скопления, больших, чем $r \simeq 1.6$ пк. Рассматриваем лишь центральную область, где ЧД преобладают по массе по сравнению с ТМ.

Динамическая релаксация ведет к тому, что ЧД промежуточных масс, окружающие самую массивную центральную ЧД, попадают в конус потерь и сливаются с центральной ЧД. Промежуточным этапом слияния является образование короткоживущих тесных пар ЧД. Сечение гравитационного захвата двух ЧД с массами M_0 и M в тесную пару [369]:

$$\sigma_{\text{mer}} = 2\pi \left(\frac{85\pi}{6\sqrt{2}} \right)^{2/7} \frac{G^2 (M_0 + M)^{10/7} M_0^{2/7} M^{2/7}}{c^{10/7} v_{\text{rel}}^{18/7}}, \quad (3.80)$$

где v_{rel} — относительная скорость ЧД.

Исследуем основные характеристики столкновений ЧД некоторой массы M с покоящейся центральной ЧД, имеющей массу $M_0 > M$ в рассматриваемом скоплении. Дифференциальный темп слияний ЧД

$$d\dot{N} = \sigma_{\text{mer}} v_{\text{rel}} dn, \quad (3.81)$$

где концентрация dn ЧД с массами в интервале $M \div M + dM$ зависит от расстояния до центра скопления и от времени. Время парной релаксации для ЧД с массой M в многокомпонентной системе дается выражением (2.54), в котором теперь где ρ — суммарная плотность ЧД всех масс, а $\Lambda_c \simeq 15$. Прорелаксировавшая сферическая подсистема ЧД существует в скоплении в течение времени $\sim 40t_{\text{rel}}$ вплоть до своего динамического испарения. Часть ЧД при этом сливается с центральной самой массивной ЧД. С течением времени релаксируют подсистемы все большего и большего масштаба, имеющие меньшую плотность. Концентрация ЧД в центральной области падает, и темп слияний постепенно уменьшается. Для каждого момента t сначала находим размер полностью прорелаксировавшей области скопления, где $t \simeq 40t_{\text{rel}}$. В качестве концентрации dn в формуле (3.81) мы используем среднюю концентрацию ЧД в прорелаксировавшей области (усредняется начальная концентрация (3.79)), и для оценки предполагаем, что плотность однородна. Расчет ведем с логарифмической точностью и пренебрегаем сегрегацией масс (она приведет к увеличению темпа слияний). В этом приближении темп слияний ЧД в одном скоплении:

$$\frac{d\dot{N}(z)}{dM} \simeq 5.1 \times 10^{-7} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-67/21} (t(z)/t_0)^{-31/21} M_{\odot}^{-1} \text{ год}^{-1}, \quad (3.82)$$

где $t(z)$ — зависимость космологического времени от красного смещения, вычисляемая по известным формулам, а t_0 — современный момент.

Найдем отношение сигнал-шум ρ_{SN} для регистрации детектором LISA на основе методики оптимальной фильтрации [370]. Наш подход аналогичен [371], но дополнительно мы учитываем космологические поправки, поскольку красное смещение может быть много больше единицы. Отношение сигнал-шум в зависимости от массы ЧД и красного смещения, на котором находится скопление, равно

$$\rho_{\text{SN}}(z, M)^2 = 4 \int_{f_i}^{f_f} \frac{|\tilde{h}(f)|^2 df}{S_h(f)}, \quad (3.83)$$

где f_i и f_f — соответственно минимальная и максимальная частоты наблюдаемого гравитационного излучения, $\tilde{h}(f)$ — спектр наблюдаемого сигнала, а $S_h(f)$ — спектр шумов детектора.

Обозначим сумму масс сливающихся ЧД $\tilde{M} = M_0 + M$. Орбита пары ЧД сжимается, а частота обращения растет. Минимальная частота гравитационного сигнала соответствует начальному моменту наблюдений, а максимальная частота равна удвоенной частоте обращения по внутренней устойчивой орбите $f_f = f_m/(1+z)$, где [371]

$$f_m \simeq \frac{c^3}{6^{3/2}\pi G \tilde{M}}. \quad (3.84)$$

Например, для $\tilde{M} = 10^5 M_\odot$ численное значение $f_m = 0.04$ Гц. За время наблюдения $T = 1$ год (и, соответственно, за собственное время источника $T/(1+z)$) частота обращения по орбите и частота гравитационного излучения должна возрасти от начального значения (см. [371] без множителя $1+z$)

$$f_i = f_f \left(1 + \frac{256\pi^{8/3} G^{5/3} M_0 M}{5 c^5 \tilde{M}^{1/3}} f_m^{8/3} \frac{T}{1+z} \right)^{-3/8}. \quad (3.85)$$

Спектр наблюдаемых гравитационных волн хорошо аппроксимируется степенной функцией $\tilde{h}(f) = Af^{-7/6}$ при $f < f_f$ и $\tilde{h}(f) = 0$ при $f > f_f$ [371], где

$$A = \frac{1}{\sqrt{30}\pi^{2/3}} \frac{G^{5/6} (M_0 M)^{1/2} (1+z)^{1/3}}{d_L c^{3/2} \tilde{M}^{1/6}}. \quad (3.86)$$

Здесь d_L — фотометрическое расстояние (luminosity distance). Будем использо-

вать фитирующую функцию для спектра шумов из работы [372]:

$$S_h(f) = 6.12 \cdot 10^{-51} / f^4 + 1.06 \cdot 10^{-40} + 6.12 \cdot 10^{-37} f^2 \Gamma_{\text{ц}}^{-1}. \quad (3.87)$$

Наблюдаемый темп всплесков, регистрируемых с красных смещений $< z$:

$$d\dot{N}_{\text{GB}}(z) = \int_0^z dz (dl_c/dz) 4\pi l_c^2 n_{cl} d\dot{N}(z) (1+z)^{-1} \theta(\rho_{\text{SN}}(z, M) - 5), \quad (3.88)$$

где n_{cl} — концентрация скоплений, θ — функция Хевисайда и, как это обычно принимается для детектора LISA, мы выбрали в качестве порога достоверного детектирования $\rho_{\text{SN}}(z, M) = 5$. Для каждой конкретной массы M порог детектирования неявно определяет максимальное красное смещение z , с которого может быть принят сигнал. Величина $d\dot{N}(z)$ в формуле (3.88) соответствует некоторому малому интервалу масс dM , а окончательные результаты мы представим для величин $\dot{N}_{\text{GB}}(z)$, проинтегрированных по конечным промежуткам масс. Космологическое расстояние в сопутствующих координатах и расстояние, определяемое светимостью,

$$l_c(z) = \int_0^z c dz / H(z), \quad d_L(z) = (1+z)l_c(z), \quad (3.89)$$

где $H(z) = \dot{a}/a$ — постоянная Хаббла.

Концентрацию скоплений n_{cl} в единице сопутствующего объема оценим следующим образом. Предположим, что скопления ЧД к настоящему моменту осели к центру галактик и их центральные ЧД слились в сверхмассивные ЧД с массами $\sim 10^8 M_{\odot}$, тогда получим, что в каждой структурированной галактике изначально было около $N_{cl} \sim 500$ скоплений. Поскольку концентрация структурированных галактик, содержащих сверхмассивные ЧД, порядка $n_g \sim 0.01 \text{ Мпк}^{-3}$, то концентрация скоплений $n_{cl} \sim 500 \times 0.01 = 5 \text{ Мпк}^{-3}$.

На Рис. 3.13 приведено полученное нами распределение гравитационных всплесков по красным смещениям z в сравнении с результатами работы [373], в которой рассматриваются слияния ЧД промежуточных масс, образовавшихся по обычному астрофизическому сценарию (см. Рис. 3 из [373]). Как видно из рисунка, в нашей модели высокий темп слияний ЧД нижнего диапазона масс,

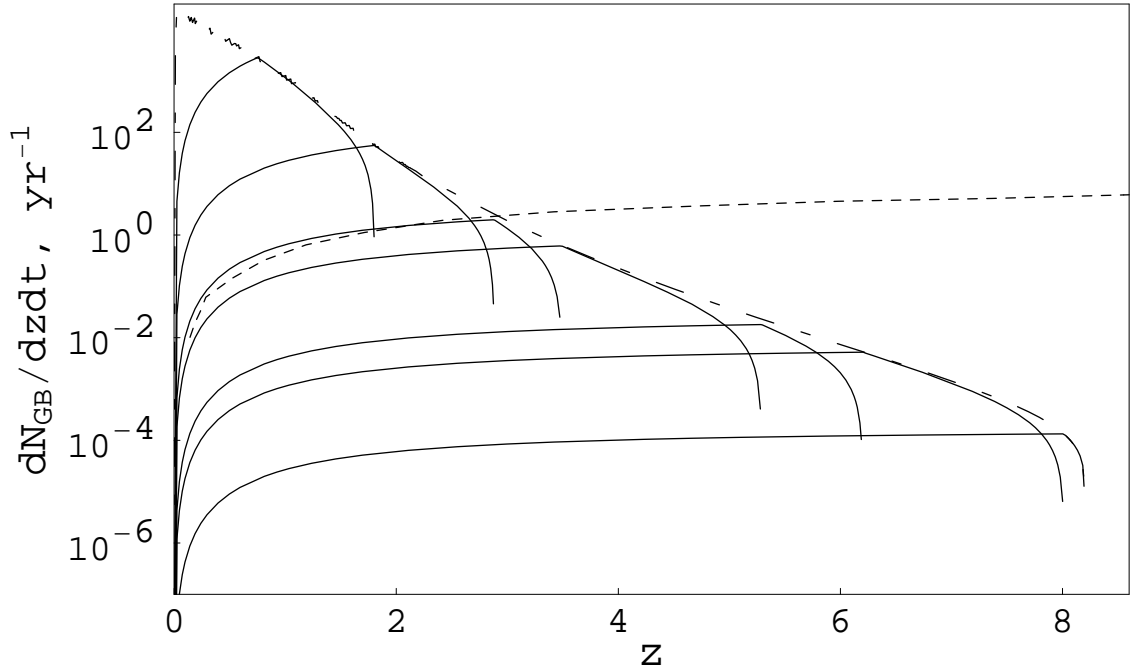


Рис. 3.13. Рассчитанное распределение гравитационных всплесков в зависимости от красного смещения z , на котором находятся источники сигнала - скопления ПЧД. Сплошные кривые соответствуют суммарным темпам слияний для ПЧД из интервалов масс $M = 10^2 - 5 \times 10^2 M_\odot$, $5 \times 10^2 - 10^3 M_\odot$, $10^3 - 5 \times 10^3 M_\odot$, $5 \times 10^3 - 10^4 M_\odot$, $10^4 - 5 \times 10^4 M_\odot$ и $5 \times 10^4 - 10^5 M_\odot$ (сверху вниз). Величина z на правых границах кривых равна максимальному красному смещению, с которого возможна регистрация детектором LISA. Огибающая штрих-пунктирная кривая — суммарный темп всплесков от слияний ЧД с массами в интервале $10^{-1} - 10^5 M_\odot$. Для сравнения штрихованной линией показан результат расчетов из работы [373] для слияний ЧД, образовавшихся при коллапсах газовых облаков.

что связано с их многочисленностью. При наблюдениях в течение одного года вероятна регистрация нескольких событий слияния ЧД с массами в интервале $10^2 - 10^3 M_\odot$ с центральными ЧД скоплений. Изломы на графике обусловлены наличием θ -функции в (3.88). Эти изломы соответствуют максимальным красным смещениям, с которых видны слияния ЧД минимальных масс из каждого указанного диапазона.

Отметим существенное различие, очевидное из Рис. 3.13, в форме распределения всплесков в нашем сценарии и распределения, приведенного на Рис. 3 в работе [373]. Согласно [373], ЧД образуются при диссипативном коллапсе центральных областей газовых облаков, затем происходит слияние протогалактик, оседание ЧД к новому динамическому центру и их слияние. В этой модели темп

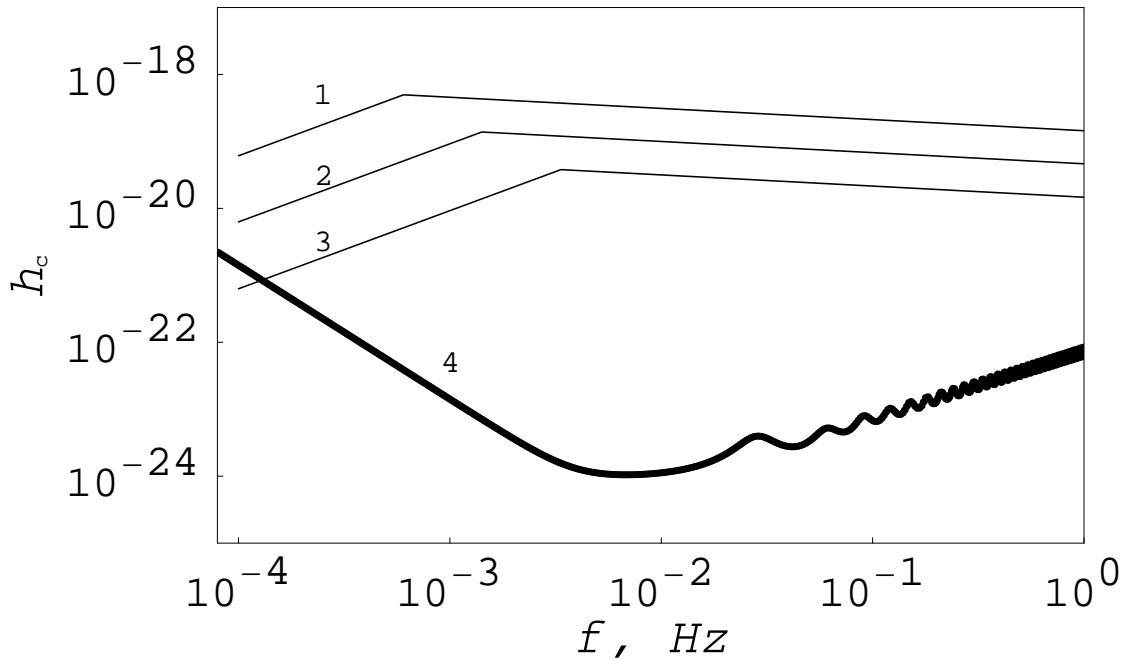


Рис. 3.14. Наблюдаемая безразмерная амплитуда гравитационной волны в зависимости от частоты при слиянии ЧД в скоплении с центральной ЧД, имеющей массу $M_0 = 10^5 M_\odot$ на красном смещении $z = 1$. Линии 1–3 соответствуют массам второй сливающейся ЧД $M_1 = 10^4 M_\odot$, $10^3 M_\odot$ и $10^2 M_\odot$. Линия 4 - кривая чувствительности детектора LISA по данным Online Curve Generator сайта <http://www.srl.caltech.edu/>.

слияний ЧД растет со временем, по крайней мере на первой стадии. В нашей модели темп слияния ЧД убывает со временем. Это различие при наблюдениях с помощью LISA может помочь в выборе между различными сценариями происхождения ЧД.

Для интерпретации Рис. 3.13 полезно также привести наблюдаемую безразмерную амплитуду гравитационной волны h_c в зависимости от наблюдаемой частоты f . Согласно [373], $h_c = h\sqrt{n}$ при $n < fT$ и $h_c = h\sqrt{fT}$ при $n > fT$, где величины h , n зависят от f , расстояния $l_c(z)$ и масс сливающихся ЧД. Соответствующие выражения приведены в [373] (формулы (2)–(7)). На Рис. 3.14 представлены кривые для $z = 1$, а перерасчет для других z легко сделать, учитывая, что $h_c \propto l_c^{-1}(z)$.

Мы рассчитали темп слияний ЧД с центральной, самой массивной ЧД скопления. Покажем теперь, что вклад от этих слияний является преобладающим по сравнению со слияниями ЧД меньших масс $M_1 < M_0$ и $M_2 < M_0$ друг

с другом. Действительно, темп слияний в элементе объема dV :

$$\frac{d\dot{N}}{dM_1 dM_2} = \sigma_{\text{mer}} v_{\text{rel}} \frac{dn_1}{dM_1} \frac{dn_2}{dM_2} dV. \quad (3.90)$$

Используя распределение (3.79) и интегрируя выражение (3.90) по объему скопления и массам ЧД, получим

$$\iiint 4\pi r^2 dr dM_1 dM_2 \frac{d\dot{N}}{dM_1 dM_2} \propto r_{\text{min}}^{-3} \left(\frac{M_{1,\text{max}}}{M_{2,\text{min}}} \right)^{5/7}, \quad (3.91)$$

где r_{min} — радиус влияния центральной ЧД, а $M_{2,\text{min}}$ и $M_{1,\text{max}} = M_0$ — минимальная и максимальная ЧД из функции распределения. Для типичного случая $M_2 \ll M_1$ темп слияний небольших ЧД меньше темпа слияний с центральной ЧД и стремится к нему в предельном случае $M_{1,\text{max}} \rightarrow M_0$. Таким образом, наибольший вклад в излучение гравитационных волн дают слияния относительно маломассивных ЧД (граница по массам определяется условием $\rho_{\text{SN}}(z, M) > 5$) с центральной ЧД вблизи от центра скопления $r \simeq r_{\text{min}}$, а темп подобных слияний был рассчитан выше.

3.5. Темная материя вокруг сверхмассивной черной дыры в центре Галактики

Не исключено, что сверхмассивная ЧД в центре Галактики может иметь догалактическое происхождение — она могла возникнуть при слиянии ПЧД меньших масс. Профиль плотности ТМ вокруг этой ЧД зависит от истории ее образования. Поэтому изучение распределение массы ТМ вокруг ближайшей к нам сверхмассивной ЧД может в будущем дать ценную информацию об истории образования ЧД и процессах в ранней Вселенной.

В данном разделе обсуждается метод измерения полной массы ТМ вблизи сверхмассивной ЧД в центре Галактики на основе наблюдений нерелятивистской прецессии орбит S0 звезд совместно с ограничениями на аннигиляционный сигнал от частиц ТМ [374]. Современные телескопы уже в ближайшие несколько лет смогут измерить или получить ограничение на прецессию орбит S0 звезд.

В последние годы произошел значительный прогресс в наблюдениях звезд, гравитационно связанных со сверхмассивной ЧД SgrA* в центре Галактики. В

ИК-диапазоне видны несколько так называемых S0 звезд [375–378], движущихся с большими скоростями ($> 10^3$ км/сек) по близким к эллиптическим орбитам. Из величин измеренных параметров кеплеровских орбит S0 звезд следует, что масса сверхмассивной ЧД SgrA* равна $M_{\text{ВН}} = (4.1 \pm 0.4) \times 10^6 M_{\odot}$ [375–378]. Независимые значения массы $M_{\text{ВН}}$ и параметра Керра a определяются по квазипериодическим осцилляциям с частотами 11.5 и 19 мин [379, 380] и равны, соответственно, $M_{\text{ВН}} = (4.2 \pm 0.2) \times 10^6 M_{\odot}$ и $a = 0.65 \pm 0.05$ [381].

В центре Галактики помимо сверхмассивной ЧД SgrA* существуют дополнительные невидимые источники массы такие, как компактные облака газа, тусклые звезды и их остатки, а также распределенная масса ТМ. Дополнительная масса будет приводить к отклонению полного ньютоновского гравитационного потенциала от потенциала точечной массы $U = -GM_{\text{ВН}}/r$. В результате, гравитационно связанные с ЧД орбиты S0 звезд не будут замкнуты, а будут прецессировать [349]. В течение ближайшего года или двух незамкнутость орбиты для звезды S0-2 будет измерена, и, тем самым, будет определена полная масса ТМ в пределах орбиты этой звезды размером 0.005 пк. Рассматриваемая нерелятивистская прецессия в зависимости от количества ТМ может значительно превышать релятивистскую прецессию.

Существование быстрых S0 звезд дает возможность реконструкции гравитационного потенциала и измерения распределение массы в центре Галактики методом фитирования их орбит. В [375–377] было проведено многопараметрическое фитирование орбит нескольких S0 звезд, а также выполнено вычисление дополнительной распределенной массы в зависимости от показателя степени профиля плотности, и показано, что распределенная масса в пределах орбиты S0-2 не превышает 3–4 % от массы сверхмассивной ЧД. Ожидаемое измерение прецессии орбиты звезды S0-2 позволит улучшить этот предел на распределенную ТМ на 2–3 порядка, либо уже определит величину этой темной массы.

Численные расчеты угла прецессии орбит S0 звезд за счет протяженного распределения массы уже делались для ряда частных случаев [382–387]. Далее мы выведем общие аналитические формулы для прецессии орбит звезд на примере степенного профиля ТМ, которые позволяют по измеренному углу прецессии легко найти величину дополнительной распределенной массы.

Независимым дополнительным методом определения распределения ТМ является поиск возможного аннигиляционного сигнала от центра Галактики. Объяснение наблюдавшегося телескопом HESS превышения гамма-сигнала с энергией ~ 1 ТэВ от центра Галактики аннигиляцией частиц ТМ с учетом ограничений по динамике звезд исследовано в [388]. Возможность ограничений на аннигиляцию из динамики звезд или прецессии обсуждалась также в [384]. Мы вычисляем необходимую массу ТМ для объяснения избытка гамма-излучения от центра Галактики, отмеченного недавно в наблюдениях космического гамма-телескопа Fermi-LAT [389, 390].

3.5.1. Прецессия звезд

При наличии малой поправки δU к ньютоновскому потенциалу ЧД угол прецессии орбиты пробной частицы (звезды S0-2) за время одного оборота равен (см. [349], §15, задача 3):

$$\delta\phi = \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{2m}{L} \int_0^\pi r^2(\phi) \delta U d\phi \right). \quad (3.92)$$

При интегрировании в этом выражении в качестве траектории частицы взята невозмущенная эллиптическая орбита $r(\phi) = p(1 + e \cos \phi)^{-1}$, где e — эксцентриситет, $p = L^2/(GM_{\text{ВН}}m) = a(1 - e^2)$ — параметр орбиты, a — большая полуось, L — угловой момент звезды с массой m . Орбита звезды S0-2 имеет следующие наблюдаемые параметры: $e = 0.898 \pm 0.0034$, радиус перицентра $r_p = a(1 - e) = 0.585$ мпк, радиус апоцентра $r_a = a(1 + e) = 9.42$ мпк. Отметим, что в случае релятивистской прецессии орбита вращалась бы в направлении вращения звезды, но ньютоновская прецессия (3.92) происходит в обратном направлении, т.к. $\delta\phi < 0$.

Рассмотрим степенной профиль плотности вещества, создающего поправку δU ,

$$\rho(r) = \rho_h \left(\frac{r}{r_h} \right)^{-\beta}, \quad (3.93)$$

где ρ_h , r_h и β — параметры. Соответствующая полная масса ТМ внутри сферы

радиуса r равна

$$M_{\text{DM}}(r) = \frac{4\pi\rho_h r_h^\beta}{3-\beta} \left[r^{3-\beta} - R_{\text{min}}^{3-\beta} \right], \quad (3.94)$$

где R_{min} — минимальный радиус, до которого тянется профиль плотности (3.93). Далее будем считать, что $R_{\text{min}} < r_p$ и $\beta < 3$, т.е. что основная масса ТМ в пределах орбиты сосредоточена около апоцентра $r = r_a$. Определим массовую долю ТМ внутри орбиты S0 звезды $\xi = [M_{\text{DM}}(r_a) - M_{\text{DM}}(r_p)]/M_{\text{ВН}}$.

Поправка к потенциалу в случае степенного профиля (3.93) равна

$$\delta U = \begin{cases} Ar^{2-\beta} + \frac{C_1}{r} + C, & \text{если } \beta \neq 2, \\ 4\pi G\rho_h r_h^2 m \ln r + \frac{C_2}{r} + C, & \text{если } \beta = 2, \end{cases} \quad (3.95)$$

где $A = 4\pi G\rho_h r_h^\beta m / [(3-\beta)(2-\beta)]$. В этом выражении член с константой C дает нулевой вклад в угол прецессии $\delta\phi$, а член $\propto 1/r$ приводит только к небольшой добавке к центральной массе и тоже не дает вклада в угол прецессии.

Результат вычисления с помощью (3.92) и (3.95) дает величину угла прецессии орбиты звезды за время одного оборота вокруг ЧД, выражаемую через гипергеометрические функции $F(a, b, c, z)$:

$$\delta\phi = B \left\{ [(3-\beta)e - (4-\beta)] F\left(4-\beta, \frac{1}{2}, 1, -\frac{2e}{1-e}\right) + \frac{(4-\beta)(1+e)}{(1-e)} F\left(5-\beta, \frac{3}{2}, 2, -\frac{2e}{1-e}\right) \right\}. \quad (3.96)$$

В этой формуле

$$B = \frac{8\pi^2\rho_h r_h^\beta p^{3-\beta}}{(2-\beta)(3-\beta)e(1-e)^{4-\beta}M_{\text{ВН}}}. \quad (3.97)$$

Гипергеометрическая функция определена следующим образом

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt \quad (3.98)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Для проверки этого результата мы также вычислили угол прецессии $\delta\phi$ с помощью стандартной теории возмущений с использованием метода соприкасающихся (оскулирующих) элементов [391] и получили ответ

$$\delta\phi = -\frac{4\pi^2\rho_h r_h^\beta p^{3-\beta}}{(1-e)^{4-\beta}M_{\text{ВН}}} {}_2F_1\left(4-\beta, \frac{3}{2}; 3; -\frac{2e}{1-e}\right), \quad (3.99)$$

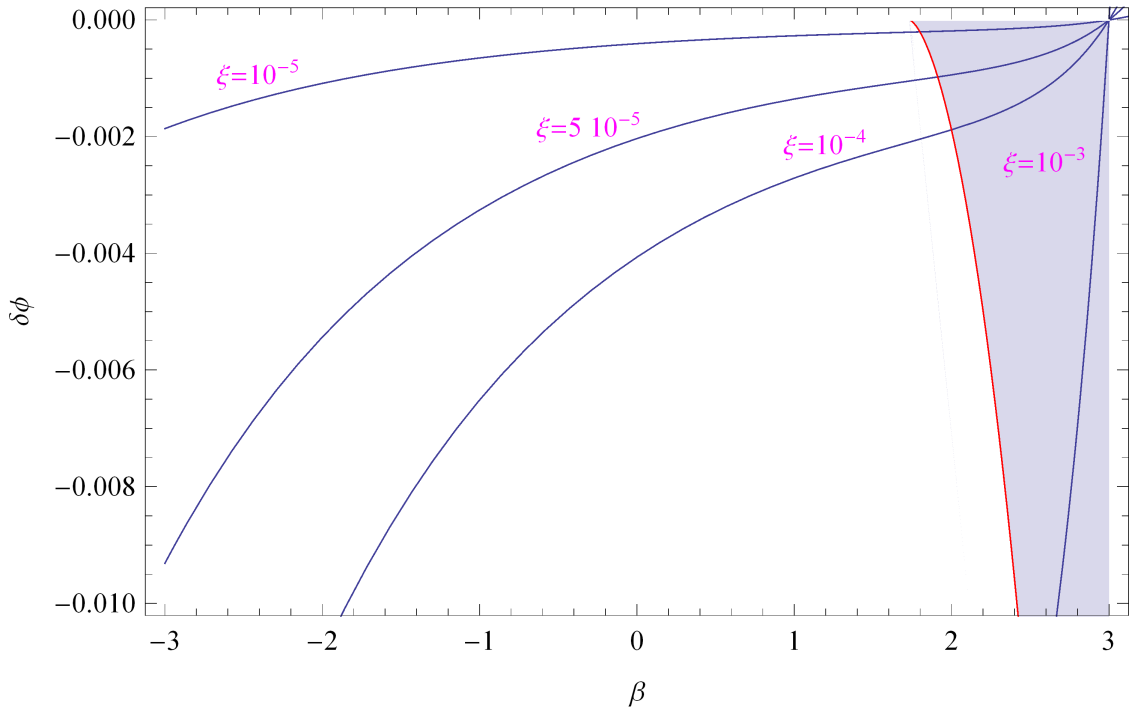


Рис. 3.15. Величина угла сдвига апериды орбиты звезды за время одного оборота $\delta\phi$ из (3.92) в зависимости от показателя степени спектра β в (3.93) для различных значений массовой доли ТМ ξ внутри орбиты звезды S0-2. Заштрихована область, исключаемая ограничениями по аннигиляции частиц ТМ, если ТМ дает основной вклад в ξ .

совпадающий с (3.96) после преобразований, использующих рекуррентные свойства гипергеометрических функций. Угол прецессии $\delta\phi$ в (3.99) отрицательный при всех допустимых значениях параметров.

Величина угла нерелятивистской прецессии, определяемая формулой (3.99), качественно согласуется с результатами численных расчетов прецессии [382–387]. Выражение для угла прецессии (3.99) при малых значениях эксцентриситета орбиты, $e \ll 1$, совпадает с точностью до e^2 с соответствующей величиной, посчитанной аналитически, но другим методом в [392]. Отметим, однако, что при больших значениях эксцентриситета, $e \simeq 1$, вычисленное в [392] направление прецессии меняет знак на положительный и расходится в пределе $e \rightarrow 1$. Возможно, что используемый в [392] формализм применим только при $e \ll 1$, поскольку угол ньютоновской прецессии $\delta\phi$ должен всегда быть отрицательным.

Отметим, что функция $\delta\phi$ в (3.99) непрерывна при $\beta = 2$ (см. Рис. 3.15). С помощью полученного выражения выполним расчеты для различных профилей

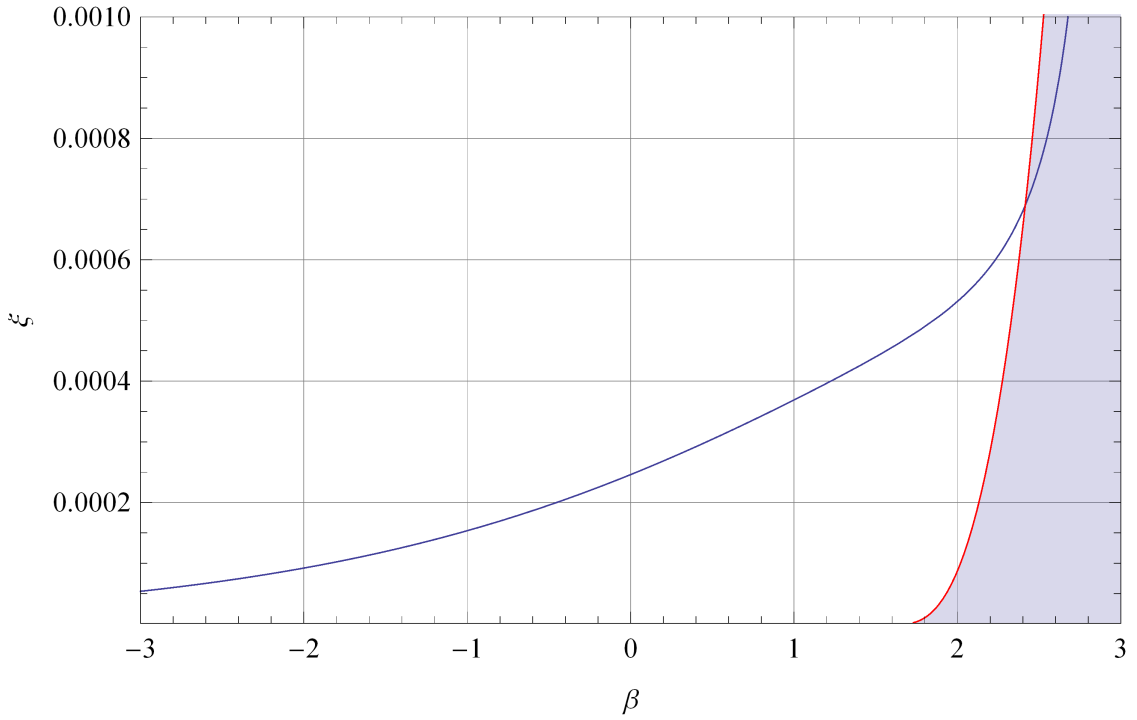


Рис. 3.16. Массовая доля ТМ ξ в зависимости от показателя степени β в профиле плотности (3.93) при величине угла прецессии $\delta\phi = 0.01$. Заштрихована область, исключаемая ограничениями по аннигиляции частиц ТМ.

плотности ТМ. Вычислим функцию $\delta\phi(\beta, \xi)$ в (3.99) и найдем линию уровня $\delta\phi(\beta, \xi) = \delta\phi_{\text{obs}}$ с максимальным допуском данными наблюдений значением $\delta\phi_{\text{obs}} \sim 0.01$ (см. Рис. 3.16). Значения β, ξ на этой линии дают параметры, при которых можно объяснить данные наблюдений.

3.5.2. Аннигиляция темной материи

При фитировании наблюдаемого Fermi-LAT избытка гамма-излучения из области размером до 10° от центра Галактики обычно применяется (см. [389, 390]) обобщенный профиль Наварро-Френка-Уайта:

$$\rho_{\text{H}}(r) = \frac{\rho_0}{(r/d)^\gamma (1 + r/d)^{3-\gamma}}, \quad (3.100)$$

где $d = 20$ кпк, $\rho_{\text{H}}(8.5 \text{ кпк}) = 0.3 \text{ ГэВ см}^{-3}$, и наилучшее согласие с наблюдениями Fermi-LAT получается при $\gamma \approx 1.26$. Вблизи центра Галактики при $r \ll d$ этот профиль близок к степенному профилю

$$\rho_{\text{H}}(r) = \rho_0 \left(\frac{d}{r}\right)^\gamma. \quad (3.101)$$

Центральную область пика плотности ТМ, в которой она распределена по закону (3.101), называют “каспом” (“cusp”). Если данный профиль напрямую экстраполировать к центру Галактики, то масса ТМ в пределах орбиты звезды S2 оказывается равной

$$M_{\text{DM}} = M(r_a) - M(R_c) = \frac{4\pi\rho_0 d^\beta (r_a^{3-\gamma} - R_c^{3-\gamma})}{3-\gamma} \simeq 2.8M_\odot, \quad (3.102)$$

где $R_c = \max\{r_p, r_{\text{ann}}\}$, r_{ann} — возможная внутренняя граница распределения ТМ, связанная с ее аннигиляцией (см. далее). Численно (3.102) много меньше величины, доступной ограничению по динамике звезд. Однако, при наличии центральной ЧД указанная экстраполяция неверна, поскольку профиль плотности должен существенно модифицироваться гравитацией ЧД.

В ряде работ обсуждалось формирование вокруг центральной ЧД дополнительного пика плотности (“spike”) с профилем плотности $\propto r^{-\beta}$. Если пик формировался адиабатически, т.е. постепенно по мере роста массы ЧД, то плотность в пике может значительно превышать плотность в каспе. В [390] показано, что для адиабатически сформировавшегося пика $\beta = 2.36$, и этот пик при $\langle\sigma v\rangle = \text{const}$ будет очень ярким точечным источником в центре Галактики, см. также [114]. Рассчитанный в [390] аннигиляционный сигнал от такого пика в ~ 35 раз превышает сигнал от протяженной области с избытком гамма-излучения. Поскольку столь ярких источников в центре Галактики нет, то адиабатический пик противоречит наблюдениям. В [390] указано, что пик мог формироваться не адиабатически или разрушаться, в этом случае $\beta < 2.36$, и противоречие можно устранить.

Следуя [390], запишем плотность ТМ в пике в виде (3.93), где радиус $r_h = GM_{\text{ВН}}/v_c^2 \sim 1.7$ пк — радиус влияния ЧД, $v_c = 105 \pm 20$ км с⁻¹ — наблюдаемая величина дисперсии скоростей в центре Галактики на расстоянии ~ 1 пк от центра, а плотность ρ_h находится из сшивки (3.93) с плотностью (3.100) на радиусе r_h .

Минимальный радиус r_{ann} определяется эффектом аннигиляции частиц за время существования пика, см. [390]. Эта величина зависит от параметров частиц и распределения плотности. Согласно расчетам [390] наилучшее фитирование гамма-спектра достигается при $m = 35$ ГэВ и $\langle\sigma v\rangle = 1.7 \times 10^{-26}$ см²с⁻¹, а

$r_{\text{ann}} \sim \tilde{r}_{\text{ann}} \equiv 3 \times 10^{-3}$ пк. В [390] показано, что противоречия с ярким точечным источником не будет, если $\beta = \gamma_s \equiv 1.8$. Тогда масса ТМ внутри орбиты звезды S0-2 равна $M_{\text{DM}} \simeq 45M_{\odot}$, и заметные динамические эффекты (прецессия орбит звезд и проч.) при столь малой массе отсутствуют.

Выше предполагалось, что $\langle \sigma v \rangle = \text{const}$, однако в ряде моделей ТМ величина $\langle \sigma v \rangle$ может зависеть от v . При приближении к ЧД скорости v частиц возрастают, и если $\langle \sigma v \rangle$ зависит от v , то это может дать существенный эффект для аннигиляции. Благодаря большим кеплеровским скоростям вблизи ЧД можно уменьшить аннигиляционный сигнал из центра, сохранив при этом протяженный сигнал из области $\sim 10^\circ$. Например, зависимость $\langle \sigma v \rangle$ от v имеет место в тех моделях, где действует эффект усиления Зоммерфельда [285–287]. Коэффициент усиления \mathcal{R} за счет эффекта Зоммерфельда определяется посредством соотношения $\langle \sigma v \rangle = \mathcal{R} \langle \sigma v \rangle_0$, где

$$\mathcal{R} = \frac{\pi\mu}{b} (1 - e^{-\pi\mu/b})^{-1}. \quad (3.103)$$

Здесь $\mu = \text{const}$, $b = v/c$. Рассмотрим случай, когда сечение в соответствующей области параметров можно аппроксимировать степенной зависимостью:

$$\langle \sigma v \rangle = \langle \sigma v \rangle_0 \left(\frac{v_0}{v} \right)^\eta, \quad (3.104)$$

где $\langle \sigma v \rangle_0 = \text{const}$, $v_0 = \text{const}$. Степенная зависимость вида (3.104) рассматривалась в [66] для расчета аннигиляции ТМ в самогравитирующих СТМ. Модель с $\langle \sigma v \rangle = \text{const}$ и модель с усилением Зоммерфельда при $\pi\mu/b \ll 1$ соответствуют частным случаям $\eta = 0$ и $\eta = 1$, соответственно.

Радиус r_{ann} , на котором достигается максимальная плотность ρ ТМ, ограничиваемая эффектом аннигиляции, находится из условия

$$n \langle \sigma v \rangle t_g \sim 1, \quad (3.105)$$

где $n = \rho/m$, $t_g \sim 10^{10}$ лет — возраст пика плотности вокруг ЧД. Для сечения (3.104) получаем

$$r_{\text{ann}} = r_h \lambda^{\frac{1}{\beta-\eta/2}}, \quad (3.106)$$

где $\lambda \equiv \rho_h \langle \sigma v \rangle_0 t_g / m$.

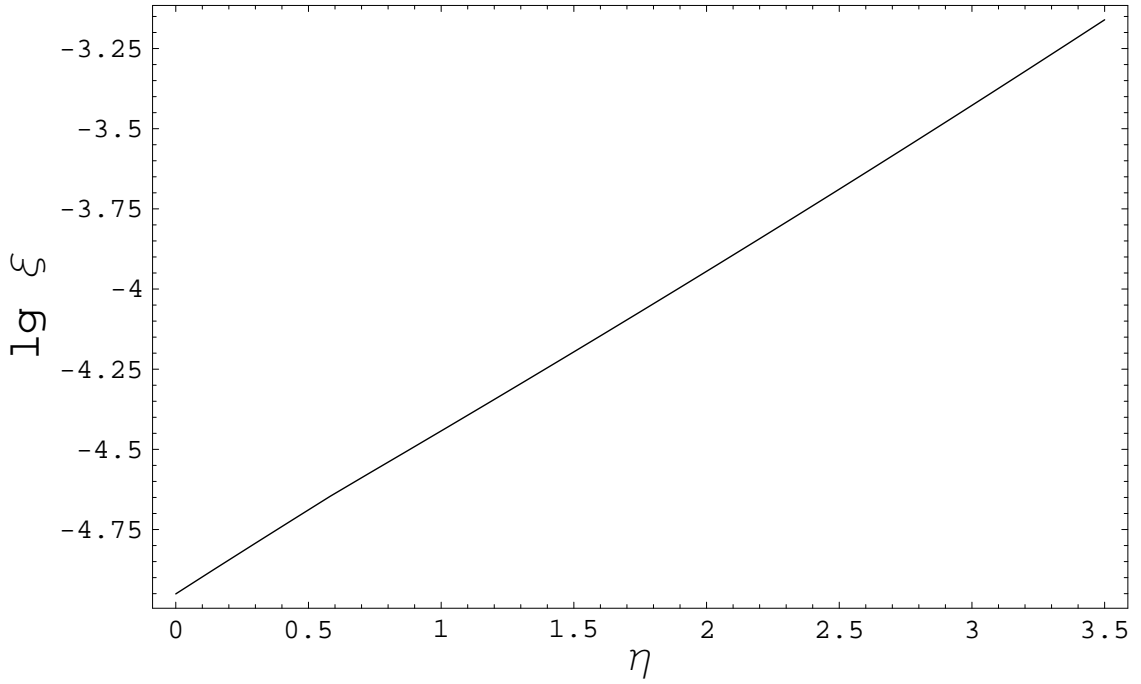


Рис. 3.17. Массовая доля ТМ ξ , требуемая наблюдаемым избытком гамма-излучения при аннигиляции частиц ТМ с сечением $\langle\sigma v\rangle \propto v^{-\eta}$, в зависимости от η .

Скорости частиц вблизи ЧД $v(r) \approx (GM_{\text{ВН}}/r)^{1/2}$ при $r < r_h$. Предположим, что $3 - 2\beta + \eta/2 < 0$. Для рассматриваемых ниже значений параметров это условие выполняется. Тогда темп аннигиляции ТМ в пределах радиусов от r_1 до r_2 при условии $r_1 \ll r_2$ можно записать в виде

$$\dot{N} = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr \rho^2(r) m^{-2} \langle\sigma_{\text{анн}} v\rangle = \frac{4\pi \rho_h^2 r_h^{2\beta} \langle\sigma v\rangle_0 v_0^\eta r_1^{3-2\beta+\eta/2}}{m^2 (GM_{\text{ВН}})^{\eta/2} (2\beta - 3 - \eta/2)}. \quad (3.107)$$

В [390], где использовалось $\langle\sigma v\rangle = \text{const}$, найдены параметры степенных профилей каспа и пика, при которых нет противоречия с ярким точечным источником в центре. Мы будем полагать, что в модели (3.104) интегральные аннигиляционные сигналы из каспа и пика такие же, как в [390]. Это позволит сделать простой расчет без необходимости детального фитирования наблюдаемого избытка гамма-излучения. Основной сигнал в каспе генерируется при $r \sim r_h$, где $v \sim v_c$. Отсюда, фиксируя параметр $v_0 \equiv v_c$, получаем, что $\langle\sigma v\rangle_0 = 1.7 \times 10^{-26} \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$, как в [390]. Профиль плотности в пике в нашем случае отличается от использовавшегося в [390] из-за зависимости $v(r)$. Найдем профиль плотности в пике при $\langle\sigma v\rangle \propto v^{-\eta}$ с учетом сделанных выше предположений. Приравнявая темп

аннигиляции в пике (3.107) при $\beta = \gamma_s = 1.8$, $\langle \sigma v \rangle = \langle \sigma v \rangle_0$ и соответствующий темп (3.107) при произвольном β и $\langle \sigma v \rangle = \langle \sigma v \rangle_0 v_0^\eta / v^\eta$, получаем нелинейное уравнение

$$\frac{x}{x+3-\beta} \ln \lambda + \ln(\varkappa x) = 0, \quad (3.108)$$

где

$$\beta = \frac{3}{2} + \frac{\eta}{4} + \frac{x}{2}, \quad \varkappa = \frac{1}{2\gamma_s - 3} \left(\frac{r_h}{\tilde{r}_{\text{ann}}} \right)^{2\beta_s - 3}, \quad (3.109)$$

а λ определяется формулой (3.106). Решаем уравнение (3.108) относительно x численно и затем по формуле (3.102) находим массу ТМ. Результаты расчетов приведены на Рис. 3.17. Равенство $r_{\text{ann}} = r_p$ достигается при $\eta = 0.6$, и при рассматриваемых условиях всегда $r_{\text{ann}} < r_a$. Т.е., в формуле (3.102) $R_c = r_p$ при $\eta < 0.6$ и $R_c = r_{\text{ann}}$ при $\eta > 0.6$. Адиабатический профиль плотности $\beta = 2.36$ достигается при $\eta = 3.13$.

Для примера, масса ТМ M_{DM} внутри орбиты звезды S0-2 в частных случаях $\eta = 0, 1, 3.13$ и 3.5 равна, соответственно, $45M_\odot$, $144M_\odot$, $1.8 \times 10^3 M_\odot$ и $2.8 \times 10^3 M_\odot$. Этим величинам соответствуют $\xi = 1.2 \times 10^{-5}$, 3.6×10^{-5} , 4.4×10^{-4} и 6.9×10^{-4} , и $\beta = 1.8, 1.9, 2.36$ и 2.4 . Данные величины имеют смысл ограничений сверху на возможные значения ξ и β . В первых двух случаях распределенная масса ТМ все еще мала для влияния на динамические эффекты (см. Рис. 3.16), но при $\eta > 3$ уже имеется реальная перспектива измерения дополнительной массы ТМ по прецессии S0 звезд. Заметим, однако, что при $\eta \geq 2$ концентрация частиц ТМ после процесса “закалки” в ранней Вселенной оказывается подавленной [393].

Согласно Рис. 3.17, при $\langle \sigma v \rangle = \text{const}$ и даже в случае $\langle \sigma v \rangle \propto 1/v$ динамика звезд пока не может дать ограничения на аннигиляцию, т.к. масса ТМ в пределах орбиты звезды S0-2 в этих случаях очень мала. На достигнутом уровне точности динамика звезд и аннигиляция — это независимые эффекты. Но если сечение аннигиляции зависит от скорости с большим показателем степени $\eta > 3$ в (3.104), то масса ТМ может быть значительной, и в ближайшие годы уже могут быть получены совместные ограничения по динамике звезд и по гамма-излучению из центра Галактики.

Нелинейные гравитационные структуры

4.1. “Гравитационные пузыри” и другие решения в конформной гравитации

В данном разделе обсуждается общая структура сферически-симметричных решений в Вейлевской конформной гравитации. Соответствующие уравнения Баха [394] выведены для специального случая метрик, которые могут рассматриваться как представитель общего класса. Найден полный набор вакуумных решений, состоящий из двух классов. Первый класс содержит решения в положительном двумерном скаляром кривизны, а представителем класса является известное решение для метрики Робертсона–Уоккера. Одно из этих решений мы назвали “гравитационным пузырем”, оно является ограниченным и имеет нулевой тензор Вейля. Таким образом, в конформной теории гравитации получено чисто вакуумное решение для метрики пространства-времени (без каких-либо материальных источников, таких как космологическая постоянная), что было невозможно в общей теории относительности. Такое решение делает более простым процесс, известный как рождение Вселенной “из ничего” – “from nothing” (А. Виленкин). Второй класс решений имеет переменный скаляр кривизны. Мы нашли представитель этого класса решений в виде однопараметрического семейства. Оказалось, что он может быть конформно покрыт трехпараметрическим решением Маннхейма–Казанаса. Также мы исследовали структуру тензора энергии-импульса в сферической конформной гравитации и построили векторное уравнение, которое показывает ясно некоторые особенности невакуумных решений. Два из них выписаны явно, это метрика Вайдья и метрика электровакуумного пространства-времени.

Квадратичное действие в конформной гравитации в 4D-случае имеет вид

$$S = -\alpha_0 \int C^{\mu\nu\lambda\sigma} C_{\mu\nu\lambda\sigma} \sqrt{-g} d^4x, \quad (4.1)$$

где тензор Вейля определен как

$$C_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\mu\nu\lambda\sigma} + \frac{1}{2}(R_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda} + R_{\nu\lambda}g_{\mu\sigma} - R_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - R_{\nu\sigma}g_{\mu\lambda}) + \frac{1}{6}R(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}) \quad (4.2)$$

и $\alpha_0 = \text{const}$.

4.1.1. Вывод уравнений Баха

Приведем предварительно компактный вывод уравнений Баха. Запишем вариацию действия (4.1) в виде

$$\delta S = -\alpha_0 \delta \int C_{\mu\nu\lambda\sigma} C_{\mu'\nu'\lambda'\sigma'} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} g^{\lambda\lambda'} g^{\sigma\sigma'} \sqrt{-g} d^4x \quad (4.3)$$

$$= -2\alpha_0 \int C^{\mu\nu\lambda\sigma} (\delta C_{\mu\nu\lambda\sigma}) \sqrt{-g} d^4x - 4\alpha_0 \int C_{\kappa\lambda\sigma\gamma} C_{\rho}{}^{\lambda\sigma\gamma} \delta g^{\kappa\rho} \sqrt{-g} d^4x \quad (4.4)$$

$$- \alpha_0 \int C^2 (\delta \sqrt{-g}) d^4x, \quad (4.5)$$

где мы используем обозначение $C^2 \equiv C^{\mu\nu\lambda\sigma} C_{\mu\nu\lambda\sigma}$. Для вычисления (4.4) запишем $C_{\mu\nu\lambda\sigma}$ в терминах тензоров Римана и Риччи, согласно определению (4.2). Тогда уравнение (4.4) принимает вид

$$- 2\alpha_0 \int C^{\mu\nu\lambda\sigma} [\delta R_{\mu\nu\lambda\sigma} - 2R_{\mu\lambda}(\delta g_{\nu\sigma})] \sqrt{-g} d^4x. \quad (4.6)$$

Большая часть членов сократилась благодаря симметриям тензора Вейля $C^{\mu\nu\lambda\sigma}$. Теперь, записывая $R_{\mu\nu\lambda\sigma} = g_{\mu\kappa} R^{\kappa}{}_{\nu\lambda\sigma}$, получим

$$\delta R_{\mu\nu\lambda\sigma} = (\delta g_{\mu\kappa}) R^{\kappa}{}_{\nu\lambda\sigma} + g_{\mu\kappa} (\delta R^{\kappa}{}_{\nu\lambda\sigma}). \quad (4.7)$$

Далее мы используем уравнения (16.3) и (16.4) из [397]:

$$\delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\nu} [(\delta g_{\nu\mu})_{;\sigma} + (\delta g_{\nu\sigma})_{;\mu} - (\delta g_{\mu\sigma})_{;\nu}], \quad (4.8)$$

$$\delta R^{\kappa}{}_{\nu\lambda\sigma} = (\delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\kappa})_{;\lambda} - (\delta \Gamma_{\nu\lambda}^{\kappa})_{;\sigma}. \quad (4.9)$$

На следующем этапе интегрируем (4.4) по частям и используем теорему Гаусса. Тогда, опуская поверхностные члены, (4.4) запишем в виде

$$- 2\alpha_0 \int \left[C^{\mu\kappa\lambda\sigma} R^{\nu}{}_{\kappa\lambda\sigma} + 2C^{\mu\sigma\lambda\nu}{}_{;\lambda;\sigma} - 2C^{\sigma\nu\lambda\mu} R_{\sigma\lambda} \right] \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (4.10)$$

Используя выражение $\delta g^{\alpha\rho} = -g^{\alpha\mu}g^{\rho\nu}\delta g_{\mu\nu}$ и $\delta\sqrt{-g} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}/2$, мы можем записать часть членов в (4.4) и (4.5), соответственно, в виде

$$4\alpha_0 \int C^\mu_{\lambda\sigma\gamma} C^{\nu\lambda\sigma\gamma} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (4.11)$$

и

$$-\frac{1}{2}\alpha_0 \int C^2 g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (4.12)$$

Первый член в квадратных скобках в (4.10) преобразуем с помощью соотношения

$$C^{\mu\kappa\lambda\sigma} C^\nu_{\kappa\lambda\sigma} = C^{\mu\kappa\lambda\sigma} R^\nu_{\kappa\lambda\sigma} + C^{\mu\kappa\lambda\nu} R_{\kappa\lambda}, \quad (4.13)$$

которое следует из определения тензора Вейля (4.2). Затем, из суммы (4.10), (4.11) и (4.12) получаем полевые уравнения в виде

$$C^{\mu\sigma\nu\lambda}_{;\lambda;\sigma} + \frac{1}{2}C^{\mu\lambda\nu\sigma} R_{\lambda\sigma} + \frac{1}{2}C^{\mu\kappa\lambda\sigma} C^\nu_{\kappa\lambda\sigma} - \frac{1}{8}C^2 g^{\mu\nu} = 0. \quad (4.14)$$

Заметим, что последние два члена сократились благодаря соотношению

$$C^{\mu\kappa\lambda\sigma} C^\nu_{\kappa\lambda\sigma} = \frac{1}{4}C^2 g^{\mu\nu}, \quad (4.15)$$

которое совпадает с алгебраическим соотношением (16.35) из [397], переписанным в терминах тензора Вейля. Здесь нужно принять во внимание, что как в метрике, так и в определении тензора Вейля в [397] имеется дополнительный множитель (-1) по сравнению с определениями, введенными в [396] и используемыми нами здесь. В итоге, вакуумные полевые уравнения (уравнения Баха) принимают вид

$$C^{\mu\sigma\nu\lambda}_{;\lambda;\sigma} + \frac{1}{2}C^{\mu\lambda\nu\sigma} R_{\lambda\sigma} = 0. \quad (4.16)$$

Второй член в (4.16) симметричен по μ и ν благодаря симметриям $C^{\mu\lambda\nu\sigma}$ и $R_{\lambda\sigma}$. Чтобы показать симметрию 1-го члена запишем

$$C^{\mu\sigma\lambda\nu}_{;\rho;\kappa} - C^{\mu\sigma\lambda\nu}_{;\kappa;\rho} = -C^{\gamma\sigma\lambda\nu} R^\mu_{\gamma\rho\kappa} + \dots \quad (4.17)$$

и получим, что $C^{\mu\sigma\nu\lambda}_{;\lambda;\sigma} = C^{\mu\sigma\nu\lambda}_{;\sigma;\lambda}$ тождественно.

Если имеется вещество с тензором энергии-импульса $T^{\mu\nu}$, то вариация для материи [396]

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int T^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x, \quad (4.18)$$

и полевые уравнения принимают вид

$$C^{\mu\sigma\nu\lambda}{}_{;\lambda;\sigma} + \frac{1}{2}C^{\mu\lambda\nu\sigma}R_{\lambda\sigma} = \frac{1}{8\alpha_0}T^{\mu\nu}. \quad (4.19)$$

Если действие (4.1) содержит переменный коэффициент $\lambda(x)$ вместо постоянной α_0 , то соответствующие полевые уравнения примут вид

$$\left(\lambda(x)C^{\mu\sigma\nu\lambda}\right)_{;\lambda;\sigma} + \frac{1}{2}\lambda(x)C^{\mu\lambda\nu\sigma}R_{\lambda\sigma} = \frac{1}{8}T^{\mu\nu}. \quad (4.20)$$

Заметим, что конформная инвариантность действия (4.1) не означает конформной инвариантности тензора Баха

$$B^\mu{}_\nu \equiv C^\mu{}_{\sigma\nu\lambda}{}^{;\lambda;\sigma} + \frac{1}{2}C^\mu{}_{\lambda\nu\sigma}R^{\lambda\sigma}. \quad (4.21)$$

Под действием конформного преобразования

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\omega}g_{\mu\nu} \quad (4.22)$$

тензор Баха преобразуется как

$$\tilde{B}^\mu{}_\nu = e^{-4\omega}B^\mu{}_\nu. \quad (4.23)$$

Таким образом, конформное преобразование метрики должно сопровождаться соответствующим преобразованием тензора энергии-импульса.

4.1.2. Уравнения Баха в сферически-симметричном случае

Запишем уравнения Баха (4.19) в сферически-симметричном случае, используя $2 + 2$ -разложение метрики. Применяем соглашение о сигнатуре метрики и определение тензора кривизны как в [396]. Будем использовать следующее соглашение об индексах: Греческие индексы из середины алфавита $\mu, \nu, \sigma, \lambda$ пробегает значения $0, 1, 2, 3$. Латинские индексы i, j, k, l пробегает значения $0, 1$. Греческие индексы из начала алфавита $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ пробегает значения $2, 3$. Делаем $2 + 2$ -разложение метрики в случае сферической симметрии:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \gamma_{ik}dx^i dx^k - r^2(x)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\ &= r^2(x)[\tilde{\gamma}_{ik}dx^i dx^k - (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] = r^2(x)[d\tilde{s}_2^2 - d\Omega^2], \end{aligned} \quad (4.24)$$

где

$$d\tilde{s}_2^2 = \tilde{\gamma}_{ik} dx^i dx^k \quad (4.25)$$

– двумерная метрика, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$. Конформная симметрия позволяет вычеркнуть множитель r^2 из метрики (4.24), поэтому далее мы будем записывать метрику в виде

$$ds^2 = \tilde{\gamma}_{ik} dx^i dx^k - (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.26)$$

Далее точка с запятой “;” означает ковариантную производную по отношению к оригинальной 4-мерной метрике $g_{\mu\nu}$, а вертикальная черточка “|” обозначает ковариантную производную по отношению к двумерной метрике γ_{ik} .

Соответствующие ненулевые аффинные связности равны

$$\Gamma_{kl}^i = \tilde{\Gamma}_{kl}^i, \quad (4.27)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2} g_{\mu\nu,2}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad (4.28)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^3 = -\frac{1}{2 \sin^2 \theta} (g_{3\mu,\nu} + g_{3\nu,\mu}), \quad \Gamma_{23}^2 = \cot \theta, \quad (4.29)$$

где тильда “ $\tilde{}$ ” означает двумерное пространство-время по отношению к γ_{ik} .

Ненулевые компоненты тензора кривизны:

$$R_{iklm} = \tilde{R}_{iklm} = \frac{\tilde{R}}{2} (\gamma_{il} \gamma_{km} - \gamma_{im} \gamma_{kl}), \quad (4.30)$$

$$R_{km} = \frac{\tilde{R}}{2} \gamma_{km}, \quad R_{22} = 1, \quad R_{33} = \sin^2 \theta, \quad (4.31)$$

$$R_2^2 = R_3^3 = -1, \quad (4.32)$$

где \tilde{R} – двумерный скаляр кривизны.

$$R_{i2\lambda\sigma} = \frac{1}{2} (R_{i\sigma} g_{2\lambda} + R_{2\lambda} g_{i\sigma} - R_{i\lambda} g_{2\sigma} - R_{2\sigma} g_{i\lambda}) + \frac{1}{6} R (g_{i\lambda} g_{2\sigma} - g_{i\sigma} g_{2\lambda}), \quad (4.33)$$

$$R_{i2k2} = \frac{1}{12} (\tilde{R} - 2) \gamma_{ik}, \quad (4.34)$$

$$R_{2323} = \frac{1}{6} (\tilde{R} - 2) \sin^2 \theta, \quad (4.35)$$

$$R_{i3k3} = \frac{1}{12} (\tilde{R} - 2) \gamma_{ik} \sin^2 \theta. \quad (4.36)$$

Соответствующий 4-мерный скаляр кривизны равен

$$R = \tilde{R} - 2. \quad (4.37)$$

Тензор Вейля (4.2) имеет следующие ненулевые компоненты:

$$C_{iklm} = \frac{1}{6}(\tilde{R} - 2)(\gamma_{il}\gamma_{km} - \gamma_{im}\gamma_{kl}), \quad (4.38)$$

$$C_{2323} = \frac{(\tilde{R} - 2) \sin^2 \theta}{6}, \quad C_{i2j2} = \frac{(\tilde{R} - 2)\gamma_{ij}}{12}, \quad (4.39)$$

$$C_{i3j3} = C_{i2j2} \sin^2 \theta. \quad (4.40)$$

“Квадрированный” тензор Вейля $C_{\mu\nu\sigma\lambda}C^{\mu\nu\sigma\lambda}$ в действии (4.1) может быть вычислен либо напрямую, либо с использованием равенства

$$C_{\mu\nu\sigma\lambda}C^{\mu\nu\sigma\lambda} = R_{\mu\nu\sigma\lambda}R^{\mu\nu\sigma\lambda} - 2R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2. \quad (4.41)$$

В сферически-симметричном случае оба метода дают следующий результат

$$C^2 \equiv C_{\mu\nu\lambda\sigma}C^{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{1}{3}(\tilde{R} - 2)^2. \quad (4.42)$$

соответствующий тензор Баха

$$B_{\mu\nu} = C_{\mu\lambda\nu\sigma}{}^{;\sigma\lambda} + \frac{1}{2}R^{\lambda\sigma}C_{\mu\lambda\nu\sigma} \quad (4.43)$$

имеет следующие ненулевые компоненты:

$$B_{ik} = \frac{1}{6}(\tilde{R}_{|p}^p \gamma_{ik} - \hat{R}_{|ki}) + \frac{\tilde{R}^2 - 4}{24} \gamma_{ik}, \quad (4.44)$$

$$B_{22} = \frac{1}{12} \left[\tilde{R}_{|p}^p + \frac{1}{2}(\tilde{R}^2 - 4) \right], \quad (4.45)$$

$$B_{33} = \frac{1}{12} \left[\tilde{R}_{|p}^p - \frac{1}{2}(\tilde{R}^2 - 4) \right] \sin^2 \theta = B_{22} \sin^2 \theta. \quad (4.46)$$

4.1.3. Общая структура вакуумных решений

Определим теперь общую структуру вакуумных решений в конформной гравитации путем использования дважды нулевых координат.

Из результатов раздела 4.1.2 получаем следующие уравнения Баха

$$B_{ik} = \frac{1}{6}(\tilde{R}_{|p}^p \gamma_{ik} - \hat{R}_{|ki}) + \frac{\tilde{R}^2 - 4}{24} \gamma_{ik} = 0, \quad (4.47)$$

$$B_{22} = \frac{1}{12} \left[\tilde{R}_{|p}^p + \frac{1}{2}(\tilde{R}^2 - 4) \right] = 0. \quad (4.48)$$

В этом разделе мы получим их общие решения. Введем в двумерной части метрики следующие координаты:

$$ds_2^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k = 2e^{2\omega} dudv = 2H dudv, \quad (4.49)$$

т. е.

$$\gamma_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H \\ H & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H^{-1} \\ H^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

Ненулевые компоненты в этом случае

$$\Gamma_{uu}^u = \frac{H_{,u}}{H}, \quad \Gamma_{vv}^v = \frac{H_{,v}}{H}, \quad (4.51)$$

$$R_{uvvu} = (H_{,u}H_{,v} - HH_{,uv})/H, \quad (4.52)$$

$$R_{uv} = (H_{,u}H_{,v} - HH_{,uv})/H^2, \quad (4.53)$$

$$\tilde{R} = \gamma^{ik} R_{ik} = \frac{2}{H} R_{uv}. \quad (4.54)$$

Используя (4.53), получаем

$$\tilde{R} = \frac{2}{H^3} (-HH_{,uv} + H_{,u}H_{,v}) = R + 2, \quad (4.55)$$

$$C_{1010} = -\frac{1}{6}RH^2, \quad C_{2021} = \frac{1}{6}RH, \quad C_{3031} = \frac{1}{6}RH \sin^2 \theta, \quad C_{3232} = \frac{1}{6}R \sin^2 \theta. \quad (4.56)$$

Для любого A имеем

$$A|_p^p = \gamma^{lm} A|_{l|m} = \frac{2}{H} A|_{uv} = \frac{2}{H} (A_{,uv} - \Gamma_{uv}^\mu A_{,\mu}) = \frac{2}{H} A_{,uv}, \quad (4.57)$$

Соответствующие уравнения Баха в вакууме следующие:

$$B_{uv} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{R}_{,uv} = \frac{H}{4} (\tilde{R}^2 - 4), \quad (4.58)$$

$$B_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{R}_{,uv} = \frac{H}{4} (\tilde{R}^2 - 4), \quad (4.59)$$

$$B_{uu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{R}_{,uu} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{R}_{,uu}}{\tilde{R}_{,u}} = \frac{H_{,u}}{H}, \quad (4.60)$$

$$B_{vv} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{R}_{,vv} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{R}_{,vv}}{\tilde{R}_{,v}} = \frac{H_{,v}}{H}. \quad (4.61)$$

Из (4.60) и (4.61) получаем следующие первые интегралы:

$$\tilde{R}_{,u} = c_1(v)H, \quad \tilde{R}_{,v} = c_2(u)H. \quad (4.62)$$

Выберем новые координаты \tilde{u} и \tilde{v} чтобы “поглотить” функции $c_1(v)$ и $c_2(u)$ и сохранить “направление” изменения координат, т. е. сохранить неравенства $d\tilde{u}/du > 0$ и $d\tilde{v}/dv > 0$. В общем случае это возможно, если $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, и мы предполагаем это и здесь. В новых координатах имеем $\tilde{R}_{,\tilde{u}} = \pm \tilde{R}_{,\tilde{v}}$ или $\tilde{R}(z) = \tilde{R}(u \pm v)$ и $\tilde{R}_{,\tilde{u}\tilde{v}} = \pm \tilde{R}_{,\tilde{u}\tilde{u}}$. Это означает, что метрика (4.49) имеет вектор Киллинга, времениподобный в случае $z = u - v$ и пространственноподобный в случае $z = u + v$.

Пусть теперь $c_1(v) = 1$, тогда $\tilde{R}_{,u} = H$ и

$$\pm \tilde{R}_{,zz} = \tilde{R}_{,z}(\tilde{R}^2 - 4), \quad z = \tilde{u} \pm \tilde{v}. \quad (4.63)$$

Понижаем порядок дифференциальных уравнений:

$$\tilde{R}_{,z} \equiv Y(R_{,z}) \Rightarrow \frac{dY}{d\tilde{R}} = \frac{\tilde{R}^2}{4} - 1 \Rightarrow \pm Y = \frac{\tilde{R}^3}{12} - \tilde{R} + C_0. \quad (4.64)$$

Таким образом, общее сферически-симметричное решение уравнений Баха в вакууме имеет вид

$$ds_2^2 = \pm \frac{1}{6}(\tilde{R}^3 - 12\tilde{R} + C_0)dudv, \quad (4.65)$$

$$\tilde{R} = \tilde{R}(z), \quad z = u \pm v. \quad (4.66)$$

При другом выборе $\tilde{R}_{,z} = -H$ ($c_1(v) = -1$) получается точно такой же результат.

Можно попытаться решить остающееся дифференциальное уравнение первого порядка и получить решение $\tilde{R}(u, v)$ в области между горизонтами (т. е., между корнями уравнения $\tilde{R}_{,z} = 0$), но здесь мы используем другой метод. Во-первых, введем другие “временную” и “пространственную” координаты η и ξ с помощью соотношений $u = \eta - \xi$ и $v = \eta + \xi$, а затем положим $dudv = d\eta^2 - d\xi^2$. Напомним, что только метрический коэффициент H зависит либо от ξ , либо от η , т. е., одна из координат направлена вдоль вектора Киллинга, в то время как другая перпендикулярна ей. Следующий шаг заключается в использовании двумерного скаляра кривизны \tilde{R} в качестве этой второй координаты. В этом случае двумерная метрика принимает очень простой вид

$$d\tilde{s}_2^2 = Ad\eta^2 - \frac{d\tilde{R}^2}{A}, \quad (4.67)$$

где

$$A = \frac{1}{6} \left(\tilde{R}^3 - 12\tilde{R} + C_0 \right). \quad (4.68)$$

Если $A > 0$, то координата \tilde{R} является пространственной, а если $A < 0$, то она играет роль времени. Таким образом, 4-мерная метрика

$$d\tilde{s}_4^2 = Ad\eta^2 - \frac{d\tilde{R}^2}{A} - (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.69)$$

и мы будем называть эту метрику “представителем” всего семейства вакуумных решений с ненулевым двумерным скаляром кривизны.

Теперь для полноты положим $c_1(v) = 0$. Тогда $\tilde{R}_{,u} = 0$, $\tilde{R}_{,uv} = 0$ и $c_2(u) = 0$. Вакуумным решением является $\tilde{R} = const = \pm 2$. Детальное исследование этого случая выполнено ниже.

4.1.4. Восстановление радиальной координаты

Опишем метод восстановления радиальной координаты в полученном сферически-симметричном вакуумном решении и сравним результат с решением Маннхейма–Казанаса [182].

Общее 4-мерное вакуумное решение можно записать в виде

$$ds_4^2 = \Phi^2(\eta, \tilde{R}) \left[Ad\eta^2 - \frac{d\tilde{R}^2}{A} - (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (4.70)$$

где Φ играет роль физического радиуса сферы. Сделаем преобразование координат $(\eta, \tilde{R}) \rightarrow (\eta, \Phi)$. Координату времени мы оставляем неизменной, т.к. она дает связь с вектором Киллинга. В результате получаем

$$\begin{aligned} ds_4^2 = & \left[\Phi^2 A - \frac{\Phi^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2}{A \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{R}} \right)^2} \right] d\eta^2 - 2 \frac{\Phi^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}}{A \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{R}}} d\eta d\Phi \\ & - \frac{\Phi^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{R}} \right)^{-2}}{A} d\Phi^2 - \Phi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Видим, что в общем случае метрика не диагональная. Поскольку радиус имеет очевидный физический смысл, мы построим другой представитель класса, в котором радиус является одной из координат. Это возможно, если радиус зависит

только от \tilde{R} , и мы обозначим его $r(\tilde{R})$. Чтобы найти функцию $r(\tilde{R})$ мы потребуем, чтобы получившаяся метрика совпала с решением Маннхейма–Казанаса [182]. Для этого достаточно потребовать, чтобы

$$\frac{d\tilde{R}}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \implies \tilde{R} = -\frac{C_1}{r} + C_2 \quad (4.72)$$

Затем, после переопределения временной координаты получаем

$$ds_4^2 = F dt^2 - \frac{dr^2}{F} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.73)$$

Для функции $F(r)$ имеем следующее полиномиальное выражение

$$F(r) = \frac{C_2}{2} - \frac{C_1}{6r} + \frac{(4 - C_2^2)}{2C_1}r + \frac{C_2(C_2^2 - 12) - C_0}{6C_1^2}r^2. \quad (4.74)$$

Коэффициенты в решении Маннхейма–Казанаса можно выразить через наши коэффициенты C_1 , C_2 , C_0 с помощью следующих выражений:

$$\frac{C_2}{2} = 1 - 3\beta\gamma, \quad \beta(2 - 3\beta\gamma) = \frac{C_1}{6}, \quad (4.75)$$

$$\gamma = \frac{4 - C_2^2}{2C_1}, \quad k = \frac{C_2(12 - C_2^2) + C_0}{6C_1^2}. \quad (4.76)$$

Интересно сравнить найденные вакуумные решения с хорошо известными сферически-симметричными вакуумными решениями в общей теории относительности, которые описываются метрикой

$$ds^2 = F dt^2 - \frac{dr^2}{F} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.77)$$

$$F = 1 - \frac{2Gm}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2, \quad (4.78)$$

где m – параметр массы, а Λ – космологическая постоянная. Если $\Lambda = 0$, то мы имеем решение Шварцшильда, если $m = 0$ – решение де Ситтера ($\Lambda > 0$) или анти- де Ситтера ($\Lambda < 0$), а для ненулевого m получаются решения Шварцшильда – де Ситтера и Шварцшильда – анти- де Ситтера, соответственно. Найдем скалярную кривизну \tilde{R} для укороченной метрики

$$d\tilde{s}_2^2 = \frac{F dt^2}{r^2} - \frac{dr^2}{Fr^2}, \quad (4.79)$$

и сделаем преобразование к координатам (t, \tilde{R}) . В результате получим

$$\tilde{R} = 2 - \frac{12Gm}{r}, \quad (4.80)$$

$$d\tilde{s}_2^2 = \frac{(12Gm)^2 F}{r^2} d\left(\frac{t}{12Gm}\right)^2 - \frac{r^2}{(12Gm)^2 F} d\tilde{R}^2 = Ad\eta^2 - \frac{d\tilde{R}^2}{A}, \quad (4.81)$$

где

$$\eta = \frac{t}{12Gm}; \quad A = \left(\frac{12Gm}{r}\right)^2 F. \quad (4.82)$$

Подставляя r из (4.80), получаем

$$A = \frac{1}{6}[\tilde{R}^3 - 12\tilde{R} + 16 - 2(12Gm)^2 \Lambda]. \quad (4.83)$$

Мы видим, что сферически-симметричное решение общей теории относительности воспроизводится в случае специального выбора параметров C_0 , C_1 и C_2 , а именно

$$C_2 = 0, \quad C_1 = 12Gm, \quad C_0 = 16 - 2(12Gm)^2 \Lambda. \quad (4.84)$$

4.1.5. Решения с постоянной кривизной

Опишем структуру вакуумных космологических решений с постоянной кривизной. Вакуумные решение с постоянной кривизной \tilde{R} могут иметься в случаях $\tilde{R} = \pm 2$, но оказалось, что в конформной гравитации можно найти все сферически-симметричные решения с $\tilde{R} = const$, что мы сейчас продемонстрируем.

Двумерная метрика пространства-времени (4.67) с постоянной кривизной \tilde{R} в дважды нулевых координатах (u, v) определяется решением уравнения (4.55):

$$\tilde{R} = \frac{2}{H^3}(-HH_{,uv} + H_{,u}H_{,v}) = const, \quad H = e^{2\omega}. \quad (4.85)$$

Выраженное через функцию ω , это уравнение принимает вид

$$\omega_{,uv} = -\frac{\tilde{R}}{4}e^{2\omega}. \quad (4.86)$$

Это уравнение в дифференциальной геометрии называется уравнением Лиувилля (см., например, [395]):

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial u \partial v} = ae^{\lambda Y} \quad (4.87)$$

для функции $Y = \omega$ с константами $a = -\tilde{R}/4$ и $\lambda = 2$. Общее решение уравнения Лиувилля

$$Y = \frac{1}{\lambda}[f(u) + g(v)] - \frac{2}{\lambda} \ln \left| k \int \exp[f(u)] du + \frac{a\lambda}{2k} \int \exp[g(v)] dv \right|, \quad (4.88)$$

где $f = f(u)$, $g = g(v)$ – произвольные функции, а k – произвольная постоянная.

Двумерная метрика с постоянной кривизной может быть записана в виде:

$$ds_2^2 = \frac{2}{k^2} \frac{dF dG}{\left(F - \frac{\tilde{R}}{4k^2} G\right)^2} = \frac{8}{|\tilde{R}|} \frac{d\tilde{u} d\tilde{v}}{(\tilde{u} \pm \tilde{v})^2}, \quad (4.89)$$

где

$$F = \int e^{f(u)} du = \tilde{u}, \quad G = \int e^{g(v)} dv = \left| \frac{2k}{\tilde{R}} \right|^2 \tilde{v}. \quad (4.90)$$

Метрическая функция H зависит, соответственно, от $\tilde{u} - \tilde{v}$ при $\tilde{R} > 0$ и от $\tilde{u} + \tilde{v}$ при $\tilde{R} < 0$. В случае $H > 0$ имеем $\tilde{u} = t - x$ и $\tilde{v} = t + x$, т. е., каждое двумерное пространство-время этого типа допускает вектор Киллинга, или времениподобный или пространственноподобный.

В случае $\tilde{R} > 0$ имеем $z = u - v$, $w_{uv} = -w_{zz}$. Уравнение Лиувилля принимает вид

$$\omega_{,zz} = \frac{\tilde{R}}{4} e^{2\omega}. \quad (4.91)$$

Путем определения новой функции $y = 2\omega$ мы можем понизить порядок дифференциального уравнения:

$$y_{,zz} = \frac{\tilde{R}}{2} e^y, \quad y_{,z} = p(y), \quad y_{,zz} = p'p \Rightarrow p = \pm \sqrt{\tilde{R}e^y + c}. \quad (4.92)$$

Здесь c – постоянная интегрирования. Решение последнего уравнения

$$z = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{\tilde{R}e^y + c}} = \mp 2 \int \frac{d\alpha}{\sqrt{\tilde{R} + c\alpha^2}}, \quad \alpha = e^{-y/2}. \quad (4.93)$$

В частном случае $c = 0$ это решение имеет вид

$$\frac{\sqrt{\tilde{R}}}{2} |z| = e^{-y/2}. \quad (4.94)$$

Это решение с $v = t + x$ и $u - v = -2x$ соответствует метрике

$$ds_2^2 = \frac{2}{\tilde{R}x^2} (dt^2 - dx^2). \quad (4.95)$$

В случае $c > 0$ решение (4.93) принимает вид

$$z = \mp \frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{arcsch} \left(\frac{\alpha \sqrt{c}}{\sqrt{\tilde{R}}} \right), \quad (4.96)$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{\tilde{R}}}{\sqrt{c}} \operatorname{sh} (\mp \sqrt{c} z / 2) = e^{-y/2}, \quad (4.97)$$

$$H = e^y = \frac{c}{\tilde{R} \operatorname{sh}^2 (\sqrt{c} z / 2)} = \frac{c_5}{\tilde{R} \operatorname{sh}^2 (\sqrt{c_5} x)}. \quad (4.98)$$

По меньшей мере в одном случае $c < 0$ решение (4.97) записывается в форме

$$z = \mp \frac{2}{\sqrt{-c}} \operatorname{arcsin} \left(\frac{\alpha \sqrt{-c}}{\sqrt{\tilde{R}}} \right), \quad (4.99)$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{\tilde{R}}}{\sqrt{-c}} \sin |\sqrt{-c} z / 2| = e^{-y/2}, \quad (4.100)$$

$$H = e^y = \frac{-c}{\tilde{R} \sin^2 (\sqrt{-c} z / 2)} = \frac{-c}{\tilde{R} \sin^2 (\sqrt{-c} x)}. \quad (4.101)$$

Соответственно, в случае $\tilde{R} < 0$ мы имеем $z = u + v$, $w_{uv} = w_{zz}$. Уравнение Лиувилля принимает вид

$$\omega_{,zz} = -\frac{\tilde{R}}{4} e^{2\omega} = \frac{|\tilde{R}|}{4} e^{2\omega}. \quad (4.102)$$

Все предшествующие решения воспроизводятся с помощью подстановки $\tilde{R} \rightarrow |\tilde{R}|$ и $x\tilde{R} \rightarrow t$.

Видим, что с точностью до общего конформного множителя все решения с постоянной двумерной кривизной \tilde{R} могут быть записаны в виде метрики Робертсона-Уоккера. И при $\tilde{R} > 0$ они представляют изотропные и однородные вселенные с положительной, отрицательной или нулевой пространственной кривизной. Если $\tilde{R} = +2$, то эти вселенные пусты имеют нулевой тензор Вейля. Такое решение мы называем “гравитационным пузырем”. Случай $\tilde{R} < 0$ отличается от предыдущего тем, что радиальная координата становится времениподобной. Таким образом, мы получили чисто вакуумное (без каких-либо материальных источников и без космологической постоянной) искривленное пространство-время, что было невозможно в общей теории относительности.

4.1.6. Общая структура тензора энергии-импульса и векторное уравнение

Выше мы нашли невакуумные решения с постоянным двумерным скаляром кривизны \tilde{R} для нашего конкретного выбора сферически симметричной метрики

$$ds_4^2 = \tilde{\gamma}_{ik} dx^i dx^k - (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.103)$$

Соответствующий тензор энергии-импульса равен

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ik} &= \alpha_0 \frac{\tilde{R}^2 - 4}{3} \tilde{\gamma}_{ik}, & \tilde{T}_2^2 &= \tilde{T}_3^3 = -\frac{\alpha_0}{3} (\tilde{R}^2 - 4), \\ \text{Tr}(\tilde{T}_\nu^\mu) &= \text{Tr}(\tilde{T}_k^i) + 2\tilde{T}_2^2 = \tilde{T} + 2\tilde{T}_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Тензор энергии-импульса должен быть бесследовым, что следует из требования конформной инвариантности материальной части полного интеграла действия. Действительно, под влиянием конформной вариации метрического тензора $\delta g_{\mu\nu} = 2e^{2\omega} \tilde{g}_{\mu\nu} \delta\omega$ ($\delta g^{\mu\nu} = -2g^{\mu\nu} \delta\omega$),

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S_{\text{matter}} = \delta \int L_{\text{matter}} \sqrt{-g} dx \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} dx \\ &= - \int T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta\omega dx \implies \text{Tr}(T_\nu^\mu) = 0. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Сравним два тензора энергии-импульса для двух метрик, связанных между собой конформным преобразованием. Для этого мы должны рассмотреть другой тип вариации, которая не затрагивает конформный множитель, а именно, $\delta g^{\mu\nu} = e^{-2\omega} \delta \tilde{g}^{\mu\nu}$. Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S_{\text{matter}} = \delta \int L_{\text{matter}} \sqrt{-g} dx \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \tilde{T}_{\mu\nu} \sqrt{-\tilde{g}} \delta \tilde{g}^{\mu\nu} dx \implies \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{T}_{\mu\nu} \delta \tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Таким образом,

$$T_{\mu\nu} = e^{-2\omega} \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad T_\mu^\nu = g^{\nu\lambda} T_{\mu\lambda} = e^{-4\omega} \tilde{g}^{\nu\lambda} \tilde{T}_{\mu\lambda} = e^{-4\omega} \tilde{T}_\mu^\nu. \quad (4.107)$$

Можно показать, что то же самое выполняется и для тензора Баха

$$B_\mu^\nu = e^{-4\omega} \tilde{B}_\mu^\nu, \quad (4.108)$$

поэтому теория самосогласованна. Отметим, что для общего вида сферически-симметричной метрики

$$ds_4^2 = \Phi^2(x)(\tilde{y}_{ik}dx^i dx^k - (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad (4.109)$$

где $\Phi(x)$ играет роль физического радиуса сферы, структура тензора энергии-импульса в случае постоянного двумерного скаляра кривизны \tilde{R} следующая

$$T_\mu^\nu = \frac{\alpha_0}{3} \frac{\tilde{R}^2 - 4}{\Phi^4} \text{diag}(1, 1, -1, -1), \quad (4.110)$$

т. е., такая же, как для сферически-симметричного поля кулоновского типа.

Перепишем тензорное уравнение Баха в сферически симметричном случае в более простой и наглядной форме – в виде векторного уравнения. Далее нам понадобится только двумерная часть тензора Баха

$$\tilde{B}_{ik} = \frac{1}{6} \left(\tilde{R}_{|p}^{|p} \tilde{\gamma}_{ik} - \tilde{R}_{|ik} \right) + \frac{\tilde{R}^2 - 4}{24} \tilde{\gamma}_{ik} = \frac{1}{8\alpha_0} \tilde{T}_{ik}, \quad (4.111)$$

записанного для нашего специального выбора метрики (без радиуса). Уравнение для $\tilde{B}_2^2 (= \tilde{B}_3^3)$ является алгебраическим следствием уравнений, записанных выше, поскольку тензор Баха бесследовый. Мы видим, что двумерный скаляр кривизны \tilde{R} играет очень важную роль. С точки зрения геометрии, мировые линии $\tilde{R} = \text{const}$ могли бы быть времениподобными, пространственноподобными или нулевыми. Это определяется (псевдоевклидовым) квадратом вектора нормали

$$\tilde{\Delta} = \tilde{\gamma}^{ik} \tilde{R}_{,i} \tilde{R}_{,k}, \quad (0 = d\tilde{R} = \tilde{R}_{,i} dx^i). \quad (4.112)$$

Таким образом, $\tilde{\Delta} > 0$ для пространственноподобных, $\tilde{\Delta} < 0$ для времениподобных и $\tilde{\Delta} = 0$ для нулевых мировых линий $\tilde{R} = \text{const}$. Взяв след уравнения (4.111) и решая его для $\tilde{R}_{|p}^{|p}$, получаем

$$\tilde{R}_{|i}^{|k} + \frac{\tilde{R}^2 - 4}{4} \delta_i^k = \frac{3}{4\alpha_0} \left(\tilde{T} \delta_i^k - \tilde{T}_i^k \right), \quad (4.113)$$

где $\tilde{T} = \tilde{\gamma}^{ik} \tilde{T}_{ik}$. Свертка с вектором $\tilde{R}_{|i} = \tilde{R}_{,i}$ дает

$$\tilde{R}_{|i}^{|k} \tilde{R}_{|k} + \frac{1}{4} (\tilde{R}^2 - 4) \tilde{r}_{|i} = \frac{3}{4\alpha_0} \left(\tilde{T} \tilde{R}_{|i} - \tilde{T}_i^k \tilde{R}_{|k} \right). \quad (4.114)$$

Первый член может быть выражен через $\tilde{\Delta}$:

$$\tilde{\Delta}_{,i} = \tilde{\Delta}|_i = 2\tilde{R}|_i^k \tilde{R}|_k, \quad (4.115)$$

и мы получаем требуемое векторное уравнение

$$\left(2\tilde{\Delta} + \frac{1}{3}(\tilde{R}^3 - 12\tilde{R})\right)_{,i} = \frac{3}{\alpha_0} \left(\tilde{T}\tilde{R}_{,i} - \tilde{T}_i^k \tilde{R}_{,k}\right). \quad (4.116)$$

В качестве примера применим векторное уравнение к ситуации, когда \tilde{R} и физический радиус $\Phi = r$ могут быть использованы в качестве пространственной координаты. Тогда $\tilde{\Delta} = \gamma^{11} < 0$ и

$$-\gamma^{11} = \frac{1}{6} \left(\tilde{R}^3 - 12\tilde{R}\right) - \frac{3}{2\alpha_0} \int \tilde{T}_0^0 d\tilde{R}. \quad (4.117)$$

Предполагая, что $\tilde{R} = \tilde{R}(r)$ и используя выражение для решения Маннхейма–Казанаса, имеем $\frac{d\tilde{R}}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$. Член с интегралом может быть переписан в виде

$$\int_0^{r_0} \tilde{T}_0^0 d\tilde{R} = \int_0^{r_0} r^4 T_0^0 \frac{d\tilde{R}}{dr} dr = C_1 \int_0^{r_0} T_0^0 r^2 dr, \quad (4.118)$$

что пропорционально полной массе, включая гравитационный дефект массы, внутри сферы радиусом r_0 , как было показано в [396].

4.1.7. Решение вида решения Вайдья и электровакуумное решение

Решение Вайдья – это точное сферически-симметричное решение в общей теории относительности, описывающее радиальное входящее или исходящее излучение. Мы найдем его аналог в конформной гравитации. Для примера рассмотрим случай исходящих лучей.

Как и ранее, выберем сначала вид 2-мерной метрики. Очевидно, наиболее подходящей координатой в этой задаче служит нулевая координата u (“запаздывающее время”) и 2-мерный скаляр кривизны \tilde{R} :

$$ds_2^2 = Adu^2 + 2Bdud\tilde{R}. \quad (4.119)$$

Будем использовать индекс “0” для u и “1” для \tilde{R} . Тогда метрический коэффициент $\gamma_{00} = A$, $\gamma_{01} = \gamma_{10} = B$, $\gamma_{11} = 0$. Соответственно, для обратной метрики

$\gamma^{00} = 0$, $\gamma^{01} = \gamma^{10} = 1/B$, $\gamma_{11} = -A/B^2$. Тензор энергии-импульса для излучения имеет вид

$$T_{ik} = l_i l_k, \quad (i, k = 0, 1), \quad (4.120)$$

где l^i – нулевой вектор: $\gamma_{ik} l^i l^k = 0$. Здесь $A(l^0)^2 + 2Bl^0 l^1 = 0$. Для исходящих лучей $l^0 = 0$ и $l_0 = Bl^1$, $l_1 = 0$, поэтому

$$T_{00} = B(l^1)^2, \quad T_{01} = T_{10} = T_{11} = 0. \quad (4.121)$$

Соответствующие уравнения Баха имеют вид

$$B_{00} = \frac{1}{6} \left[A \frac{\tilde{R}^2 - 4}{4} + \frac{1}{B} \left(\frac{A'}{2} - \frac{AB'}{B} \right) \left(1 - \frac{A}{B^2} \right) \right] = -\frac{1}{8\alpha} T_{00}, \quad (4.122)$$

$$B_{01} = \frac{B}{6} \left(\frac{A'B'}{B^3} - \frac{A'}{2B^2} + \frac{\tilde{R}^2 - 4}{4} = 0 \right), \quad (4.123)$$

$$B_{11} = \frac{1}{6} \frac{B'}{B} = 0. \quad (4.124)$$

Из последнего уравнения получаем $B = B(u)$, и, перемасштабируя нулевую координату, можно сделать $B = \pm 1$. Принимая во внимание предел известного решения Шварцшильда, мы приходим к выводу, что для исходящих лучей должно быть $B = 1$. Из (4.124) для метрического коэффициента A теперь легко получить

$$A = \frac{1}{6} [\tilde{R}^3 - 12\tilde{R} + C_0(u)], \quad (4.125)$$

где “константа” интегрирования $C_0(u)$ является произвольной функцией u . Таким образом,

$$ds_2^2 = \frac{1}{6} [\tilde{R}^3 - 12\tilde{R} + C_0(u)] du^2 + 2du d\tilde{R}. \quad (4.126)$$

Мы видим, что единственным отличием от вакуумного решения является то, что константа интегрирования C_0 становится теперь функцией запаздывающего времени (исходящей нулевой координаты), что подтверждает нашу интерпретацию полной массы гравитирующего источника как части C_0 . Конечно, для записи общего решения мы должны добавить метрику единичной 2-мерной сферы и умножить на квадрат физического радиуса.

Рассмотрим электровакуумный случай. Тензор энергии-импульса для сферически-симметричного кулоновского поля

$$T_{\mu}^{\nu} = \frac{e^2}{8\pi\Phi^4} \text{diag}(1, 1, -1, -1). \quad (4.127)$$

Соответственно, его двумерную обрезанную часть можно записать в виде

$$\tilde{T}_i^k = \frac{e^2}{8\pi} \delta_i^k, \quad (4.128)$$

где δ_i^k – единичный тензор (символ Кронекера). Подставляя в векторное уравнение, получаем

$$A = \frac{1}{6} \left[\tilde{R}^3 - \left(12 + \frac{9e^2}{4\pi\alpha_0} \right) \tilde{R} + const \right]. \quad (4.129)$$

Структура метрики та же самая, что и в вакуумном случае. Заметим, что теперь нельзя воспроизвести известное решение Рейсснера-Нордстрема в общей теории относительности для любого выбора константы интегрирования и радиусов $\Phi(\tilde{R})$.

Суммируем полученные результаты и сделаем некоторые замечания. Общая структура сферически симметричных решений в конформной гравитации Вейля, описываемая уравнениями Баха, найдена для особого типа метрик, которые могут рассматриваться в качестве представителей общего класса метрик. Найденный полный набор вакуумных решений состоит из двух классов.

Первый из них содержит решения с постоянной двумерной скалярной кривизной, а представителем является известная метрика Робертсона–Уоккера. Одно из решений (компактное с нулевым тензором Вейля) мы назвали “гравитационным пузырем”. Таким образом, мы получили чистые вакуумные решения для искривленного пространства-времени (без каких-либо материальных источников, в том числе космологической постоянной), что абсолютно невозможно в общей теории относительности. Такое явление делает легче возможность создать Вселенную “из ничего”. Есть два различных сферически-симметричного вакуума (до конформного преобразования). Это может быть связано со спонтанным нарушением симметрии, так как вакуум с $\tilde{R} = 2$ изотропен, в то время вакуум с $\tilde{R} = 2$ – не изотропен.

Второй класс является более общим, он имеет переменный скаляр кривизны. Мы нашли его представителя в качестве однопараметрического семейства. Оказывается, что оно может быть конформно покрыто решением Маннхейма-Казанаса. Разница между нашим решением и решением Маннхейма-Казанаса заключается в том, что последнее зависит от трех постоянных интегрирования

(без учета общего произвольного конформного множителя), в то время как наше решение имеет только одну постоянную интегрирования (и произвольный конформный коэффициент). Показано также, что две дополнительные константы появляются в процессе восстановления радиуса в общем виде метрики. Таким образом, наше решение является более общим.

4.2. Квантовые уровни электронов в заряженных черных дырах

В данном разделе найдено стационарное решение уравнения Дирака в метрике ЧД Рейсснера–Нордстрема [398]. Показано, что существует только одно стационарное регулярное состояния вне горизонта событий ЧД и только одно стационарное регулярное состояние под горизонтом Коши. Нормировочный интеграл волновых функций расходится на обоих горизонтах, если ЧД не экстремальная. Напротив, в случае экстремальной ЧД нормировочный интеграл конечен и стационарное регулярное решение является физически самосогласованным. Наличие квантовых уровней под горизонтом Коши может оказать влияние на испарение ЧД в процессе Хоукинга, а также открывает также принципиальную возможность исследования внутренней структуры ЧД с использованием квантового туннелирования между внешними и внутренними состояниями.

Уравнение Дирака в гравитационном поле общего вида записывается в виде [399] [400], [401]

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0, \quad (4.130)$$

где матрицы Дирака в метрике общего вида $\gamma^\mu = e_{(a)}^\mu \gamma^{(a)}$ выражаются через стандартные матрицы $\gamma^{(a)}$ в пространстве Минковского посредством тетрады $e_{(a)}^\mu$. Удлиненная производная

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu + \Gamma_\mu, \quad (4.131)$$

где

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4} \gamma^{(a)} \gamma^{(b)} e_{(a)}^\nu e_{(b)\nu;\mu}, \quad (4.132)$$

а A_μ — 4-потенциал электромагнитного поля.

Уравнение Дирака в гравитационных полях различного вида исследовалось, например, в [402–404]. Резонансные квазистационарные квантовые состояния в гравитационном поле ЧД скалярных частиц исследовались в работах [405–407]. Аналогичные квантовые состояния для спинорных частиц анализировались в [408–410]. Стационарные состояния заряженных частиц изучались в гравитационном поле ЧД Шварцшильда [411], [412] и электрически заряженной ЧД Рейсснера-Нордстрема [413] в области вне горизонта.

Пространство-время вечной ЧД Рейсснера-Нордстрема представляет собой бесконечную последовательность внутренних вселенных [414]. Существование под горизонтом Коши устойчивых финитных орбит для классических частиц продемонстрировано в работе [415]. В данном разделе мы рассмотрим стационарные квантовые состояния частиц-фермионов внутри и снаружи ЧД и покажем, что при определенных условиях такие состояния и соответствующие им энергетические уровни действительно существуют. ЧД Рейсснера-Нордстрема с заряженной частицей на квантовом уровне напоминает атом водорода. Однако в случае заряженной ЧД уровни электронов могут находиться не только вне ЧД, но и внутри нее – под горизонтом Коши.

Конечная судьба ЧД, испаряющихся в процессе Хоукинга, пока не выяснена. В частности потому, что при приближении массы ЧД к массе Планка $M_{Pl} = \sqrt{\hbar c/G} \approx 10^{-5}$ г. вероятны сильные отклонения от предсказаний классической теории гравитации. Обсуждались различные эффекты, которые могли бы стабилизировать испаряющуюся ПЧД вблизи массы M_{Pl} , см. обзор моделей в [211]. Эти остатки испаряющихся ЧД, называемые “планкионами”, предлагались в качестве частиц-кандидатов ТМ (скрытой массы) Вселенной [213], [139]. ЧД таких масс должны иметь выраженные квантовые свойства, и поэтому обсуждаемые нами квантовые состояния частиц могут играть заметную роль в свойствах этих ЧД, в частности, изменять вероятность их квантового распада. Ранее в работах М.А. Маркова обсуждались так называемые “фридмоны” – полузамкнутые миры, представляющие собой частицеподобные заряженные решения в общей теории относительности [202]. Мы покажем, что может существовать новый тип систем, отдаленно схожих с “фридмонами” – заряженные ЧД с зарядами на внутренних квантовых орбитах. Эти системы также могут

представлять ТМ, если они стабильны и рождались в достаточном количестве в ранние космологические эпохи.

Хотя вечные ЧД с внутренними пространствами, вероятно, не образуются в результате классического гравитационного коллапса, они могут возникать в квантовых процессах при столкновении частиц на ускорителях (эксперименты на Большом адронном коллайдере уже выполняют проверку некоторых из подобных моделей) или при взаимодействии космических лучей сверхвысоких энергий с атмосферой (эти взаимодействия наблюдаются экспериментально на нескольких детекторах), если реализуются теории с дополнительными пространственными измерениями [139]. Поскольку образование таких мини-черных дыр происходит в процессах с участием заряженных частиц, естественно ожидать рождения не нейтральных, а заряженных ЧД Рейсснера–Нордстрема с различными конфигурациями зарядов на орбитах внутри и снаружи ЧД. При этом будет происходить не постепенный коллапс вещества и захват частиц в ЧД, а мгновенное квантовое рождение систем, уже имеющих внутреннюю структуру.

4.2.1. Уравнение Дирака в метрике Рейсснера–Нордстрема

Обсудим метод разделения переменных в уравнении Дирака [402] в случае ЧД Рейсснера–Нордстрема с метрикой

$$ds^2 = f dt^2 - f^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.133)$$

где M — масса ЧД, Q — ее заряд, $f = 1 - 2M/r + Q^2/r^2$. Используем единицы $c = G = \hbar = 1$. При $|Q| < M$ уравнение $f(r) = 0$ имеет два корня $r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ — горизонт событий и горизонт Коши (внутренний горизонт). В случае $|Q| > M$ метрика (4.133) описывает голую сингулярность без горизонта событий, а случай $|Q| = M$ соответствует экстремальной ЧД. Электромагнитный потенциал ЧД с зарядом Q равен $A_{\mu} = (Q/r, 0, 0, 0)$. При использовании тетрады

$$e^{(a)}_{\mu} = \text{diag}(f^{1/2}, f^{-1/2}, r, r \sin \theta) \quad (4.134)$$

уравнение Дирака (4.130) принимает вид:

$$\left[i\gamma^{(0)} \frac{1}{f^{1/2}} \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^{(1)} f^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} + i\gamma^{(2)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + i\gamma^{(3)} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \right. \\ \left. + i\gamma^{(1)} \frac{Q^2 - 3Mr + 2r^2}{2r^3 f^{1/2}} + i\gamma^{(2)} \frac{\cos \theta}{2r \sin \theta} - \gamma^{(0)} \frac{qQ}{r f^{1/2}} - m \right] \psi = 0. \quad (4.135)$$

Следуя методу [402], переопределим волновую функцию

$$\psi = \frac{e^{-iEt} \Psi}{f^{1/4} r \sin^{1/2} \theta} \quad (4.136)$$

и выделим оператор

$$K = \gamma^{(0)} \gamma^{(1)} \left(\gamma^{(2)} \frac{\partial}{\partial \theta} + \gamma^{(3)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad (4.137)$$

имеющий собственные значения $K\Psi = k\Psi$, где $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Угловая часть $Z(\theta, \phi)$ выражается через сферические функции и нас интересовать не будет, но предполагается, что интеграл по телесному углу от $|Z(\theta, \phi)|^2$ равен единице. После указанных подстановок система распадается на две пары эквивалентных уравнений. Записывая Ψ в виде

$$\Psi = Z(\theta, \phi) \begin{bmatrix} g(r) I_2 \\ ih(r) I_2 \end{bmatrix}, \quad (4.138)$$

где I_2 — столбец $(1, 1)^T$, получаем систему уравнений на радиальные волновые функции:

$$\frac{dg}{dr} - \frac{gk}{r f^{1/2}} + \frac{h}{f^{1/2}} \left[\frac{1}{f^{1/2}} \left(E - \frac{qQ}{r} \right) + m \right] = 0, \quad (4.139)$$

$$\frac{dh}{dr} + \frac{hk}{r f^{1/2}} - \frac{g}{f^{1/2}} \left[\frac{1}{f^{1/2}} \left(E - \frac{qQ}{r} \right) - m \right] = 0. \quad (4.140)$$

Эти уравнения можно также получить из уравнений (39) работы [402], если положить $e^\nu = e^{-\lambda} = f$ и преобразовать выражение для A_μ . Ввиду расходимости $f(r) \rightarrow \infty$ на горизонте ЧД, уравнения (4.139), (4.140) относятся к классу дифференциальных уравнений с особыми точками.

Нулевая компонента потока вероятности фермионного поля $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ может быть нормирована на единицу:

$$2 \int_0^{r_-} \frac{|g|^2 + |h|^2}{f(r)} dr = 1, \quad (4.141)$$

где использованы (4.136) и (4.138) и интегрирование $\int j^0 \sqrt{\gamma} d^3r$ выполнялось с пространственным метрическим тензором $\gamma_{\alpha\beta}$. Поток вероятности вдоль радиуса $j^1 = 2i(g^*h - gh^*)$ обращается в нуль, в частности, для действительных g и h , когда нет бегущих волн.

4.2.2. Не экстремальная черная дыра с $|Q| < M$

При $Q \neq 0$ вблизи сингулярности $r \rightarrow 0$ имеем $f \rightarrow Q^2/r^2$, и при $k \neq 0$ (4.139) и (4.140) принимают вид $dg/dr = kg/Q$, $dh/dr = -kh/Q$. Их асимптотические решения

$$g \propto \exp(kr/Q), \quad h \propto \exp(-kr/Q). \quad (4.142)$$

Т.е., решения входят в сингулярность с ненулевой производной. Решения (4.142) справедливы как для не экстремальных, так и для экстремальных ЧД и голых сингулярностей.

Рассмотрим область под внутренним горизонтом Коши $r < r_-$, которая является R -областью по классификации И. Д. Новикова. В ней локальная структура пространства-времени имеет тот же вид, что и вне ЧД, в том числе, t и r имеют обычный смысл времени и радиальной координаты.

Для исследования волновых функций при $r \rightarrow r_-$ введем новую переменную $y = (1 - r/r_-)^{1/2}$, тогда уравнения (4.139) и (4.140) с точностью до $O(y^2)$ примут вид

$$y \frac{dg}{dy} + 2kpyg - 2r_-ph \left[\left(E - \frac{qQ}{r_-} \right) p + my \right] = 0, \quad (4.143)$$

$$y \frac{dh}{dy} - 2kpyh + 2r_-pg \left[\left(E - \frac{qQ}{r_-} \right) p - my \right] = 0, \quad (4.144)$$

где $p = (r_+/r_- - 1)^{-1/2}$. Докажем, что при $r \rightarrow r_-$ регулярное решение системы (4.143), (4.144) существует только в случае

$$E = \frac{qQ}{r_-}. \quad (4.145)$$

Записываем g и h в виде рядов

$$g = y^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n, \quad h = y^w \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n, \quad (4.146)$$

где $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$. Рассуждаем от противного. Допустим, что $E \neq qQ/r_-$. Если $s \neq 0$ и $w \neq 0$, то подставляя (4.146) в (4.143) и (4.144) и выписывая коэффициенты при наименьших степенях y , получаем $s = w$, и тогда

$$a_0 s = 2r_- p^2 b_0 \left(E - \frac{qQ}{r_-} \right), \quad b_0 s = -2r_- p^2 a_0 \left(E - \frac{qQ}{r_-} \right). \quad (4.147)$$

Перемножая эти выражения, имеем

$$s^2 = -4r_-^2 p^4 \left(E - \frac{qQ}{r_-} \right)^2. \quad (4.148)$$

Это условие выполняется только при справедливости (4.145) и $s = 0$, что противоречит сделанному предположению. Пусть теперь одна из величин s или w равна нулю, для примера положим $s = 0$. Тогда из (4.143) получаем $w \geq 1$. Но это значение будет противоречить уравнению (4.144), т.к. при коэффициенте $(E - qQ/r_-)$ степень y равна $s = 0$, а в первом члене показатель степени $w \geq 1$. Аналогично рассматривается случай $w = 0$. Мы опять пришли к противоречию. Следовательно, единственная возможность, когда удовлетворяются уравнения (4.143) и (4.144), — это соотношение (4.145). Таким образом, электрон под внутренним горизонтом ЧД Рейсснера–Нордстрема в стационарном состоянии $\propto e^{-iEt}$ может иметь только одно фиксированное значение энергии. Несмотря на то, что при $r \rightarrow r_-$ решение системы (4.143), (4.144) при условии (4.145) формально существует, оно не может соответствовать физической ситуации из-за расходимости нормировочного интеграла (4.141) на горизонте r_- . Действительно, при условии (4.145) легко получить точные решения уравнений (4.143), (4.144):

$$g = C_1 e^{\lambda y} + C_2 e^{-\lambda y}, \quad (4.149)$$

где C_1 и C_2 — константы, а $\lambda = 2p\sqrt{k^2 + r_-^2 m^2}$, и $h(r)$ выражается через $g(r)$ из (4.143). Для сходимости (4.141) необходимо выбрать $C_1 = -C_2$, но тогда $g \rightarrow const$ при $r \rightarrow r_-$. Аналогично, при $h \rightarrow 0$ получаем $g \rightarrow const$. В обоих случаях (4.141) расходится.

Аналогично случаю ЧД Шварцшильда [411], система (4.143), (4.144) при $E \neq qQ/r_-$ и $y \rightarrow 0$ имеет нерегулярное решение

$$g = C \sin(\alpha \ln y + \delta), \quad h = C \cos(\alpha \ln y + \delta), \quad (4.150)$$

где C и δ — константы, $\alpha = 2r_- p^2 (E - qQ/r_-)$. Но для этого решения $|g|^2 + |h|^2 = |C|^2$, и (4.141) также расходится на горизонте.

Решение на бесконечности $r \rightarrow \infty$ аналогичны случаю обычного атома водорода:

$$g = C_1 e^{-ir\sqrt{E^2 - m^2}} + C_2 e^{ir\sqrt{E^2 - m^2}}, \quad (4.151)$$

где C_1 и C_2 — константы, а $h = -(E + m)^{-1} dg/dr$. Локализованное экспоненциально убывающее решение существует только при $|E| < m$, т. е. при взаимодействии частицы с центральным зарядом в виде притяжения с отрицательным вкладом в E .

Для исследования решения у горизонта $r \rightarrow r_+$ обозначим $y = (r/r_+ - 1)^{1/2}$ и $p = (1 - r_-/r_+)^{-1/2}$. Соответствующие уравнения исследуем аналогично (4.143) и (4.144) и получаем, что имеется лишь единственный уровень энергии

$$E = \frac{qQ}{r_+}, \quad (4.152)$$

который был указан в работе [413], но (4.141) опять расходится. Вывод о расходимости нормировочного интеграла внешнего решения был ранее сделан в [413].

Расходимость указывает на возможность нестационарных решений, которые с течением времени локализуются на горизонтах, а их энергии стремятся к (4.152) и (4.145). Резонансные квазистационарные уровни вне ЧД исследованы в ряде работ, где трудность с поведением на горизонте обходилась с помощью перехода к новой переменной $dr^*/dr = f(r)$, отодвигающего горизонт на $r^* = -\infty$, см. [408]. Однако строго стационарные уровни, которые мы обсуждаем в данном разделе, отсутствуют из-за расходимости на горизонте.

Отличие от водородоподобных атомов обусловлено изменением граничных условий для уравнения Дирака. Наличие горизонтов изменяет вид граничных условий и уравнений, что имеет следствием существование только одного уровня энергии для строго стационарного решения.

4.2.3. Решение для экстремальной черной дыры

В случае экстремальной ЧД $M = |Q|$ горизонты совпадают $r_- = r_+ = r_h = M$. Это изменяет граничное условие и создает условия для существования

физически приемлемого решения. Решение в центре при $r \rightarrow 0$ имеет те же асимптотики (4.142). При $r \rightarrow r_-$ с внутренней стороны вводим новую переменную $y = f^{1/2} = (r_h/r - 1)$, тогда уравнения (4.139) и (4.140) примут вид

$$y^2(1+y)^2 \frac{dh}{dy} - hky(1+y) + gr_h \left[E - \frac{qQ(1+y)}{r_h} - my \right] = 0. \quad (4.153)$$

$$y^2(1+y)^2 \frac{dg}{dy} + gky(1+y) - hr_h \left[E - \frac{qQ(1+y)}{r_h} + my \right] = 0, \quad (4.154)$$

Входящие в (4.154) и (4.153) комбинации величин в обычных физических единицах можно выразить через безразмерные параметры следующим образом

$$mr_h \rightarrow \mu \equiv \frac{mM}{M_{\text{Pl}}^2}, \quad qQ \rightarrow \nu \equiv \frac{qQ}{\hbar c}. \quad (4.155)$$

Также можно записать $\mu = R_g/(2l_C)$, где R_g — шварцшильдовский радиус, а l_C — комптоновская длина волны частицы [411]. Аналогично предыдущему доказывается, что для регулярного решения

$$E = \frac{qQ}{r_h}. \quad (4.156)$$

Тогда при $y \rightarrow 0$ уравнения (4.154) и (4.153) имеют асимптотическое решение

$$g = C_1 y^\varkappa + C_2 y^{-\varkappa}, \quad \text{где } \varkappa = \sqrt{k^2 + \mu^2 - \nu^2}. \quad (4.157)$$

Физическими являются решения с $C_2 = 0$, т.к. часть решения при $C_2 \neq 0$ дает расходящийся вклад в (4.141), подобно рассмотренному выше случаю с не экстремальными ЧД. Тогда

$$h = C_1 y^\varkappa \frac{k + \varkappa}{\mu - \nu}. \quad (4.158)$$

Вклад (4.158) в (4.141) конечен при условии $2\varkappa - 2 > -1$, которое можно переписать в виде

$$k^2 + \mu^2 - \nu^2 > \frac{1}{4}. \quad (4.159)$$

Каждый из найденных квантовых уровней может быть заполнен двумя идентичными частицами-фермионами. Численное решение (4.139) и (4.140) для внутренней области $r < r_h$ показано на Рис. 4.1.

Нерегулярное решение при $E \neq qQ/r_h$ и $y \rightarrow 0$ в данном случае имеет вид

$$g = -C \sin(\alpha/y + \delta), \quad h = C \cos(\alpha/y + \delta), \quad (4.160)$$

где C и δ — константы, $\alpha = r_h(E - qQ/r_h)$. Для этого решения $|g|^2 + |h|^2 = |C|^2$, и (4.141) расходится.

Для исследования случая $r \rightarrow r_h$ с внешней стороны обозначим $y = f^{1/2} = (1 - r_h/r)$. Соответствующие уравнения являются самосогласованными при том же значении (4.156) и условии (4.159) имеют физически приемлемое (с конечным (4.141)) решение

$$g = C_1 y^\nu, \quad h = C_1 y^\nu \frac{k - \varkappa}{\mu + \nu}. \quad (4.161)$$

Решения (4.158) и (4.161) теряют смысл при $\mu = \pm\nu$, соответственно. Поскольку ЧД экстремальная с $M = |Q|$, то условия $\mu = \pm\nu$ означают экстремальность самой частицы $m = |q|$. Для обычных частиц, таких как протон или электрон, это равенство не выполняется. Для них $m \ll |q|$, но само понятие экстремальности теряет смысл из-за вклада квантовых эффектов. Решение уравнения Дирака в метрике голой сингулярности Рейсснера–Нордстрема с $|Q| > M$ было получено численным методом в работе [413].

Если у ЧД имеются внутренний и внешний уровни энергии, то между ними возможны квантовые переходы. В случае не экстремальной ЧД при переходах выделяется энергия

$$\Delta E = E_- - E_+ = qQ \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) = \frac{2Mc^2 q}{Q} \sqrt{1 - \frac{Q^2}{GM^2}}, \quad (4.162)$$

где в последней строке восстановлены физические размерности. Видно, что при $q^2 \sim Q^2 \ll GM^2$ при таких переходах может высвечиваться большая энергия. Выделяемая энергия берется из гравитационной энергии и энергии электростатического взаимодействия электрона и заряда ЧД. Гравитационная часть связана с тем, что гравитация ответственна за локализацию электрона внутри ЧД. В случае экстремальной ЧД $r_+ = r_-$, и энергия не выделяется. Если, кроме того, $q = -Q$, то такая система будет очень слабовзаимодействующей и неизлучающей, что соответствует свойствам ТМ. Если рассматриваемые системы

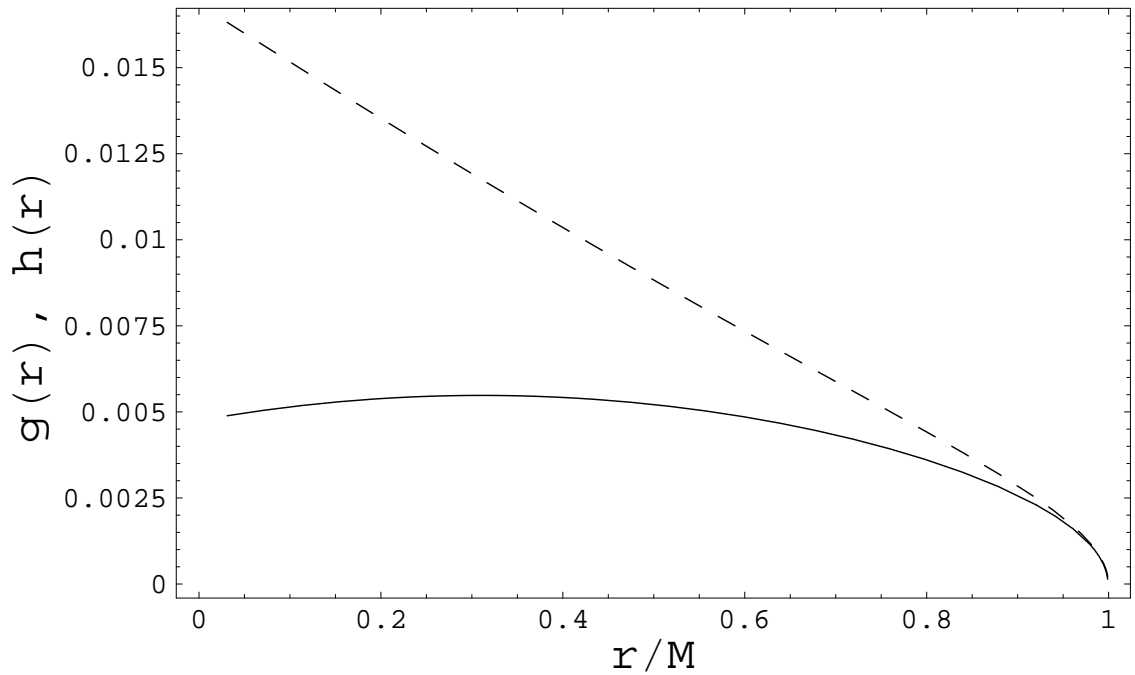


Рис. 4.1. Волновые функции $g(r)$ (сплошная кривая) и $h(r)$ (пунктирная) под горизонтом экстремальной ЧД при $k = 1$. Для примера выбраны параметры $\mu = 1$, $\nu = -0.5$, и решения нормированы с помощью (4.141).

являются частицами ТМ, то спонтанные переходы могли бы производить высокоэнергетичные частицы, возможно, дающие некоторый вклад в космические лучи сверхвысоких энергий. Излучение систем двух связанных фридмонов рассматривалось также в [204]. Для экстремальной ЧД подобного выделения энергии не будет, т. к. $\Delta E = 0$. Переходы между уровнями, в том числе, и через горизонт могут происходить путем квантового туннелирования с вероятностью $\propto \exp(-2\text{Im}S)$, где действие $S = \int dr p_r(r)$ вычисляется по квазиклассической траектории [416], [417].

4.2.4. Атомарные ЧД как частицы темной материи

В данном разделе мы обсуждаем атомарные ЧД, которые аналогичны атомам с заряженными ЧД в качестве атомных ядер и электронами на внутренних (внутри горизонта Коши) квантовых орбиталях. Квантовые уровни электронов вне горизонта событий ЧД исследовались в [405–413, 418–420]. Эти системы с электронами на внутренних орбиталях также могут представлять частицы ТМ. Соответствующие ЧД могут представлять ТМ даже с нескомпенсирован-

ными зарядами, эта модель была предложена в [412] для случая электронов на внешних уровнях. Похожая идея, но для нулевого полного заряда $q = -Q$ и для электронов на внутренних уровнях была предложена в [398]. В последнем случае полный заряд всех электронов на внутренних орбиталях равен заряду самой ЧД, который фигурирует в метрике Рейсснера–Нордстрема. В случае скомпенсированного заряда эти системы выглядят для внешнего наблюдателя как нейтральные ЧД с метрикой Шварцшильда. Нейтральные ЧД очень слабо (только гравитационно) взаимодействуют с окружающим веществом, поэтому они являются хорошими кандидатами на роль ТМ.

ПЧД могут формироваться на космологической стадии радиационного доминирования из адиабатических возмущений плотности [137, 138, 148], а также на ранних пылевидных стадиях [118, 299]. Хотя эти ЧД образуются в процессе классического гравитационного коллапса, их конечная стадия испарения – это преимущественно квантовый эффект. Согласно [421], самую последнюю стадию испарения ЧД нужно рассматривать не как постепенный процесс, а как квантовый скачок в новое состояние. Мы предполагаем, что в результате таких скачков могут образовываться атомарные ЧД с электронами на внутренних орбиталях. Т.к. электроны не захватываются внутрь ЧД, а вся система сразу образуется в результате квантового скачка.

Мы предполагаем, что уровни энергии внутри заряженной ЧД являются стабильными. Это означает, в частности, что внутри ЧД имеется последовательность внутренних Вселенных, как в идеализированных вечных ЧД. Возможным механизмом возникновения внутренних вселенных является их динамическое образование при гравитационном коллапсе, обсуждавшееся в [422]. Квантовое рождение ЧД на ускорителях частиц при достигнутых энергиях может иметь место в некоторых теориях при наличии дополнительных измерений [139].

Базовое условие существования атома или другой квантовой системы в квазиклассическом приближении в плоском пространстве-времени есть геометрическое условие на длину волны де Бройля $\lambda \leq a$, где a – характерный размер потенциальной ямы. Сильная кривизна пространства-времени, особенно вблизи горизонтов ЧД, принципиальным образом изменяет это условие. Физическим объяснением нарушения указанного выше условия является бесконечное рас-

тяжение физических длин $dl^2 = (-g_{\alpha\beta} + g_{0\alpha}g_{0\beta}/g_{00}) dx^\alpha dx^\beta$ вблизи горизонта Коши r_- . Действительно, физическое расстояние от центра экстремальной ЧД Рейсснера–Нордстрема ($r_- = r_+ = M$) до некоторого радиуса r равно

$$l = \int_0^r f^{-1/2} dr = r + M \ln \left(1 - \frac{r}{M} \right) \quad (4.163)$$

Эта величина расходится при $r \rightarrow M$. Таким образом, под горизонтом Коши имеется достаточно объема для частицы с любой длиной волны де Бройля. Возможность локализации электронов под горизонтом Коши выше было продемонстрировано нами путем прямого решения уравнения Дирака в метрике заряженной ЧД даже далеко от квазиклассического режима. Отдельный вопрос представляет собой вероятность и сама возможность захвата частицы с $\lambda \gg r_g$ черной дырой. Однако мы не рассматриваем захват и падение частиц в ЧД, а рассматриваем возможность квантового образования систем с уже имеющимися электронами на внутренних орбиталях под горизонтом.

Заметим, что температура Хоукинга экстремальной ЧД равна нулю, поэтому экстремальные ЧД не испытывают квантового испарения, и в этом смысле они являются стабильными частицами ТМ. Действительно, хоукинговская температура заряженной ЧД

$$T_H \propto \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (4.164)$$

равна нулю, если $Q = M$. Тем не менее, вопрос о стабильности экстремальных атомарных ЧД относительно квантового распада пока не выяснен.

Рассмотрим более подробно формирование ПЧД, которые могли бы породить атомарные ЧД. Рассматриваем адиабатические возмущения плотности, возникающие на стадии инфляции. Для того, чтобы ПЧД формировались в достаточно большом количестве, в спектре возмущений на некотором масштабе должен иметься дополнительный пик. Высоту пика для неиспаряющихся ЧД (масса $> 10^{15}$ г) может быть найдена из того условия, что такие ПЧД составляют всю ТМ. Однако в нашем случае только остатки испарившихся первичных ЧД дают вклад в ТМ (испущенное излучение испытало красное смещение), поэтому расчет высоты пика должен быть модифицирован. Пусть $M_{\text{РВН}}$ – начальная масса первичной ЧД в момент ее формирования $t_f \simeq GM_{\text{РВН}}/c^2$, и

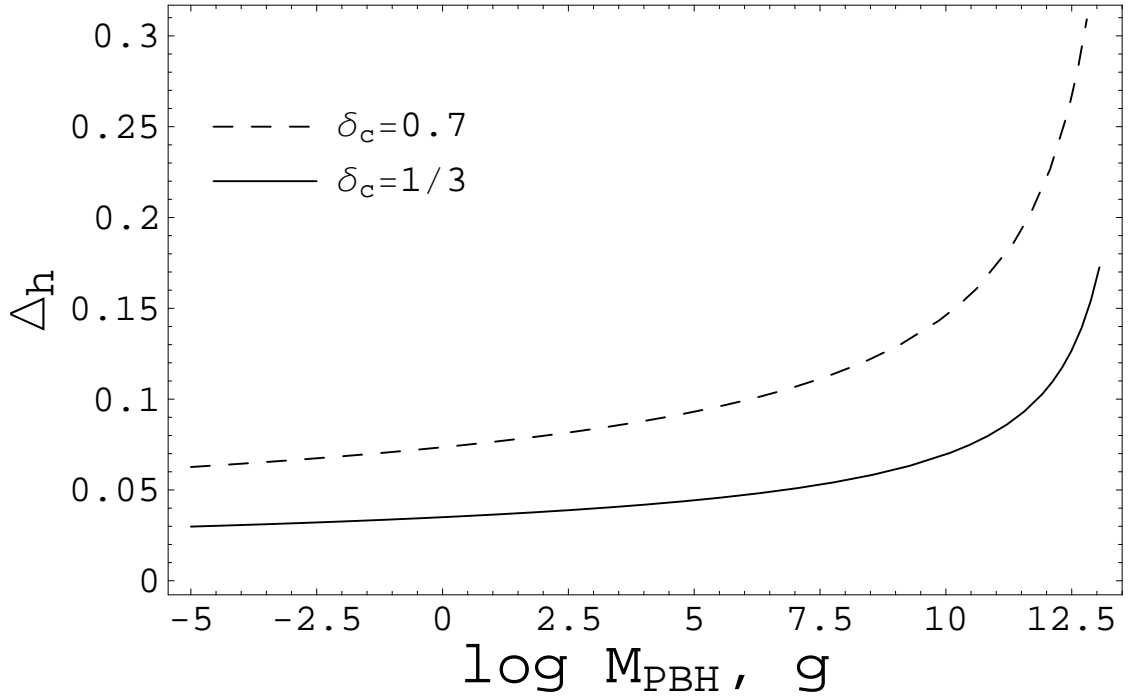


Рис. 4.2. Зависимость среднеквадратичной величины возмущения плотности Δ_h на масштабе массы $M_{\text{РВН}}$, требуемой для объяснения ТМ остатками от испарения ПЧД, в зависимости от начальной массы ПЧД $M_{\text{РВН}}$ для величин порога образования ПЧД $\delta_c = 1/3$ (сплошная кривая) и $\delta_c \simeq 0.7$ (штрихованная кривая).

после испарения остаются остатки с планковской массой. С учетом этого современный космологический параметр плотности [211]

$$\Omega_m \simeq \beta \frac{a(t_{\text{eq}})}{a(t_f)} \frac{M_{\text{Pl}}}{M_{\text{РВН}}}, \quad (4.165)$$

где Δ_h – среднеквадратичная величина возмущения на масштабе массы $M_{\text{РВН}}$, $\delta_c = 1/3$, согласно аналитическим расчетам [148], или $\delta_c \simeq 0.7$, как это было получено в модели критического гравитационного коллапса,

$$\beta = \int_{\delta_c}^1 \frac{d\delta}{\sqrt{2\pi}\Delta_h} e^{-\delta^2/(2\Delta_h^2)} \simeq \frac{\Delta_h}{\delta_c \sqrt{2\pi}} e^{-\delta_c^2/(2\Delta_h^2)}. \quad (4.166)$$

Решая методом итераций систему уравнений (4.165) и (4.166) с $\Omega_m = 0.3$, получаем зависимость Δ_h от $M_{\text{РВН}}$, которая показана на Рис. 4.2.

При $M_{\text{РВН}} \geq 10^{13}$ г система (4.165) и (4.166) не имеет решений, поэтому рассматриваемый сценарий ограничен только малыми массами $M_{\text{РВН}}$. Таким образом, чтобы произвести материю в виде планковских остатков ЧД с $\Omega_m \approx$

0.3, как это требуется для объяснения ТМ, необходимы возмущения плотности со среднеквадратичной величиной, показанной на Рис. 4.2.

Взаимодействие нейтральных атомарных ЧД с обычной материей происходит лишь гравитационно и очень слабо [138]. Это обусловлено экстремально малым сечением гравитационного взаимодействия $\sim \pi r_g^2 (c/v)^2 \sim 3 \times 10^{-66} (c/v)^2 \text{ см}^2$, где v – относительная скорость, которая в гало Галактике имеет типичные величины $(c/v)^2 \sim 10^6$. Можно сравнить это сечение, например, с сечением взаимодействия нейтрино с ядрами $\sim 10^{-43} - 10^{-34} \text{ см}^2$.

ЧД могут образоваться заряженными даже при классическом коллапсе. Но нейтрализация в процессе аккреции может уменьшить начальный заряд до величины $Z \simeq 30$ [138]. Остающийся заряд взаимодействует с обычным веществом во Вселенной аналогично тяжелым атомным ядрам [138]. Таким образом, заряженная атомарная ЧД испытывает сильные рассеяния и диссипацию кинетической энергии. Это создает некоторые трудности для таких систем, если рассматривать возможность представления ими ТМ. Решение этой проблемы может заключаться в формировании систем молекулярного типа в комбинации с заряженными частицами барионной материи, и этот сценарий известен под названием “компонитной ТМ” [424].

В этом разделе мы рассмотрели новый вид кандидатов ТМ “атомарные ЧД”: заряженная ЧД Рейсснера–Нордстрема с электронами на квантовых уровнях внутри горизонта Коши. Если заряд ЧД нейтрализуется зарядами внутренних электронов, то эти системы для внешнего наблюдателя будут выглядеть электрически нейтральными ЧД.

4.3. Задача Вайдья в диагональных координатах

В данном разделе исследован переход от координат (v, r) к диагональным координатам в задаче об аккреции излучения на ЧД (задача Вайдья). Рассматриваемые эффекты могут быть важны при рассмотрении аккреции на ПЧД и в других процессах в ранней Вселенной. Ниже получены точные решения в случае линейной массовой функции и показано, что даже в области вне горизонта видимости одного набора диагональных координат недостаточно для покрытия

всей области изменения исходных координат (v, r) , а требуются как минимум три набора. Их области изменения разделены поверхностями с особенностями метрики $g_{00} = 0$ и $g_{00} = \infty$. Следовательно, в диагональных координатах вблизи горизонта имеется узкая область (ее ширина пропорциональна темпу роста массы ЧД), в которой метрика ЧД качественно отличается от метрики Шварцшильда и не может быть получена как ее малое возмущение.

Стандартная метрика Вайдья, описывающая систему сферически симметрично распределенных и радиально движущихся фотонов, записывается в виде [427–429]

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2m(z)}{r} \right] dz^2 + 2dzdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (4.167)$$

Массовая функция $m(z)$ может соответствовать аккреции, т.е. радиальному потоку внутрь при $z = -v$ или излучению, т.е. потоку вовне при $z = u$ [231], где u – запаздывающая световая координата, а v – опережающая световая координата. Ниже используем единицы измерения $c = 1, G = 1$.

Метрика Вайдья (4.167) – одно из точных решений в общей теории относительности – применяется для описания квантового испарения ЧД [216–223] или излучения астрофизических объектов [224–228]. Однако, существует проблема интерпретации результатов, полученных в этой метрике, поскольку она записана через координаты, в которых z не является непосредственно физически измеримой величиной. В некоторых случаях можно найти формулы перехода к дважды нулевым координатам (v, u) [230], но переход к более физическим диагональным координатам в общем случае представляет математические трудности, и явный вид такого преобразования координат неизвестен [231].

Мы рассматриваем линейную массовую функцию $m(z) = -\alpha z + m_0$, $dm/dz = -\alpha = const$, где параметр $\alpha > 0$ характеризует темп аккреции или излучения. Используя линейную массовую функцию, мы решаем задачу в диагональных координатах полностью аналитически, вычисляя все метрические коэффициенты. Метрика Вайдья (4.167) с линейной массовой функцией уже рассматривалась в ряде работ в различных аспектах [216, 217, 233, 234], однако в них не были получены решения в диагональных координатах. Первое такое решение получено нами в работе [232], где использовались специальные координаты η и y (они обсуждаются ниже в разделе 4.3.6). В данном разделе будут получены

решение также и для другого, наиболее “физического” выбора координат (t, r) , называемых координатами кривизн [6].

Исходная метрика Вайдья (4.167) геодезически не полна. Одно из ее расширений было сделано В. Израэлем [235] для глобальной геометрии вечного пространства-времени с бесконечными лестницами из черных и белых дыр. В работах [218, 236] строились дополнительные области пространства-времени, а в [229, 237, 238] применялись специальные массовые функции. Использование новых диагональных координат позволяет выявить глобальную структуру пространства-времени для задачи Вайдья с линейной массовой функцией $m(z)$ (с физическим ограничением $m \geq 0$).

4.3.1. Решение в координатах кривизн (t, r)

Координатами кривизн называют координаты (t, r, θ, ϕ) , в которых метрика имеет следующий диагональный вид [6, 396]

$$ds^2 = e^{\nu(t,r)} dt^2 - e^{\lambda(t,r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.168)$$

или, переобозначая коэффициенты,

$$ds^2 = f_0(t, r) dt^2 - \frac{dr^2}{f_1(t, r)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.169)$$

Введем функцию $M_1(t, r)$, связанную с λ и $f_1(t, r)$ следующим образом

$$e^{-\lambda(t,r)} = f_1(t, r) = 1 - \frac{2M_1(t, r)}{r}. \quad (4.170)$$

Будем искать преобразование от координат исходной метрики Вайдья (4.167) к диагональным координатам:

$$z = z(t, \tilde{r}), \quad r = \tilde{r}. \quad (4.171)$$

Подставляя (4.171) в (4.167) и приравнивая возникающие коэффициенты соответствующим коэффициентам в (4.169), получаем систему уравнений

$$f_0 = f_1 \dot{z}^2, \quad z' = -\frac{1}{f_1}. \quad (4.172)$$

Преобразуем второе из этих уравнений к виду

$$z' = -\frac{1}{1 - \frac{2m(z)}{r}} \quad (4.173)$$

и умножим его на dm/dz :

$$\frac{dm}{dz} z' = M_1' = -\frac{\frac{dm}{dz}}{1 - \frac{2m(z)}{r}}. \quad (4.174)$$

Далее будем рассматривать случай линейной массовой функции

$$m(z) = -\alpha z + m_0. \quad (4.175)$$

При аккреции $z = -v$ и $m = \alpha v + m_0$. В случае исходящего излучения $z = u$ и $m = -\alpha u + m_0$. Поэтому в обоих случаях $\alpha > 0$ и $dm/dz = -\alpha$. Тогда (4.174) принимает вид

$$M_1' = \frac{\alpha}{1 - \frac{2M_1}{r}}. \quad (4.176)$$

Обозначив

$$y = 1 - \frac{2M_1(t, r)}{r}, \quad (4.177)$$

запишем решение уравнения (4.176) в следующем неявном виде

$$-\int \frac{y dy}{y^2 - y + 2\alpha} = \ln \frac{r}{r_0} + \phi(t). \quad (4.178)$$

Рассмотрим сначала случай $\alpha < 1/8$. Взяв интеграл в (4.178), получим

$$\frac{r}{r_0} B(t) = \Psi(y), \quad (4.179)$$

где обозначено

$$\Psi(y) = |y - y_1|^{\frac{y_1}{y_2 - y_1}} |y - y_2|^{-\frac{y_2}{y_2 - y_1}} \quad (4.180)$$

и

$$y_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 8\alpha}}{2}, \quad y_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 8\alpha}}{2}, \quad (4.181)$$

а $B(t) = e^{\phi(t)} > 0$ – неизвестная пока функция.

Найдем коэффициент f_0 . Дифференцируя (4.179) по t и подставляя

$$\dot{y} = -\frac{2\dot{M}_1}{r} = \frac{2\alpha\dot{z}}{r}, \quad (4.182)$$

получаем

$$\frac{r^2}{2\alpha r_0^2} = \frac{d\Psi}{dy} \frac{\dot{z}}{B(t)}. \quad (4.183)$$

Функция $\Psi(y)$ имеет особые точки $y = y_1$ и $y = y_2$, поэтому область изменения $-\infty < y < 1$ делится на четыре части

$$-\infty < y < 0, \quad 0 < y < y_1, \quad y_1 < y < y_2, \quad y_2 < y < 1, \quad (4.184)$$

в каждой из которых необходимо выполнять отдельный расчет. Отметим, что свободные параметры r_0 и t_0 могут быть разными в разных областях, а связь между ними должна устанавливаться путем сшивки решений. Время допускает следующее переопределение $d\tilde{t}^2 = \dot{B}^2 dt^2$, поэтому выбираем

$$\dot{B} = \pm\alpha, \quad B(t) = \pm\alpha(t - t_0), \quad (4.185)$$

где знак в каждом конкретном случае находится из условия $\dot{z} > 0$:

$$B(t) = \begin{cases} \alpha(t - t_0) & y < 0, \\ -\alpha(t - t_0) & 0 < y < y_1, \\ \alpha(t - t_0) & y_1 < y < y_2, \\ -\alpha(t - t_0) & y > y_2. \end{cases} \quad (4.186)$$

Во всех областях (4.184) из (4.172) получается одинаковое выражение:

$$f_0 = y\dot{z}^2 = \frac{1}{y} |y - y_1|^{\frac{2y_2}{y_2 - y_1}} |y - y_2|^{-\frac{2y_1}{y_2 - y_1}}. \quad (4.187)$$

Таким образом, нами найдены в параметрическом виде все метрические коэффициенты: (4.187), $f_1 = y$ и (4.179), где y – параметр.

Дифференциальное преобразование к новым координатам записывается в форме

$$dz(t, r) = f_0^{1/2} f_1^{-1/2} dt - f_1^{-1} dr. \quad (4.188)$$

В работе [231] было указано, что выражение, аналогичное (4.188), может быть получено с помощью интегрирующего множителя. Важно отметить, что и в новой метрике M_1 является функцией только z , т.е., $M_1(t, r) = M_1(z)$, где $z = z(t, r)$. Некоторые сечения функции $z = -v(t, r)$ (случай аккреции) плоскостями $t = const$ показаны на Рис. 4.3.

Опишем предельный переход к метрике Шварцшильда при $\alpha \rightarrow 0$. На Рис. 1 выше точки В находится метрика Шварцшильда, поэтому вне вещества

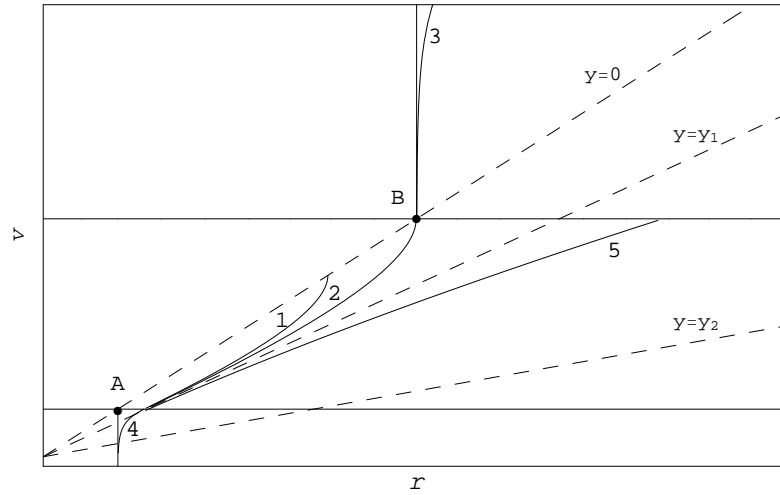


Рис. 4.3. Сплошными линиями 1, 2 и 5 (это линии постоянного t) показаны различные ветви решения (4.179). Штрихованные линии разделяют разные области изменения параметра y . Предполагается, что выражение (4.175) справедливо выше точки А и ниже точки В, а в других областях $M_1 = const$. Т.е., на ЧД падает сферический слой (толстая оболочка) излучения, которая заключена между горизонтальными линиями, проходящими через А и В. Гравитационный радиус показан вертикальным лучом, идущим вниз от точки А, отрезком АВ и вертикальным лучом, идущим вверх от точки В. Ниже А и выше В справедливо решение Шварцшильда (4.227), но с различными постоянными массами M_1 . Для примера эти решения показаны кривыми 3 и 4, считыми с решением 2 в области внутри оболочки. В точке В имеет место разрыв решения: ниже этой точки частицы уходят под гравитационный радиус за конечное время t , а выше этой точки при $t \rightarrow \infty$ фотоны приближаются к гравитационному радиусу, никогда не пересекая его. Линия 2 показывает последнюю линию постоянного времени перед разрывом решения, а линия 1 показывает линию постоянного времени для некоторого более раннего момента t .

находится асимптотически плоская бесконечность. Внутри вещества между точками А и В при $\alpha \rightarrow 0$ имеем $y_1 \rightarrow 2\alpha \rightarrow 0$, $y_2 \rightarrow 1 - 2\alpha$, $-2\beta_2 \rightarrow 2$, $-2\beta_2 \rightarrow -4\alpha$ и поэтому (4.187) имеет асимптотический вид (напомним, что $y = f_1$)

$$f_0 \rightarrow f_1 \left| \frac{2M_1}{r} + 2\alpha \right|^{-4\alpha}. \quad (4.189)$$

На любом радиусе $r = const$ при $\alpha \rightarrow 0$ получаем $|\dots|^{-4\alpha} \rightarrow 1$, и в итоге $f_0 \rightarrow f_1$, т.е. воспроизводится метрика Шварцшильда. Отклонение от метрики Шварцшильда имеет место только в области шириной $\sim \alpha$ вблизи гравитационного радиуса.

4.3.2. Световые лучи в диагональной метрике, время движения фотонов

Рассмотрим траектории световых лучей в метрике Вайдья в случае аккреции ($z = -v$). Исходящие нулевые геодезические определяют горизонт событий. Для линейного вида функции $M_1(z)$ световые геодезические в координатах (v, r) исследовались в работе [216]. Из $ds^2 = 0$ в метрике (4.167) для исходящего луча получаем уравнение

$$2rdr = [r - 2M_1(v)]dv. \quad (4.190)$$

Используя (4.188), можно показать, что в координатах (t, r) это уравнение имеет вид $dt = dr/\sqrt{f_0 f_1}$. Структура решений (4.190) для r аналогична структуре приведенных выше решений (4.179) и (4.180) для сечений $t = \text{const}$. А именно, уравнения движения исходящего луча в параметрической форме имеют вид

$$t(y) = \int \frac{dr}{\sqrt{f_0 f_1}}, \quad (4.191)$$

$$r(y) = |y - y_3|^{\frac{y_3}{y_4 - y_3}} |y - y_4|^{\frac{-y_4}{y_4 - y_3}} D, \quad (4.192)$$

где

$$y_3 = \frac{1 - \sqrt{1 - 16\alpha}}{2}, \quad y_4 = \frac{1 + \sqrt{1 - 16\alpha}}{2}, \quad (4.193)$$

параметр $y = f_1$ тот же, что и раньше, а константа $D > 0$ нумерует лучи. Точный вид функции $t(y)$ нам далее не потребуется. Существует сепаратриса, разделяющая ограниченные по радиусу и неограниченные решения. Т.е., для каждого радиуса можно найти момент времени такой, что при излучении фотона раньше этого момента, рассматриваемый фотон может уйти на бесконечность. Если же фотон излучен позже, то он достигает лишь конечного радиуса. В разделе 4.3.6 это поведение световых геодезических станет более очевидным, и там же мы рассмотрим геометрический смысл поверхностей $y = y_3$, $y = y_4$.

Если линейное приближение $M_1(z)$ заканчивается при некотором z , и затем гравитационный радиус постоянен, то горизонтом событий в координатах (z, r) является исходящий луч, который проходит через точку сшивки этих двух областей – через точку В на Рис. 4.3.

Рассмотрим теперь входящий (движущийся к центру) фотон и найдем его время движения до пересечения гравитационного радиуса. Заметим, что это пересечение происходит под горизонтом событий и недоступно наблюдению извне горизонта событий. Входящий луч имеет уравнение $v = const$, которое в координатах (t, r) записывается в виде $dt = -dr/\sqrt{f_0 f_1}$. Подставляя $f_1 = y$ и найденное из (4.187) f_0 , получаем

$$\begin{aligned} \Delta t &= 2M_1 \int_y^{y_i} \frac{dx |x - y_1|^{\frac{-y_2}{y_2 - y_1}} |x - y_2|^{\frac{y_1}{y_2 - y_1}}}{(1 - x)^2} = \\ &= M_1 (1 - x)^{-2} F_1 \left[2; \frac{y_2}{y_2 - y_1}, -\frac{y_1}{y_2 - y_1}; 3, \frac{1 - y_1}{1 - x}, \frac{1 - y_2}{1 - x} \right] \Bigg|_{x=y}^{x=y_i}, \end{aligned} \quad (4.194)$$

где F_1 – гипергеометрическая функция Аппеля, y_i и y – начальное и конечное значение параметра $y = 1 - 2M_1/r$. Учтено, что рассматривается луч имеет $v = const$, поэтому $M_1(v)$ можно вынести из-под интеграла. Из (4.194) видно, что световой луч пересекает поверхность $y = y_2$ за конечное время Δt , а поверхность $y = y_1$ за бесконечное время. Поэтому луч может пересечь гравитационный радиус $y = 0$, если начальная точка его траектории расположена при $y < y_1$. Отметим, что аналогом $\Delta t \rightarrow \infty$ является бесконечное время пересечения гравитационного радиуса ЧД Шварцшильда пробными частицами. Отличие рассматриваемого здесь случая состоит в том, что $\Delta t \rightarrow \infty$ имеет место на поверхности $y = y_1$ вне гравитационного радиуса, что обусловлено влиянием на метрику аккрецируемого вещества. В пределе медленной аккреции $\alpha \rightarrow 0$ (но $\alpha \neq 0$) при $y_i \ll y_1$, $y = 0$ время движения до пересечения горизонта $y = 0$

$$\Delta t \simeq -2M_1 \ln \alpha. \quad (4.195)$$

При предельном переходе к метрике Шварцшильда с $\alpha = 0$ левая ветвь решения вырождается, и необходимо выбирать правую ветвь решения $y_1 < y < y_2$. Это связано с тем, что вблизи гравитационного радиуса аккреция качественно меняет геометрию. Если выбрать правую ветвь, то $y_1 \rightarrow 0$, $y_2 \rightarrow 1$, $y_1/(y_2 - y_1) \rightarrow 0$, $y_2/(y_2 - y_1) \rightarrow -1$, и (4.194) переходит в точное выражение для времени движения фотона в метрике Шварцшильда.

4.3.3. Геометрический смысл поверхностей $y = y_1$ и $y = y_2$

Чтобы прояснить происхождение линий $y = y_1, y_2, y_3, y_4$, которые отсутствуют в обычном решении Шварцшильда при $\alpha = 0$, изучим поверхности $y = const$. Вычислим квадрат нормали к этим поверхностям Y . Т.к. он есть инвариант, это можно сделать в исходной метрике Вайдья (4.167).

$$Y = \gamma^{ik} y_{,i} y_{,k} = \frac{(1-y)^3}{4m^2} (y-y_3)(y-y_4). \quad (4.196)$$

Вычислим Y вдоль исходящего светового луча, подставив в (4.196) выражение $m = r(1-y)/2$ и $r(y)$ из (4.192)

$$Y = \frac{(1-y)}{D^2} |y-y_3|^{\frac{y_4-3y_3}{y_4-y_3}} |y-y_4|^{\frac{3y_4-y_3}{y_4-y_3}} \text{sign}(y-y_3)\text{sign}(y-y_4). \quad (4.197)$$

Видно, что отсутствуют особенности на линиях $y = y_1$ и $y = y_2$. То есть, обнаруженные ранее особенности при $y = y_1$ и $y = y_2$ имеют чисто координатную природу, они соответствуют окончанию действия систем координат на поверхностях $y = y_1$ и $y = y_2$, и для покрытия всего пространства-времени в диагональных координатах требуется несколько наборов координат. На линиях $y = y_3$ и $y = y_4$ инвариант Y меняет знак и может обращаться в нуль и в бесконечность. Если двигаться вдоль входящего светового луча, когда $m = const$, то (4.196) обращается в нуль при $y = y_3$ и $y = y_4$. Тем не менее, линии $y = y_3$ и $y = y_4$ также не являются физическими особенностями метрики, это устранимые координатные особенности, как мы покажем ниже в разделе 4.3.6.

Для того, чтобы прояснить физический смысл поверхностей $y = y_1$ и $y = y_2$, вычислим тензор энергии импульса. Уравнения Эйнштейна в метрике (4.168)

имеют вид [396]

$$8\pi T_0^1 = -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r}, \quad (4.198)$$

$$8\pi T_0^0 = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (4.199)$$

$$8\pi T_1^1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (4.200)$$

$$8\pi T_2^2 = \frac{e^{-\nu}}{2} \left[\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}}{2} (\dot{\lambda} - \dot{\nu}) \right] \quad (4.201)$$

$$- \frac{e^{-\lambda}}{2} \left[\nu'' + (\nu' - \lambda') \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{1}{r} \right) \right]. \quad (4.202)$$

Обозначим $F \equiv \sqrt{f_0 f_1}$. Для радиального движения фотонов к центру имеем $k^\mu = (a, b, 0, 0)$, $a > 0$, $g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = f_0 a^2 - b^2/f_1 = 0$, $k^\mu = a(1, -F, 0, 0)$, $k_\mu = a(f_0, F/f_1, 0, 0)$. Тензор энергии-импульса $T_\mu^\nu = \gamma k_\mu k^\nu$, $T_0^0 = \gamma a^2 f_0$, $T_0^1 = -\gamma a^2 f_0 F$. Из (4.198) получаем

$$\gamma a^2 = \frac{\dot{M}_1}{4\pi r^2 f_0 F}, \quad T_0^0 = -T_1^1 = \frac{\dot{M}_1}{4\pi r^2 F}, \quad T_0^1 = -\frac{\dot{M}_1}{4\pi r^2} \quad (4.203)$$

Случай $\dot{M}_1 > 0$ соответствует аккреции, а $\dot{M}_1 < 0$ – излучению. Подставляя в (4.199) получаем:

$$M_1' = \frac{\dot{M}_1}{F} = 4\pi r^2 T_0^0. \quad (4.204)$$

Обратимся теперь к частному случаю линейной зависимости $M_1(z)$. Подставляя в (4.203)

$$\dot{M}_1 = \frac{dm}{dz} \dot{z} = -\alpha \frac{f_0^{1/2}}{f_1^{1/2}} \quad (4.205)$$

и поднимая индекс, получаем

$$T^{00} = \frac{\alpha}{4\pi r^2 f_0 f_1}, \quad T^{01} = -\frac{\alpha}{4\pi r^2 f_0^{1/2} f_1^{1/2}}. \quad (4.206)$$

Рассмотрим эти выражения вдоль входящего луча, тогда $v = const$, $m = const$ и $r^2 = (2m)^2/(1-y)^2$ является регулярной при $y = y_1$ и $y = y_2$ функцией. В то же время, полученное из (4.187) выражение (напомним, что $f_1 = y$)

$$f_0 f_1 = |y - y_1|^{\frac{2y_2}{y_2 - y_1}} |y - y_2|^{-\frac{2y_1}{y_2 - y_1}} \quad (4.207)$$

имеет особенности в точках $y = y_1$ и $y = y_2$. Из уравнения светового луча получаем $f_0^{1/2} f_1^{1/2} = -dr/dt$, поэтому вдоль входящего луча

$$T^{00} = \frac{\alpha}{4\pi r^2 (dr/dt)^2}, \quad T^{01} = \frac{\alpha}{4\pi r^2 (dr/dt)}. \quad (4.208)$$

Таким образом, компоненты тензора энергии-импульса T^{00} и T^{01} обращаются в нуль при $y = y_2$ и в бесконечность при $y = y_1$ по кинематической причине — из-за наличия предельных точек $dr/dt = 0, \infty$ для движения света в координатах (t, r) . Для фотонов поверхность $y = y_1$ является поверхностью бесконечного красного смещения ($g_{00} \rightarrow 0$), аккреция привела к расщеплению бывшего горизонта Шварцшильда, а поверхность $y = y_2$ является поверхностью бесконечного голубого смещения ($g_{00} \rightarrow \infty$). Появление этой поверхности качественно отличает полученную метрику от метрики Шварцшильда. Линии $y = y_1$ и $y = y_2$ являются пространственно-подобными. Подчеркнем, что расходимость T^{00} и T^{11} не связана с наличием физической каустики, а имеет чисто координатное происхождение. На линиях $y = y_1$ и $y = y_2$ заканчивается действие систем координат, и в координатах появляются особенности. Эти особенности обусловлены характером только временной координаты t , т.к. радиус r , являясь инвариантом, не претерпевает изменения на линиях $y = y_1$ и $y = y_2$. В рамках используемой здесь координатной системы избавиться от этих особенностей невозможно. Вдоль исходящего луча имеются дополнительные особенности при $y = y_3$ и $y = y_4$, которые мы исследуем в разделе 4.3.6 путем выбора других координат.

Изучим координатные особенности с помощью уравнений девиации геодезических для массивных частиц

$$\frac{D^2 v^\mu}{ds^2} = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} u^\nu u^\rho v^\sigma, \quad (4.209)$$

где s — интервал, u^μ — касательный вектор геодезической, а v^μ — вектор, разделяющий две геодезические. В диагональной системе координат (4.169) возьмем чисто пространственный вектор $v^\mu = (0, v, 0, 0)$, тогда в исходной метрике Вайдья (4.167) он равен $v^\mu = (v/f_1, v, 0, 0)$. У вектора u^μ в обеих системах $u^1 = u$. Вычислим правую часть (4.209) сначала в метрике Вайдья (4.167), а затем преобразуем ее в диагональную метрику (4.169). В метрике Вайдья в (4.209) войдет

только одна компонента тензора кривизны

$$R_{0110} = \frac{2m}{r^3}, \quad (4.210)$$

а другие компоненты содержат угловые индексы и вклада не дадут. Для пространственной части в диагональных координатах получаем

$$R^1_{\nu\rho\sigma} u^\nu u^\rho v^\sigma = \frac{2mu^2v}{r^3 f_1}. \quad (4.211)$$

Рассмотрим входящую геодезическую с $u < 0$ в метрике Вайдья. Уравнение ее радиальной компоненты

$$\frac{du}{ds} + \Gamma^1_{00}(u^0)^2 + \Gamma^1_{01}u^0u^1 = 0, \quad (4.212)$$

где

$$\Gamma^1_{00} = \frac{-r^2(dm/dz) - 2m^2 + rm}{r^3}, \quad \Gamma^1_{01} = -\frac{m}{r^2}, \quad (4.213)$$

а u^0 находится из нормировки $u^\mu u_\mu = 1$ в виде

$$u^0 = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + f_1}}{f_1}. \quad (4.214)$$

Рассмотрим уравнение (4.212) в предельном случае $u \rightarrow 0$, тогда

$$\frac{du}{ds} \rightarrow -\frac{(r - r_-)(r - r_+)}{r^3 f_1}, \quad (4.215)$$

где

$$r_\pm = \frac{m}{2\alpha} \left(\pm\sqrt{1 + 8\alpha} - 1 \right). \quad (4.216)$$

Можно показать, что $r_- < 0$, а $r_+ < 2m$ при $\alpha > 0$, поэтому $du/ds < 0$ при $r > 2m$. Т.к. $u < 0$, то это означает, что u остается отрицательной и в области $r > 2m$ в нуль не обращается. Следовательно, на границах действия координатных систем $y \rightarrow y_1$ и $y \rightarrow y_2$ при $2m < r < \infty$ уравнение девиации геодезических особенностей не имеет. С физической точки зрения это означает, что действующие на тела приливные силы конечны, и особенности при $y = y_1$ и $y = y_2$ имеют чисто координатное происхождение. Эти особенности можно классифицировать [6] как нарушение аналитичности метрики, не связанное с расходимостью алгебраических инвариантов тензора кривизны.

4.3.4. Аккреция с $\alpha \geq 1/8$

Рассмотрим случай $\alpha > 1/8$, тогда y_1 и y_2 – комплексно-сопряженные. Вычисляя (4.178), получим

$$\Psi = \frac{2}{\sqrt{(2y-1)^2 + 8\alpha - 1}} \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{8\alpha - 1}} \arctan \frac{2y-1}{\sqrt{8\alpha - 1}} \right]. \quad (4.217)$$

Функция $\Psi(y)$ многозначная из-за арктангенса, но это не отражается на результате, т.к. множитель в (4.217) можно скомпенсировать выбором $B(t)$, т.е. переопределением временной координаты. С помощью того же метода, что и в разделе 4.3.1, находим

$$f_0 = \frac{r^4[(2y-1)^2 + 8\alpha - 1]^2}{16yr_0^4(2\alpha)^2\Phi^2}. \quad (4.218)$$

В промежуточном же случае $8\alpha = 1$ имеет место совпадение двух поверхностей $y_1 = y_2 = 1/2$, и

$$\Psi = \frac{1}{|y - \frac{1}{2}|} e^{1/(2y-1)}, \quad (4.219)$$

$$f_0 = \frac{16r^4(y - 1/2)^6}{r_0^4 y} e^{-2/(2y-1)}. \quad (4.220)$$

Этот случай является аналогом экстремальной ЧД, имеющей два совпадающих горизонта.

Мы не будем детально исследовать глобальную геометрию полученных решений в координатах (t, r) , т.к. проще и эффективнее это сделать в других координатах (η, y) , которые мы введем ниже в разделе 4.3.6 и построим диаграммы Картера-Пенроуза. В координатах (η, y) аналитическое решение будет получено в явном виде, тогда как в координатах (t, r) решение записывается только в параметрической форме.

4.3.5. Природа $f_0 \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow 0$

Интересным свойством является расходямость $f_0 \rightarrow \infty$ на гравитационном радиусе $y = 0$. Это поведение противоположно тому, что имеет место на горизонте ЧД Шварцшильда, где $f_0 = 0$. Аккреция качественно меняет вид геометрии вблизи гравитационного радиуса, и в данном разделе мы объясним,

почему это происходит. Рассмотрим случай слабой аккреции. Из соотношения $T_0^0 + T_1^1 = 0$ и уравнений (4.199), (4.200) получаем

$$\nu' - \lambda' = \frac{4M_1}{r^2} e^\lambda. \quad (4.221)$$

Таким образом,

$$\nu' = \frac{f'_0}{f_0} = \frac{2M'_1/r + 2M_1/r^2}{1 - 2M_1/r}. \quad (4.222)$$

Интегрируя (4.222), получим

$$f_0 = e^{\phi(t)} \exp \left\{ \int_{r_0}^r d\tilde{r} \frac{2M'_1/\tilde{r} + 2M_1/\tilde{r}^2}{1 - 2M_1/\tilde{r}} \right\}, \quad (4.223)$$

где $\phi(t)$ – произвольная функция, которую можно исключить путем переопределения времени $dt' = dt e^{\phi/2}$, и интеграл в (4.223) берется при $t = const$. Зависимость от t и \tilde{r} входит также через $\tilde{v}(t, \tilde{r})$ в функции $M_1(\tilde{v})$, но интеграл берется вдоль линии $t = const$, когда время в интеграле считается параметром.

Интеграл в показателе экспоненты в (4.223) выразим в виде

$$\nu = \int_{r_0}^r d\tilde{r} \frac{2M'_1/\tilde{r} + 2M_1/\tilde{r}^2}{1 - 2M_1/\tilde{r}} = -\ln r^2 - \ln \left| 1 - \frac{2M_1}{r} \right| + 2 \int_{r_0}^r \frac{d\tilde{r}}{r(1 - 2M_1/\tilde{r})}, \quad (4.224)$$

где как и прежде интеграл вычисляется при $t = const$. При $M_1 = const$ последний интеграл в правой части (4.224) легко вычисляется, и из (4.223) получаем, что в этом случае реализуется метрика Шварцшильда с $f_0 = f_1$.

Рассмотрим теперь случай $\partial M_1/\partial v \neq 0$, то есть в нашем случае с аккрецией $\partial M_1/\partial v > 0$. При $t = const$ можно записать $d\tilde{r} = f_1 dv$. Тогда интеграл в правой части (4.224) запишется в простом виде

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{r(t, v)}, \quad (4.225)$$

где $v_0 = const$. Если рассматривается движение конкретного фотона, то $|v| = const < \infty$, и интеграл (4.225) ограничен.

Проследим, как происходит переход от метрики с аккрецией, для которой $f_0 \rightarrow \infty$, к метрике Шварцшильда с $f_0 \rightarrow 0$ на горизонте. Причина такой трансформации заключается в том, что переменная v при окончании аккреции (в области значений $\partial M_1/\partial v \rightarrow 0$) уходит на $-\infty$. В результате, интеграл в (4.224)

стремится к $-\infty$, что видно из (4.225). Численно этот интеграл становится в точности равным второму логарифму в (4.224). В результате, у горизонта происходит сокращение двух бесконечностей, и в итоге в метрике Шварцшильда $f_0 \rightarrow 0$. То есть, метрика Шварцшильда является вырожденным особым случаем.

Найдем верхний предел в (4.225). Он определяется преобразованием координат (4.188) при $t = \text{const}$, то есть уравнением

$$rdr = [r - 2M_1(v)]dv. \quad (4.226)$$

Это уравнение определяет сечение поверхности $v = v(t, r)$ плоскостью $t = \text{const}$. При $M_1 = \text{const}$ получаем

$$v = r - 2M_1 + 2M_1 \ln |r - 2M_1| + B_1(t) \rightarrow -\infty \quad (4.227)$$

при $r \rightarrow 2M_1$, как уже было сказано ранее. Для метрики Шварцшильда $B_1(t) = t + B_2$, где $B_2 = \text{const}$.

4.3.6. Координаты (η, y)

Для более детального исследования глобальной геометрии метрики Вайдья с линейной массовой функцией $m(z)$ полезно преобразовать метрику Вайдья (4.167) к диагональной системе с некоторыми новыми координатами η и y :

$$ds^2 = f_0(\eta, y)d\eta^2 - \frac{dy^2}{f_1(\eta, y)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.228)$$

с метрическими функциями $f_0(\eta, y)$ and $f_1(\eta, y)$. Первая переменная η будет определена позже, а в качестве второй новой переменной выберем $y = 1 - 2m(z)/r$. Возьмем дифференциал от выражения

$$r = \frac{2m(z)}{1 - y} \quad (4.229)$$

и получим

$$dr = \frac{2}{1 - y} \frac{dm}{dz} dz + \frac{2m(z)}{(1 - y)^2} dy, \quad dz = z_{,\eta} dt + z_{,y} dy. \quad (4.230)$$

Подставляя эти выражения в (4.167), находим систему уравнений для f_0 , f_1 и $z(\eta, y)$:

$$f_0 = \left(y + \frac{4}{1-y} \frac{dm}{dz} \right) z_{,\eta}^2, \quad (4.231)$$

$$0 = \left[\left(y + \frac{4}{1-y} \frac{dm}{dz} \right) z_{,y} + \frac{2m}{(1-y)^2} \right] z_{,\eta}, \quad (4.232)$$

$$\frac{1}{f_1} = - \left[\left(y + \frac{4}{1-y} \frac{dm}{dz} \right) z_{,y} + \frac{4m}{(1-y)^2} \right] z_{,y}. \quad (4.233)$$

Рассматриваем линейную зависимость $m(z) = m_0 - \alpha z$, тогда

$$\frac{1}{f_1} = - \frac{2m}{(1-y)^2} z_{,y}. \quad (4.234)$$

Подставляя сюда f_1 из (4.231), получаем уравнение для функции $z(\eta, y)$:

$$z_{,y} = \frac{2m}{(1-y)(y^2 - y + 4\alpha)}. \quad (4.235)$$

Теперь, умножая обе части уравнения на $dm/dz = -\alpha$, получаем уравнение

$$\left. \frac{d \log m}{dy} \right|_{\eta=const} = - \frac{2\alpha}{(1-y)(y^2 - y + 4\alpha)}, \quad (4.236)$$

которое может быть проинтегрировано:

$$m = C(\eta)\Phi(y), \quad (4.237)$$

где

$$\Phi(y) \equiv \exp \left[-2\alpha \int \frac{dy}{(1-y)(y^2 - y + 4\alpha)} \right] > 0. \quad (4.238)$$

Дифференцируя (4.229) по r , находим

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2C(\eta)\Phi(y)(y^2 - y + 2\alpha)}{(1-y)^2(y^2 - y + 4\alpha)}. \quad (4.239)$$

Тогда

$$f_1 = - \frac{(1-y)^3(y^2 - y + 4\alpha)}{(2C\Phi)^2}, \quad (4.240)$$

и из (4.231) получаем

$$f_0 = - \frac{(y^2 - y + 4\alpha) C_{,\eta}^2}{1-y} \Phi^2. \quad (4.241)$$

Корни уравнения $y^2 - y + 2\alpha = 0$ были выписаны в (4.181), а корни уравнения $y^2 - y + 4\alpha = 0$ даются выражениями (4.193). Заметим, что $0 < y_1 < y_3 \leq 1/2 \leq y_4 < y_2 < 1$.

Путем переопределения переменной η всегда можно сделать $C_{,\eta} = const$. И тогда, для непрерывности предельного перехода к метрике Шварцшильда $\alpha \rightarrow 0$ должно быть $C(\eta) = \alpha\eta + C_0$ с $C_0 = const$.

В итоге, получена явная зависимость всех метрических функций в (4.228) от координат η и y . При вычислении интеграла в (4.238) возникают три различных случая: (1) мощная аккреция при $\alpha > 1/16$, (2) умеренная аккреция при $\alpha = 1/16$ и (3) слабая аккреция при $\alpha < 1/16$.

4.3.7. Построение глобальной геометрии

Рассмотрим инвариант (4.196) в координатах (η, y) . Будем называть “ R^* -областью” область пространства-времени, в которой $Y < 0$, а “ T^* -областью” – область, где $Y > 0$. В R^* -областях η является временной координатой, а y – пространственной координатой. И наоборот, в T^* -областях η – пространственная координата, а y – временная координата. Общий метод построения диаграмм Картера-Пенроуза описан, например, в [6].

Интервал принимает простой вид после конформного преобразования

$$ds^2 = \frac{C^2 \Phi^2}{\alpha^2 (1-y)} \left\{ (y^2 - 2y + 4\alpha) [(d \log \Phi)^2] - (d \log C)^2 \right\} - r^2 d\Omega^2. \quad (4.242)$$

Отсюда видно, что нулевые геодезические определяются уравнениями:

$$C = A \Phi^{\pm 1}, \quad A = const. \quad (4.243)$$

В случае аккреции верхний знак (+) соответствует исходящим нулевым лучам, а нижний знак (–) – входящим нулевым лучам. И наоборот в случае метрики Вайдья, образуемой исходящим излучением.

Принимая во внимание (4.242), мы построим диаграммы Картера-Пенроуза в координатах $\log C$ и $\log \Phi(y)$ путем следующего преобразования

$$\begin{aligned} t' &= \arctan [\log C + \log \Phi(y)] - \arctan [\log C - \log \Phi(y)] \\ x' &= \arctan [\log C + \log \Phi(y)] + \arctan [\log C - \log \Phi(y)], \end{aligned}$$

с соответствующими сдвигами и перестановкой осей там, где это необходимо.

Начнем со случая мощной аккреции $\alpha > 1/16$, тогда, $Y > 0$ и, следовательно, мы находимся в T^* -области. Интегрирование в (4.238) дает

$$\Phi = \frac{\sqrt{1-y}}{(y^2 - y + 4\alpha)^{1/4}} \exp \left[-\frac{1}{2\sqrt{16\alpha - 1}} \left(\arctan \frac{2y-1}{\sqrt{16\alpha - 1}} + \frac{\pi}{2} \right) \right]. \quad (4.244)$$

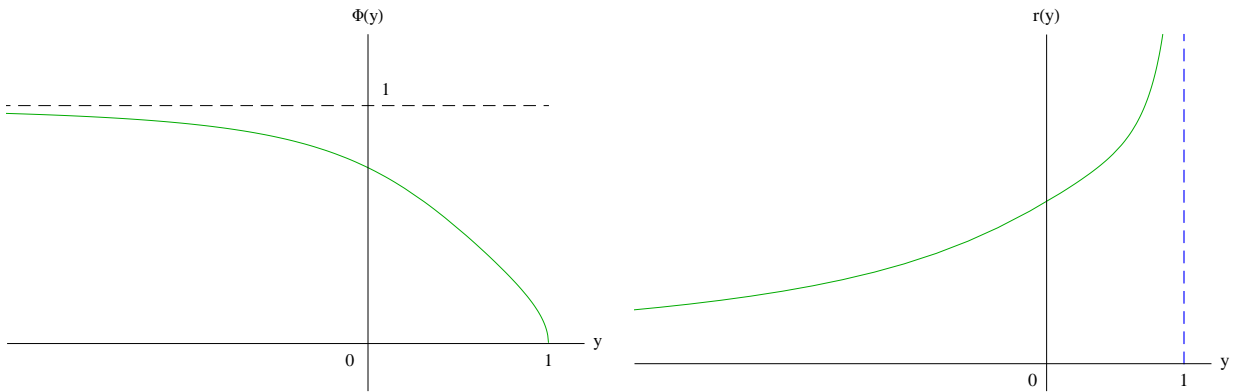


Рис. 4.4. Слева: функция $\Phi(y)$ в случае $\alpha > 1/16$. Справа: функция $r(y)$ в случае $\alpha > 1/8$.

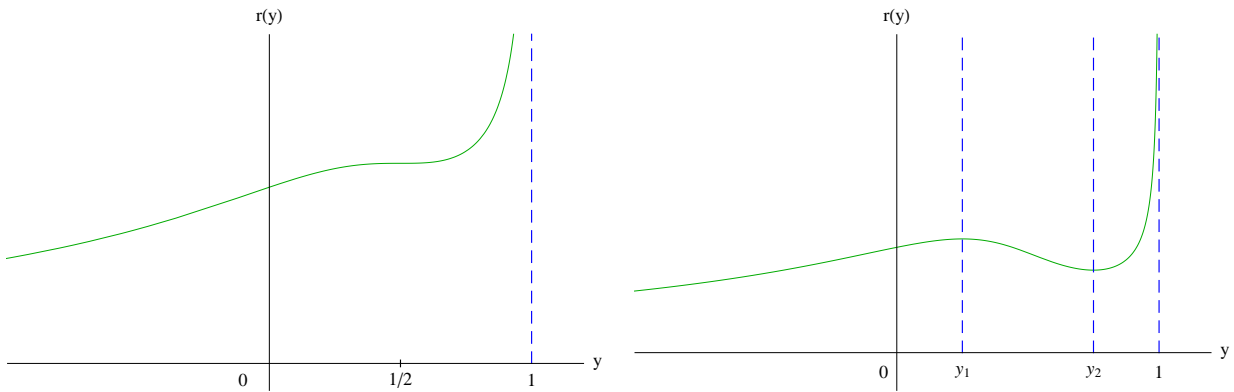


Рис. 4.5. Слева: функция $r(y)$ в случае $\alpha = 1/8$. Справа: функция $r(y)$ в случае “мощной” аккреции с $1/16 < \alpha < 1/8$.

Поведение функции Φ качественно одинаково во всей области $\alpha > 1/16$, см. Рис. 4.4. Но зависимость $r(y)$, различна в интервалах $1/16 < 1/8 < \alpha$, $\alpha = 1/8$ и $1/16 < \alpha < 1/8$, см. Рис. 4.4, 4.5. Согласно (4.239) и (4.244), если $\alpha > 1/8$, то радиус является монотонно возрастающей функцией y (от $r = 0$ при $y = \infty$ до $r = \infty$ при $y = 1$). Мы будем называть случай $\alpha > 1/8$ сверхмощной аккрецией, а случай $1/16 < \alpha < 1/8$ – просто сильной аккрецией. Заметим, что кривые $y = y_1$, $y = y_2$ являются пространственноподобными.

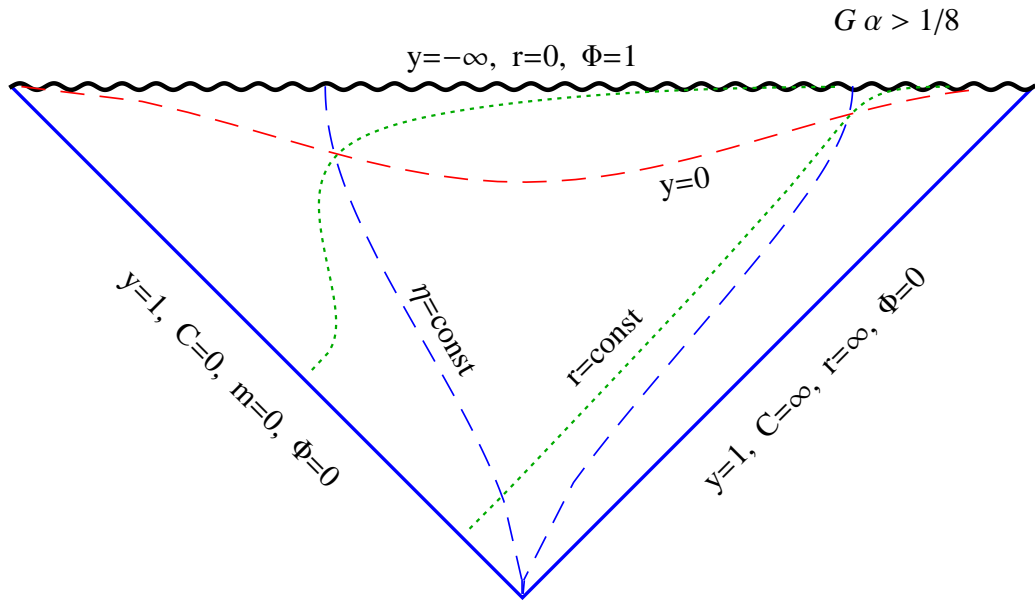


Рис. 4.6. Диаграмма Картера-Пенроуза для глобальной геометрии в случае “сверхмощной” аккреции $\alpha > 1/8$ с линейной массовой функцией. Волнистой линии соответствует сингулярность $y = -\infty$ при $r = 0$. Одна из двух нулевых линий $y = 1$ является нулевой бесконечностью прошлого с $r = \infty$, а вторая соответствует границе начальной аккреции с нулевой массой $m = 0$. Временная координата идет снизу вверх, а пространственная координата – слева направо. Везде в T^* -области временной координатой является $(-y)$. Эти линии пересекают пространственноподобную линию $y = 0$, которая служит горизонтом видимости и разделяет пространственно-временную область, в которой поверхности $r = const$ являются времениподобными ($y > 0$), от областей, где они пространственноподобны ($y < 0$).

Помимо “естественных” границ, таких как $r = 0$ и бесконечностей, на диаграммах Картера-Пенроуза будут существовать также горизонты различных видов (нулевые, времениподобные и пространственноподобные), представляя границы диаграммы, при этом сферически-симметричное пространство-время будет состоять из некоторого набора треугольников и квадратов, разделенных общими границами. Отметим, что мы наложили дополнительное физическое условие $m \geq 0$. В результате этого физическое пространство-время может оказаться геодезически неполным.

Поскольку по определению $\Phi(y) \leq 0$, из физического ограничения $m \geq 0$ следуют неравенства $C \geq 0$, $y \leq 1$, а из $r \geq 0$ следует, что $-\infty < y < 1$. Следовательно, границами являются $y = -\infty$ и $y = 1$. Везде имеет место $Y \geq 0$, т.е., внутри границ лежит T^* -область, где линии $y = const$ являются простран-

ственноподобными (роль времени играет $(-y)$, и это время возрастает внизу вверх), а линии $\eta = const$ (или $C(\eta) = const$) являются времениподобными. Видно, что границы $y = -\infty$ ($r = 0$) являются пространственноподобными и сингулярными, поскольку инвариант $Y \rightarrow +\infty$ при $y \rightarrow 1$.

На первый взгляд, границы при $y = 1$ являются нулевыми. Но, поскольку $C(\eta)$ и $\Phi(y)$ находятся в знаменателе Y и могут обращаться в нуль и в бесконечность, то необходимо более детальное исследование. Будем использовать две конгруэнции нулевых геодезических. Сначала рассмотрим входящие лучи, для которых $m = C(\eta)\Phi(y) = const$. Они начинаются от $y = 1$, где $r \propto 1/(1 - y)$, $Y \propto (1 - y)^3$, и входят в пространственно-временную сингулярность $r = 0$. Мы видим, что, действительно, границей является нулевая бесконечность прошлого, где $y = 1$, $r = \infty$. Величина m вдоль этой границы изменяется от $m = 0$ до $m = \infty$, тогда как $\Phi(y) = 0$ и $C(\eta) = \infty$.

Природа второй границы $y = 1$ более сложна. Рассмотрим вторую конгруэнцию нулевых геодезических, для которых $C(\eta) = const \cdot \Phi(y)$. Они начинаются от $y = 1$, где при $y \rightarrow 1$ имеем $m \propto (1 - y)$, $r = const$, $Y \propto (1 - y)$. Следовательно, рассматриваемая граница $y = 1$ является нулевой, и вдоль нее $\Phi(y) = 0$, $C(\eta) = 0$, $m = 0$, и r изменяется от $r = 0$ до $r = \infty$. Поэтому она больше не является бесконечностью, а является краем нулевых лучей, которые начинают аккрецию. Очевидно, такое пространство-время не является геодезически полным, см. Рис. 4.6. Аналогичные рассуждения в случаях $\alpha = 1/8$ и $1/16 < \alpha < 1/8$ приводят к диаграммам, показанным на Рис. 4.7 и 4.8.

В промежуточный случае $\alpha = 1/16$ функция $\Phi(y)$ имеет вид

$$\Phi = \sqrt{\left| \frac{y-1}{y-(1/2)} \right|} \exp \left\{ \frac{1}{4[y-(1/2)]} \right\}, \quad (4.245)$$

и

$$f_0 = \left| y - \frac{1}{2} \right| \exp \left\{ \frac{1}{2(y - \frac{1}{2})} \right\}, \quad (4.246)$$

$$Y = \frac{(1-y)^3(y - \frac{1}{2})^2}{4C^2\Phi^2} = \frac{(1-y)^2 \left| y - \frac{1}{2} \right|^3}{4C^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2(y - \frac{1}{2})} \right\}, \quad (4.247)$$

см. Рис. 4.9. Диаграмма Картера-Пенроуза состоит из двух частей: треугольника и квадрата, склеенных вместе (и разделяемых) двойным горизонтом $y = y_3 =$

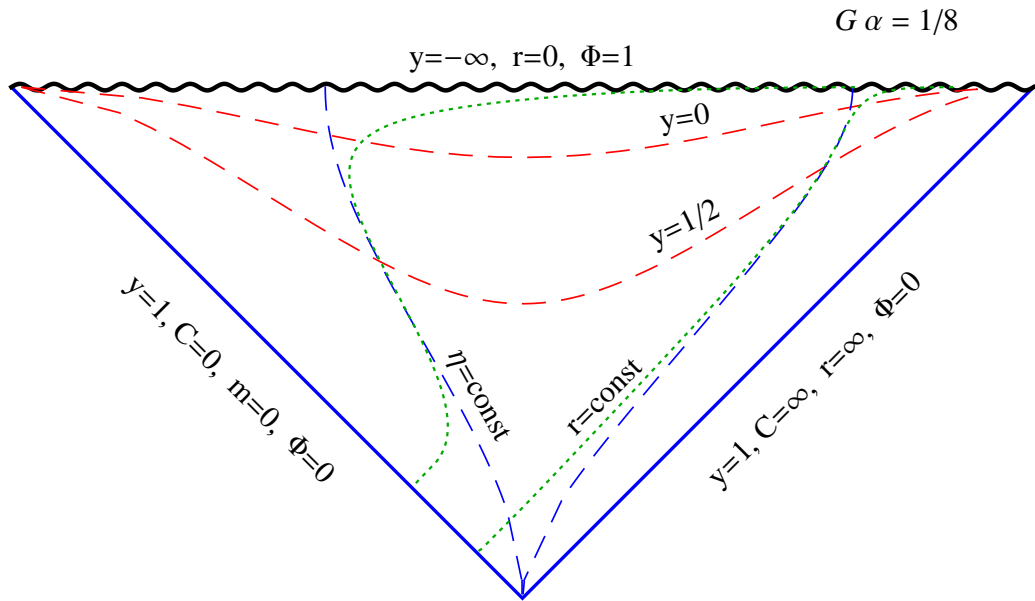


Рис. 4.7. Диаграмма Картера-Пенроуза для переходного случая от “сверхмощной” к “просто мощной” аккреции с $\alpha = 1/8$. Этот случай отличается от предыдущего наличием точек поворота на линиях $r = const$, соответствующих $y = y_1 = y_2 = 1/2$ на графиках $r = r(y)$.

$y_4 = 1/2$. По обоим сторонам от него находятся T^* -области, а линии $y = const$ являются пространственноподобными.

Треугольник строится из пространственноподобных сингулярных линий $y = -\infty$, где $r = 0$ и из двух нулевых границ $y = y_3 = y_4 = 1/2$. Одна из них является двойным горизонтом, в то время как другая является граничным нулевым лучом с $m = 0$ и $r = 0$. При обращении с двойными горизонтами требуется аккуратность, т.к. $\Phi(1/2 - 0) = 0$ и $\Phi(1/2 + 0) = \infty$. Рассмотрим лучи с $C\Phi = m = const$, создающие аккрецию. Видим, что $C(\eta) = \infty$ при $y(1/2 - 0)$, и это как раз окончание диапазона координат в треугольнике. При $y(1/2 + 0)$ имеем $C(\eta) = 0$, и это начало нового пространственного диапазона координат в квадрате. Для граничного луча с $m = 0$ вдоль $y = 1/2$ как C , так и Φ равны нулю. Инвариант Y расходится, но точка $y = 1/2$ является координатной сингулярностью, детерминант метрического тензора в этой точке равен нулю. См. Рис. 4.10.

В случае слабой аккреции $\alpha < 1/16$ двойной горизонт расщепляется на два при $y = y_3$ и $y = y_4$. Появление этих “новых горизонтов” обусловлено тем

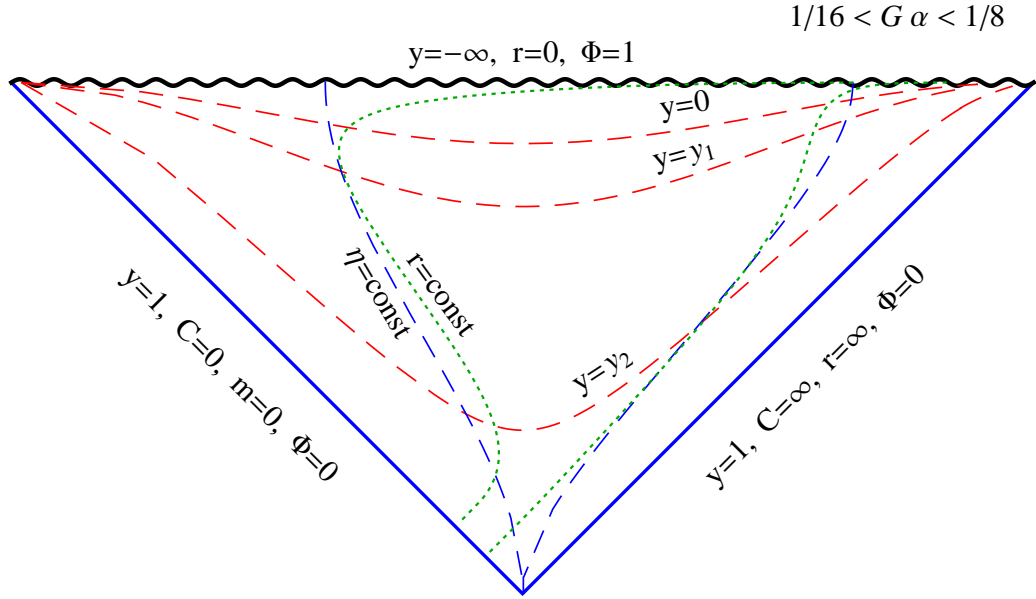


Рис. 4.8. Диаграмма Картера-Пенроуза для случая “просто мощной” аккреции $1/16 < \alpha < 1/8$.

фактом, что мы рассматриваем здесь неограниченную аккрецию с бесконечным ростом массы ЧД. Функция $\Phi(y)$ теперь принимает вид

$$\Phi = \sqrt{1-y} |y - y_3|^{y_3/[2(y_4 - y_3)]} |y - y_4|^{-y_4/[2(y_4 - y_3)]}, \quad (4.248)$$

и

$$f_0 = -|y - y_3|^{\frac{y_3}{y_4 - y_3} + 1} |y - y_4|^{\frac{-y_4}{y_4 - y_3} + 1}, \quad (4.249)$$

$$Y = \frac{(1-y)^2 (y - y_3)(y - y_4)}{4C^2} |y - y_3|^{\frac{-y_3}{y_4 - y_3}} |y - y_4|^{\frac{y_4}{y_4 - y_3}}, \quad (4.250)$$

см. графики на Рис. 4.11.

Глобальная геометрия в этом случае более сложная. Диаграмма Картера-Пенроуза состоит из одного треугольника и двух квадратов. Структура границ треугольников остается точно такой же, как раньше (но теперь $y < 1/2$), и мы имеем T^* -область, в которой линия $\eta = const$ времениподобна, $y = const$ пространственноподобна. Также появляется R^* -область, границы которой являются “новыми горизонтами” $y = y_3$ и $y = y_4$. Левая граница состоит из двух частей при $y = y_3$. Последняя является просто крайним нулевым лучом аккреции с $m = 0$, $C(\eta) = 0$, $\Phi = 0$ и $r = 0$, а верхняя, имеющая $C = \infty$, $\Phi = 0$

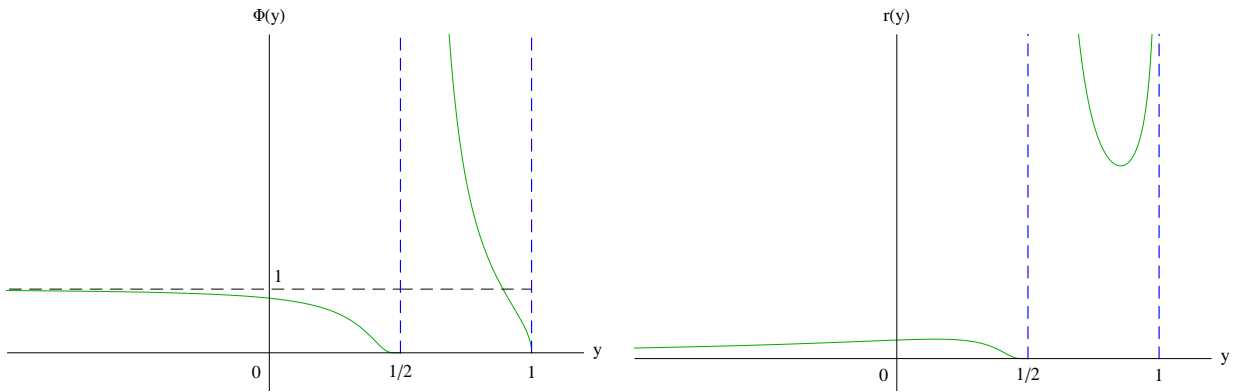


Рис. 4.9. Функция $\Phi(y)$ (слева) и функция $r(y)$ (справа) в случае $\alpha = 1/16$.

представляет собой горизонт событий между R^* -областью и T^* -областью. Правая граница также состоит из двух частей при $y = y_4$. Верхняя часть границы представляет собой “последний” луч аккреции $r = \infty$, $m = \infty$, $C(\eta) = \infty$ и $\Phi = \infty$ (нулевая бесконечность будущего), а нижняя является космологическим горизонтом, соединяющим R^* -область и внешнюю T^* -область ($y_3 \leq y_4 \leq 1$). Второй квадрат ($y_4 \leq y \leq 1$) имеет такую же структуру, за исключением того, что теперь $y_4 > 1/2$. Как было указано, такое пространство-время не является геодезически полным, см. соответствующую диаграмму на Рис. 4.12.

Таким образом, в этом разделе для изучения глобальной геометрии в задаче Вайдья с линейным ростом массовой функции мы нашли преобразование координат из обычной метрики Вайдья к двум различным диагональным системам координат (t, r) и (η, y) . Преимущество этой линейной модели заключается в возможности вычисления всех метрических функций и световых геодезических в точном аналитическом виде. Оказалось, что при наличии даже слабой аккреции вблизи горизонта существует узкая область, в которой решение отличается от решения Шварцшильда не только количественно, но и качественно. В новых координатах (η, y) удалось построить полный набор диаграмм Картера-Пенроуза. Эти диаграммы содержат набор областей пространства-времени, разделенных горизонтами и граничными линиями, на которых заканчивается действие систем координат. Пространство-время на построенных диаграммах геодезически не полно, т. к. мы наложили физическое условие на массовую функцию $m \geq 0$, но в данной физической постановке задачи выполненное построение является максимально возможным.

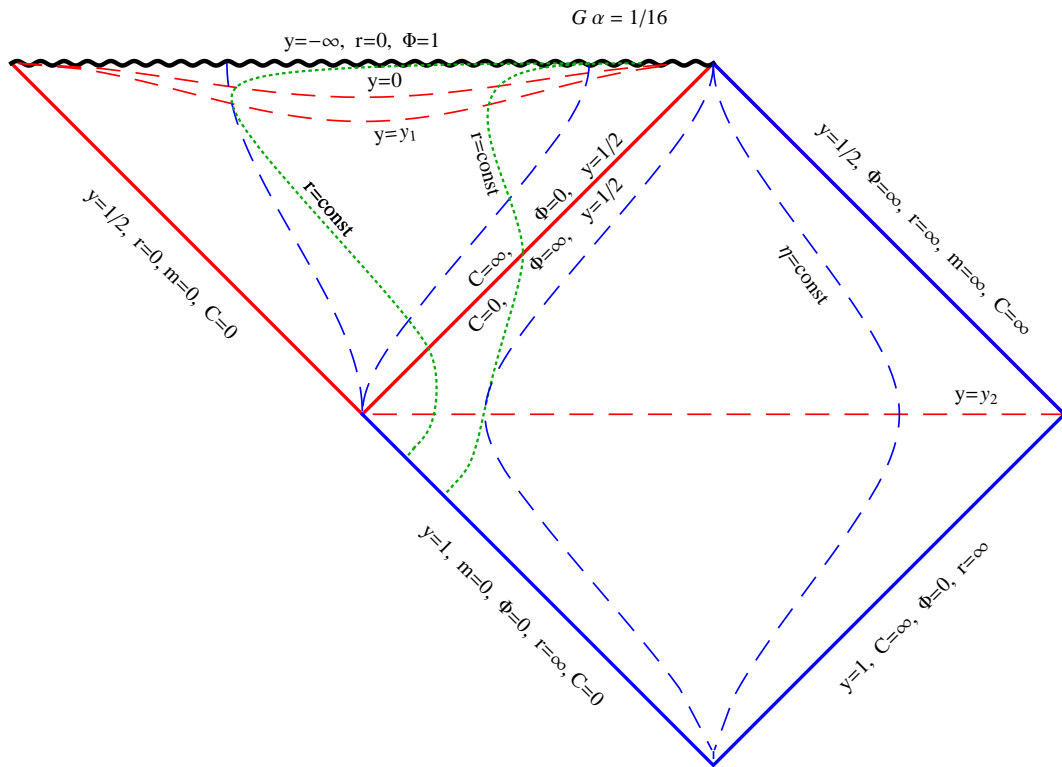


Рис. 4.10. Диаграмма Картера-Пенроуза для переходного случая от “мощной” к “слабой” аккреции $\alpha = 1/16$. Двойной горизонт $y = y_3 = y_4 = 1/2$ разделяет две T^* -области. Появляется нулевая бесконечность будущего, где $y = 1/2, m, r = \infty$.

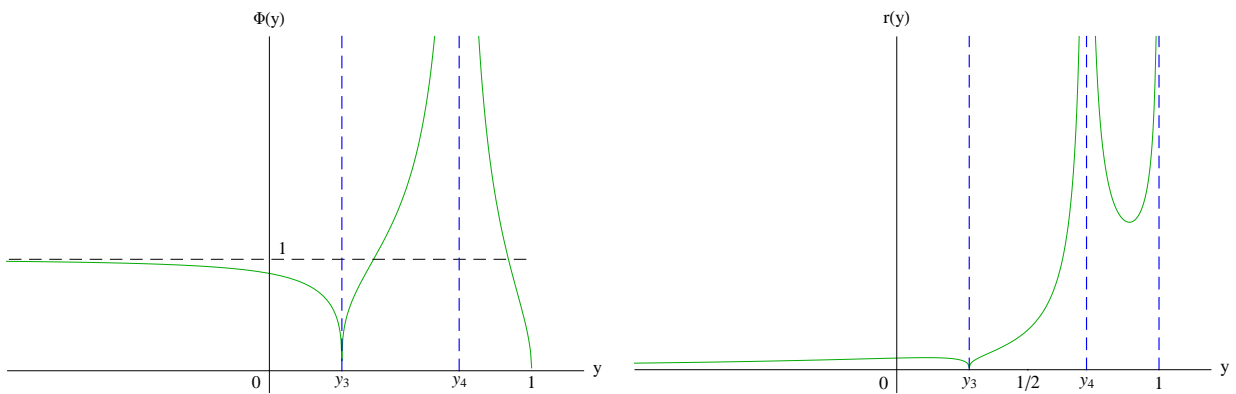


Рис. 4.11. Функция $\Phi(y)$ (сверху) и функция $r(y)$ (снизу) в случае “слабой” аккреции с $\alpha < 1/16$.

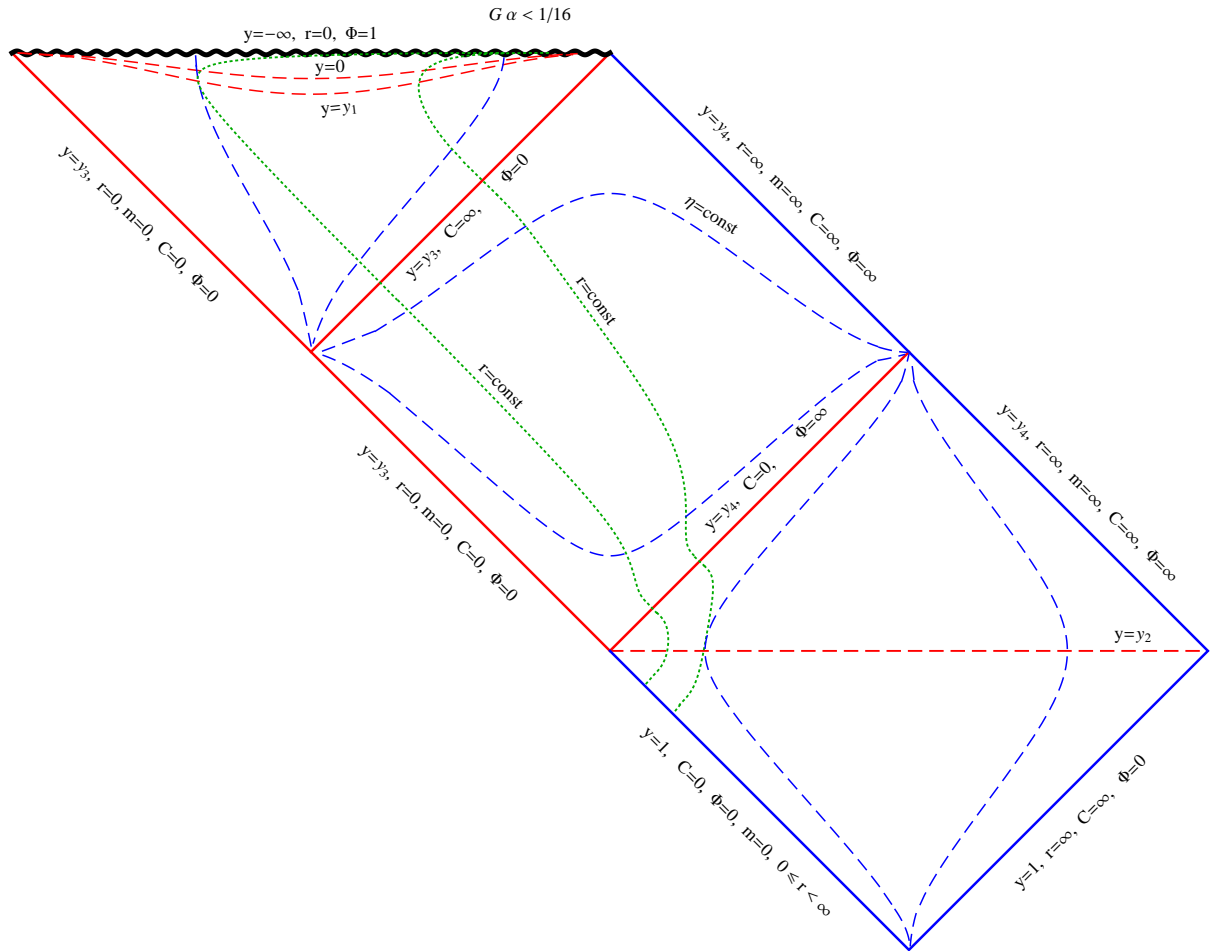


Рис. 4.12. Диаграмма Картера-Пенроуза в случае "слабой" аккреции $\alpha < 1/16$. Двойной горизонт расщепляется на два: на горизонт событий при $y = y_3$ и на космологический горизонт при $y = y_4$. Теперь T^* -области имеются при $-\infty < y < y_3$ и при $y_4 < y < 1$. В промежутке $y_3 < y < y_4$ находится R^* -область, в которой η – временная координата, а y – пространственная координата.

Заключение

В диссертационной работе рассмотрены проблемы раннего образования во Вселенной гравитационно связанных структур, которые могли оказывать влияние на раннюю космологическую эволюцию и различные астрофизические процессы в догалактическую эпоху и в современный момент. Такими структурами могут быть, в частности, плотные СТМ и ПЧД, а также гравитационные структуры – компактные решения в теории гравитации.

Главной темой диссертационной работы были мелкомасштабные СТМ. СТМ представляют интерес и заслуживают внимания в нескольких отношениях. Во-первых, эти объекты ввиду своего раннего образования являются самыми плотными образованиями из ТМ во Вселенной, и поэтому аннигиляция частиц ТМ в мелкомасштабных СТМ происходит очень эффективно, и СТМ способны усилить аннигиляционный сигнал в гало галактик от нескольких раз до нескольких порядков величины. Таким образом, СТМ представляют дополнительные перспективы для не прямой регистрации ТМ посредством детектирования аннигиляционных сигналов, что может помочь в разрешении одной из главных загадок космологии – природы ТМ. Во-вторых, аннигиляция в СТМ могла изменить тепловой баланс в газе на догалактической стадии и кардинально повлиять на процессы эволюции первых звезд, а через это – на химическую эволюцию вещества в галактиках, на количество ЧД и другие процессы. В третьих, в случае существования СТМ, их спектр масс через спектр космологических возмущений плотности может дать ценную информацию об очень ранней Вселенной, о стадии инфляции. В рамках диссертационной работы было исследовано формирование спектра масс СТМ в ранние эпохи иерархического сгущивания ТМ и изучены процессы разрушения СТМ при их приливных гравитационных взаимодействиях со звездами и коллективным полем диска Галактики. Это исследование позволило рассчитать долю СТМ, избежавших приливного разрушения на различных расстояниях от центра Галактики. Выяснение доли выживших СТМ, в свою очередь, дало возможность найти коэффициент усиление аннигиляционного сигнала, обусловленный наличием СТМ.

Были рассмотрены два варианта формирования СТМ. Прежде всего, ис-

следован консервативный вариант, когда СТМ формируются из спектра космологических возмущений плотности, нормированного на данные по анизотропии реликтового излучения и соответствующего предсказанию теории инфляции о продолжении спектра в область малых масс. Если реализуется данный консервативный сценарий, то СТМ дают усиление сигнала всего в несколько раз.

Второй из рассмотренных в диссертации вариантов связан с возможностью образования сверхплотных СТМ из дополнительных максимумов в спектре возмущений. Эти СТМ могут формироваться уже на космологической стадии доминирования излучения и иметь большую плотность. Нетривиальным моментом является нарастание несферичности при формировании СТМ. Этот эффект был исследован путем решения уравнений эволюции эллипсоидального возмущения на стадии радиационного доминирования. Было показано, что из-за роста несферичности формирование большинства СТМ оказывается невозможным (СТМ распадаются на части на ранних этапах своего формирования), и общее число сформировавшихся СТМ уменьшается на несколько порядков величины по сравнению со случаем, когда не учитывается несферичность. Но благодаря большой плотности даже это небольшое число СТМ может приводить к усилению аннигиляционного сигнала на много порядков величины. В частности, если ТМ состоит из сверхтяжелых частиц, то их малое сечение аннигиляции может быть скомпенсировано большой плотностью СТМ.

Следующим кругом задач, рассмотренных в диссертации, являются задачи о кластеризации ТМ вокруг массивных ПЧД. Для ПЧД звездных и меньших масс формирующиеся вокруг них пики плотности ТМ могут являться источниками дополнительного аннигиляционного сигнала. В диссертации был выполнен расчет структуры пика плотности вокруг ПЧД и показано, что профиль плотности пика отличается от простых степенных зависимостей, которые предполагались в предшествующих работах. Был выполнен расчет гамма-сигнала от аннигиляции частиц ТМ в пиках вокруг ПЧД и результат сопоставлен с имеющимися ограничениями телескопа Fermi-LAT по гамма-фону. Это позволило получить наиболее сильные на сегодняшний момент ограничения на космологический параметр плотности ПЧД в предположении, что ТМ состоит из аннигилирующих частиц с тепловым сечением аннигиляции.

В ряде работ был предложен механизм образования компактных скоплений ПЧД. Эти скопления могут являться затравками для образования ядер некоторых из галактик. Скопление ПЧД динамически эволюционирует вместе с окружающим его гало ТМ. В диссертации была рассчитана итоговая структура гало и рассмотрены приложения для моделей раннего формирования галактик и квазаров. Было показано, что данные модели действительно могут объяснить появление сверхмассивных черных дыр в наблюдаемых квазарах на больших красных смещениях $z > 6$. В моделях со скоплениями ПЧД рассчитан темп гравитационных всплесков от столкновений ПЧД в скоплениях, который может помочь в наблюдательной проверке этого класса моделей. Не исключено, что по крайней мере некоторые из сверхмассивных ЧД в ядрах галактик могут иметь первичное происхождение, они могут являться результатом слияния менее массивных ПЧД. Выяснить историю образования сверхмассивных ЧД может помочь профиль плотности ТМ вокруг ЧД, поскольку этот профиль формируется эволюционно за большое время и его форма чувствительна к процессу образования ЧД. В диссертации рассматривается один из подходов к проблеме определения профиля плотности ТМ – исследование нерелятивистской прецессии звезд, движущихся по орбитам вокруг центральной ЧД, когда ТМ создает дополнительный возмущающий потенциал. Был рассчитан ожидаемый угол прецессии вместе с возможными ограничениями по аннигиляции ТМ.

Также в диссертации приведены исследования свойств гравитационных нелинейных структур в ранней Вселенной. В том числе, изучаются их свойства в конформной теории гравитации, которая может предшествовать общей теории относительности. В частности, показано, что в конформной гравитации имеются решения в виде “гравитационные пузырей”, которые могли существовать в ранней Вселенной. Вторым из рассмотренных классов нелинейных гравитационных объектов являются черные дыры с зарядами на внутренних квантовых оболочках. Для их изучения решалось уравнение Дирака в гравитационном поле заряженной ЧД и было показано, что внутри ЧД могут существовать стационарные электронные орбитали. Частным случаем этих решений являются заряженные ЧД с компенсацией ее заряда зарядами противоположного знака на внутренних орбиталях. Эти решения интересны тем, что такие системы

могут эффективно рождаться в ранней Вселенной при испарении ПЧД и представлять собой частицы ТМ. Также была исследована аккреция излучения на ПЧД, а именно, задача Вайдья была рассмотрена в диагональных координатах и построена глобальная геометрия решений.

В целом, можно заключить, что в проблеме раннего образования нелинейных объектов во Вселенной существуют множество моделей и эффектов, которые заслуживают исследования, т.к. они могут оказаться важными для эволюции Вселенной в ранние эпохи и в настоящий момент, а также могут иметь различные наблюдательные проявления, в частности, в форме космического гамма-излучения и всплесков гравитационных волн.

Список сокращений и условных обозначений

ПЧД – первичная черная дыра

СТМ – сгустки темной материи

ТМ – темная материя

ЧД – черная дыра

Литература

1. Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва. Москва: URSS, 2008.
2. Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной: Космологические возмущения. Инфляционная теория. Москва: URSS, 2010.
3. Вайнберг С. Космология. Москва: URSS, 2012.
4. Лукаш В. Н., Михеева Е. В. Физическая космология. Москва: Физматлит, 2010.
5. Бисноватый-Коган Г. С. Релятивистская астрофизика и физическая космология. Москва: КРАСАНД, 2011.
6. Бронников К. А., Рубин С. Г. Лекции по гравитации и космологии. Москва: МИФИ, 2008.
7. Березинский В. С., Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Мелкомасштабные сгустки темной материи // Успехи физ. наук. 2014. Т. 184. С. 3–42. arXiv:1405.2204 [astro-ph.HE].
8. Massey R. et al. Dark matter maps reveal cosmic scaffolding // Nature. 2007. Vol. 445. P. 286-290.
9. Рябов В. А., Царев В. А., Цховребов А. М. Поиски частиц темной материи // УФН. 2008. Vol. 178. P. 1129–1164.
10. Jungman G., Kamionkowski M., Griest K. Supersymmetric dark matter // Phys. Rep. 1996. Vol. 267. P. 195-373.
11. Dodelson S., Widrow L. M. Sterile Neutrinos as Dark Matter // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 72. P. 17-20. arXiv:hep-ph/9303287v1.
12. Gorbunov D., Khmelnitsky A., Rubakov V. Constraining sterile neutrino dark matter by phase-space density observations // JCAP. 2008. Vol. 0810. P. 041.
13. Sikivie P. Dark matter axions // International Journal of Modern Physics A. 2010. Vol. 25. P. 554-563. arXiv:0909.0949v1 [hep-ph].
14. Berezhinsky V. S. Cosmology of the gravitino as the lightest supersymmetric particle // Phys. Lett. B. 1991. Vol. 261. P. 71-75.
15. Bolz M., Brandenburg A., Buchmuller W. Thermal production of gravitinos // Nucl. Phys. B. 2001. Vol. 606. P. 518-544.

16. Berezhinsky V., Kachelrieß M., Vilenkin A. Ultra-high energy cosmic rays without GZK cutoff // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. P. 4302-4305.
17. Kuzmin V. A., Rubakov V. A. Ultrahigh-energy cosmic rays: A window on postinflationary reheating epoch of the universe? // *ЯФ*. 1998. Vol. 61. P. 1122. arXiv:astro-ph/9709187.
18. Berezhinsky V., Kachelrieß M., Solberg M. A. Supersymmetric superheavy dark matter // *Phys. Rev. D.* 2008. Vol. 78. P. 123535. arXiv:0810.3012 [hep-ph].
19. Dubrovich V. K., Khlopov M. Yu. Primordial pairing and binding of superheavy charge particles in the early Universe // *Письма в ЖЭТФ*. 2003. Т. 77. С. 403-406. arXiv:astro-ph/0206138.
20. Ivanov P., Naselsky P., Novikov I. Inflation And Primordial Black Holes As Dark Matter // *Phys. Rev. D.* 1994. Vol. 50. P. 7173.
21. Add G. et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC // *Phys. Lett. B.* 2012. Vol. 716. P. 1–29.
22. Chatrchyan S. et al. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC // *Phys. Lett. B.* 2012. Vol. 716. P. 30-61.
23. Nath P., Higgs Physics and Supersymmetry // *Int. J. Mod. Phys. A.* 2012. Vol. 27. P. 1230029. arXiv:1210.0520 [hep-ph].
24. Belli P. et al. Observations of annual modulation in direct detection of relic particles and light neutralinos // *Phys. Rev. D.* 2011. Vol. 84. P. 055014. arXiv:1106.4667 [hep-ph].
25. Aalseth C. E. et al. Search for an Annual Modulation in a p-Type Point Contact Germanium Dark Matter Detector // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 107. P. 141301. arXiv:1106.0650 [astro-ph.CO].
26. Hinshaw G. et al., Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results // *The Astrophysical Journal Supplement Series.* 2013. Vol. 208. P. 19. arXiv:1212.5226 [astro-ph.CO].
27. Ade P. A. R. et al., Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results // *Astron. Astrophys.* 2014. Vol. 571. P. A1. arXiv:1303.5062 [astro-ph.CO].
28. Lacey C., Cole S. Merger rates in hierarchical models of galaxy formation //

- Mon. Not. R. Astron. Soc. 1993. Vol. 262. P. 627-649.
29. Schmid C., Schwarz D. J., Widerin P. Peaks above the Harrison-Zel'dovich Spectrum due to the Quark-Gluon to Hadron Transition // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 791. arXiv:astro-ph/9606125.
 30. Wasserman I., Density Fluctuations in the Galactic Halo and Experimental Searches for Dark Matter // Second International A.D. Sakharov Conference on Physics Moscow, Russia 20-24 May 1996, Edited by A.J. Dremin and A.M. Semikhatov. Published by World Scientific, 1997. P. 191-193. arXiv:astro-ph/9608012v1.
 31. Schmid C., Schwarz D. J., Widerin P. Amplification of cosmological inhomogeneities by the QCD transition // Phys. Rev. D. 1999. Vol. 59. P. 043517. arXiv:astro-ph/9807257.
 32. Schwarz D. J., Hofmann S. Small-scale structure of cold dark matter // Nucl. Phys. B Proc. Suppl. 2000. Vol. 87. P. 93-95. arXiv:astro-ph/9912343.
 33. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Y. Small-scale clumps in the galactic halo and dark matter annihilation // Phys. Rev. D. 2003. Vol. 68. P. 103003. arXiv:astro-ph/0301551.
 34. Zhao H. S. et al. Earth-mass dark halos are torn into dark mini-streams by stars // arXiv:astro-ph/0502049v4.
 35. Green A. M., Hofmann S., Schwarz D. J. The first WIMPy halos // JCAP. 2005. Vol. 0508. P. 003. arXiv:astro-ph/0503387.
 36. Moore B. et al. On the survival and disruption of Earth mass CDM micro-haloes // arXiv:astro-ph/0502213.
 37. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Destruction of small-scale dark matter clumps in the hierarchical structures and galaxies // Phys. Rev. D. 2006. Vol. 73. P. 063504. arXiv:astro-ph/0511494.
 38. Diemand J., Kuhlen M., Madau P. Early Supersymmetric Cold Dark Matter Substructure // Astrophys. J. 2006. Vol. 649. P. 1-13. arXiv:astro-ph/0603250.
 39. Green A. M., Goodwin S. P. On mini-halo encounters with stars // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2007. Vol. 375. P. 1111-1120. arXiv:astro-ph/0604142.
 40. Bertschinger E. Effects of cold dark matter decoupling and pair annihilation on cosmological perturbations // Phys. Rev. D. 2006. Vol. 74. P. 063509.

- arXiv:astro-ph/0607319.
41. Angus G. W., Zhao H. S. Cold dark matter microhalo survival in the Milky Way // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2007. Vol. 375. P. 1146-1156. arXiv:astro-ph/0608580.
 42. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Anisotropy of dark matter annihilation with respect to the Galactic plane // *JCAP.* 2007. Vol. 07. P. 011. arXiv:astro-ph/0612733.
 43. Giocoli C., Pieri L., Tormen G. Analytical approach to subhalo population in dark matter haloes // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* 2008. Vol. 387. P. 689-697. arXiv:0712.1476 [astro-ph].
 44. Kamionkowski M., Koushiappas S. M., Kuhlen M. Galactic substructure and dark-matter annihilation in the Milky Way halo // *Phys. Rev. D.* 2010. Vol. 81. P. 043532. arXiv:1001.3144 [astro-ph.GA].
 45. Anderhalden D., Diemand J. Density Profiles of CDM Microhalos and their Implications for Annihilation Boost Factors // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* 2013. Vol. 04. P. 009. arXiv:1302.0003 [astro-ph.CO].
 46. Bergstrom L., Edsjo J., Gondolo P., Ullio P. Clumpy neutralino dark matter // *Phys. Rev. D.* 1999. Vol. 59. P. 043506. arXiv:astro-ph/9806072.
 47. Koushiappas S. M. The detection of subsolar mass dark matter halos // *New J. Phys.* 2009. Vol. 11. P. 105012. arXiv:0905.1998 [astro-ph.CO].
 48. Schwarz D. J. The first second of the Universe // *Annalen Phys.* 2003. Vol. 12. P. 220-270. arXiv:astro-ph/0303574.
 49. Гуревич А. В., Зыбин К. П. Nondissipative gravitational turbulence // *ЖЭТФ.* 1988. Т. 94. С. 3-25.
 50. Гуревич А. В., Зыбин К. П. Nondissipative gravitational turbulence in an expanding universe // *ЖЭТФ.* 1988. Т. 94(4). С. 5-15.
 51. Гуревич А. В., Зыбин К. П. Крупномасштабная структура Вселенной. Аналитическая теория // *УФН.* 1995. Т. 165. С. 723–758.
 52. Profumo S., Sigurdson K., Kamionkowski M. What Mass Are the Smallest Protohalos? // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 97. P. 031301. arXiv:astro-ph/0603373.
 53. Bringmann T. Particle models and the small-scale structure of dark matter //

- New J. Phys. 2009. Vol. 11. P. 105027. arXiv:0903.0189 [astro-ph.CO].
54. Weinberg S. Entropy Generation and the Survival of Protogalaxies in an Expanding Universe // *Astrophys. J.* 1971. Vol. 168. P. 175-194.
55. Schwarz D. J., Hofmann S., Stocker H. Damping scales of neutralino cold dark matter // *Phys. Rev. D.* 2001. Vol. 64. P. 083507. arXiv:astro-ph/0104173.
56. Loeb A., Zaldarriaga M. Small-scale power spectrum of cold dark matter // *Phys. Rev. D.* 2005. Vol. 71. P. 103520. arXiv:astro-ph/0504112.
57. Calcano-Roldan C., Moore B. Surface brightness of dark matter: Unique signatures of neutralino annihilation in the galactic halo // *Phys. Rev. D.* 2000. Vol. 62. P. 123005. arXiv:astro-ph/0010056.
58. Nieto D. et al. A search for possible dark matter subhalos as IACT targets in the First Fermi-LAT Source Catalog // 2011 Fermi Symposium proceedings - eConf C110509. arXiv:1110.4744 [astro-ph.HE].
59. Zechlin H.-S. et al. Dark matter subhalos as Fermi gamma-ray sources and first candidates in the 1FGL catalog // 2011 Fermi Symposium proceedings - eConf C110509. arXiv:1110.6868 [astro-ph.HE].
60. Pieri L., Branchini E., Hofmann S., Difficulty of Detecting Minihalos via γ -Rays from Dark Matter Annihilation // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. P. 211301. arXiv:astro-ph/0505356.
61. Oda T., Totani T. and Nagashima M. Gamma-Ray Background from Neutralino Annihilation in the First Cosmological Objects // *Astrophys. J.* 2005. Vol. 633. P. L65-L68. arXiv:astro-ph/0504096.
62. Kamionkowsky M., Koushiappas S. M. Galactic substructure and direct detection of dark matter // *Phys. Rev. D.* 2008. Vol. 77. P. 103509. arXiv:0801.3269 [astro-ph].
63. Pieri L., Bertone G., Branchini E. Dark matter annihilation in substructures revised // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2008. Vol. 384. P. 1627-1637. arXiv:0706.2101 [astro-ph].
64. Pinzke A., Pfrommer C., Bergstrom L. Gamma Rays from Dark Matter Annihilations Strongly Constrain the Substructure in Halos // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 103. P. 181302. arXiv:0905.1948 [astro-ph.HE].
65. Baxter E. J. et al. Constraining dark matter in galactic substructure // *Phys.*

- Rev. D. 2010. Vol. 82. P. 123511. arXiv:1006.2399 [astro-ph.GA].
66. Belotsky K. M., Kirillov A. A., Khlopov M. Yu., Gamma-ray evidences of the dark matter clumps // Gravitation & Cosmology. 2014. Vol. 20. P. 47-54. arXiv:1212.6087 [astro-ph.HE].
67. Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M. The Structure of Cold Dark Matter Halos // Astrophys. J. 1996. Vol. 462. P. 563-575. arXiv:astro-ph/9508025.
68. Moore B. et al. Resolving the Structure of Cold Dark Matter Halos // Astrophysical Journal Letters. 1998. Vol. 499. P. L5-L8. arXiv:astro-ph/9709051.
69. Diemand J., Moore B., Stadel J. Earth-mass dark-matter haloes as the first structures in the early Universe // Nature. 2005. Vol. 433. P. 389-391. arXiv:astro-ph/0501589.
70. Gott J. R. On the Formation of Elliptical Galaxies // Astrophys. J. 1975. Vol. 201. P. 296-310.
71. Gunn J. E. Massive galactic halos. I - Formation and evolution // Astrophys. J. 1977. Vol. 218. P. 592-598.
72. Bertschinger E. Self-similar secondary infall and accretion in an Einstein-de Sitter universe // Astrophys. J. Supp. 1985. Vol. 58. P. 39-65.
73. Lynden-Bell D. Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1967. Vol. 136. P. 101-121.
74. Henriksen R. N., Widrow L. M. Relaxing and virializing a dark matter halo // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1999. Vol. 302. P. 321-336. arXiv:astro-ph/9805277.
75. White S. D. M. Violent Relaxation in Hierarchical Clustering // Proceedings of the 36th Herstmonceux Conference, "Gravitational Dynamics", editors Lahav O., Terlevich E., Terlevich R. arXiv:astro-ph/9602021v1.
76. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Stochastic Correlation Model of Galactic Bulge Velocity Dispersions and Central Black Holes Masses // Письма в Астрон. журнал. 2001. Т. 27. С. 883. arXiv:astro-ph/0202019.
77. Dokuchaev V. I., Eroshenko Yu. N. Origin of Correlations between Central Black Holes Masses and Galactic Bulge Velocity Dispersions // Astron. Astrophys. Trans. 2003. Vol. 22. P. 727-730. arXiv:astro-ph/0209324.
78. Mack K. J., Ostriker J. P., Ricotti M. Growth of Structure Seeded by

- Primordial Black Holes // *Astrophys. J.* 2007. Vol. 665. P. 1277-1287. arXiv:astro-ph/0608642.
79. Scott P., Sivertsson S. Gamma Rays from Ultracompact Primordial Dark Matter Minihalos // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 103. P. 211301. arXiv:0908.4082 [astro-ph.CO].
 80. Yang Y. et al. New Constraints on Primordial Minihalo Abundance Using Cosmic Microwave Background Observations // *Phys. Rev. D.* 2011. Vol. 84. P. 043506. arXiv:1109.0156 [astro-ph.CO].
 81. Saito R., Shirai S. Primordial black hole as a source of the boost factor // *Phys. Lett. B.* 2011. Vol. 697. P. 95-100. arXiv:1009.1947 [hep-ph].
 82. Yang Y. et al. The abundance of new kind of dark-matter structures // *Eur. Phys. J. Plus.* 2011. Vol. 126. P. 123. arXiv:1112.6228 [astro-ph.HE].
 83. Yang Y. et al. Constraints on ultracompact minihalos from extragalactic γ -ray background // *JCAP.* 2011. Vol. 12. P. 020. arXiv:1112.6229 [astro-ph.CO].
 84. Carr B. J., Rees M. J. Can pregalactic objects generate galaxies? // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* 1984. Vol. 206. P. 801-818.
 85. Bertone G., Zentner A. R., Silk J. New signature of dark matter annihilations: Gamma rays from intermediate-mass black holes // *Phys. Rev. D.* 2005. Vol. 72. P. 103517. arXiv:astro-ph/0509565.
 86. Lacki B. C. and Beacom J. F., Primordial Black Holes as Dark Matter: Almost All or Almost Nothing // *Astrophysical J. Lett.* 2010. Vol. 720. P. L67-L71.
 87. Dong Z. Impact of primordial ultracompact minihaloes on the intergalactic medium and first structure formation // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* 2011. Vol. 418. P. 1850-1872. arXiv:1011.1935 [astro-ph.CO].
 88. Ерошенко Ю. Н. Пики плотности темной материи вокруг первичных черных дыр // *Письма в Астрономический журнал.* 2016. Т. 42, С. 389-398.
 89. Ricotti M., Gould A. A New Probe of Dark Matter and High-Energy Universe Using Microlensing // *Astrophys. J.* 2009. Vol. 707. P. 979-987. arXiv:0908.0735 [astro-ph.CO]
 90. Josan A. S., Green A. M. Gamma rays from ultracompact minihalos: Potential constraints on the primordial curvature perturbation // *Phys. Rev. D.* 2010.

- Vol. 82. P. 083527. arXiv:1006.4970 [astro-ph.CO].
91. Bringmann T., Scott P., Akrami Y. Improved constraints on the primordial power spectrum at small scales from ultracompact minihalos // Physical Review D. 2012. Vol. 85. P. 125027. arXiv:1110.2484 [astro-ph.CO].
 92. Li F., Erickcek A. L., Law N. M. A new probe of the small-scale primordial power spectrum: Astrometric microlensing by ultracompact minihalos // Phys. Rev. D. 2012. Vol. 86. P. 043519. arXiv:1202.1284 [astro-ph.CO].
 93. Yang Y. et al., Contribution of ultracompact dark matter minihalos to the isotropic radio background // Physical Review D. 2013. Vol. 87. P. 083519. arXiv:1206.3750v1 [astro-ph.HE].
 94. Yang Y., Yang G., Zong H. Dark-matter decay and the abundance of ultracompact minihalos // Europhysics Letters. 2013. Vol. 101. P. 69001. arXiv:1210.1409 [astro-ph.CO].
 95. Kolb E. W. and Tkachev I. I. Large Amplitude Isothermal Fluctuations And High Density Dark Matter Clumps // Phys. Rev. D. 1994. Vol. 50. P. 769. [arXiv:astro-ph/9403011].
 96. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. О едином происхождении нейтральных звезд и сверхмассивных черных дыр // ЖЭТФ. 2002. Т. 121 С. 5-13. arXiv:astro-ph/0202021.
 97. Berezhinsky V. et al. Superdense cosmological dark matter clumps // Phys. Rev. D. 2010. Vol. 81. P. 103529. arXiv:1002.3444 [astro-ph.CO].
 98. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I., Eroshenko Yu. N. Formation and internal structure of superdense dark matter clumps and ultracompact minihaloes // JCAP. 2013. Vol. 11. P. 059. arXiv:1308.6742 [astro-ph.CO].
 99. Дорошкевич А. Г., Лукаш В. Н., Михеева Е. В. К решению проблем каспов и кривых вращения в гало тёмной материи в космологической стандартной модели // УФН. 2012. Т. 182. С. 3–17.
 100. Moore B. et al. Cold collapse and the core catastrophe // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1999. Vol. 310. P. 1147-1152. arXiv:astro-ph/9903164.
 101. Gao L. The redshift dependence of the structure of massive cold dark matter haloes // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2008. Vol. 387. P. 536-544.

- arXiv:0711.0746 [astro-ph].
102. Burkert A. The Structure of Dark Matter Halos in Dwarf Galaxies // *Astrophys. J.* 1995. Vol. 447. P. L25-L28. arXiv:astro-ph/9504041.
 103. Syer D., White S. D. M. Dark halo mergers and the formation of a universal profile // *MNRAS.* 1998. Vol. 293. P. 337-342.
 104. Springel V. et al. The Aquarius Project: the subhaloes of galactic haloes // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2008. Vol. 391. P. 1685-1711. arXiv:0809.0898 [astro-ph].
 105. Ishiyama T., Makino J., Ebisuzaki T. Gamma-ray Signal from Earth-mass Dark Matter Microhalos // *The Astrophysical Journal Letters.* 2010. Vol. 723. P. L195-L200. arXiv:1006.3392 [astro-ph.CO].
 106. Bullock J. S. et al. Profiles of dark haloes: evolution, scatter and environment // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* 2001. Vol. 321. P. 559-575. arXiv:astro-ph/9908159.
 107. Doroshkevich A. G., Lukash V. N., Mikheeva E. V. A solution of the cusp problem in relaxed halos of dark matter // *Nuovo Cim. B.* 2007. Vol. 122. P. 1393-1398. arXiv:0712.1688v1 [astro-ph].
 108. Berezhinsky V., Dokuchaev V., Eroshenko Y. Remnants of dark matter clumps // *Phys. Rev. D.* 2008. Vol. 77. P. 083519. arXiv:0712.3499 [astro-ph].
 109. Ryden B. S. Galaxy formation - The role of tidal torques and dissipational infall // *Astrophysical Journal.* 1988. Vol. 329. P. 589-611.
 110. Sikivie P., Tkachev I. I., Wang Y. Secondary infall model of galactic halo formation and the spectrum of cold dark matter particles on Earth // *Phys. Rev. D.* 1997. Vol. 56. P. 1863-1878. arXiv:astro-ph/9609022.
 111. Ryden B. S., Gunn J. E. Galaxy formation by gravitational collapse // *Astrophysical Journal.* 1987. Vol. 318. P. 15-31.
 112. Hiotelis N. Density profiles in a spherical infall model with non-radial motions // *Astronomy and Astrophysics.* 2002. Vol. 382. P. 84-91. arXiv:astro-ph/0111324.
 113. Ascasibar Y. et al. On the physical origin of dark matter density profiles // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2004 Vol. 352. P. 1109-1120. arXiv:astro-ph/0312221.

114. Berezhinsky V. S., Gurevich A. V., Zybin K. P. Distribution of dark matter in the galaxy and the lower limits for the masses of supersymmetric particles // Phys. Lett. B. 1992. Vol. 294. P. 221-228.
115. Berezhinsky V., Bottino A., Mignola G. On neutralino stars as microlensing objects // Phys. Lett. B. 1997. Vol. 391. P. 355-359. arXiv:astro-ph/9610060.
116. Ullio P. et al. Cosmological dark matter annihilations into γ rays: A closer look // Phys. Rev. D. 2002. Vol. 66. P. 123502. arXiv:astro-ph/0207125.
117. Kuzmin V., Tkachev I. Ultrahigh-energy cosmic rays, superheavy long-lived particles, and matter creation after inflation // JETP Lett. 1998. Vol. 68. P. 271-275. arXiv:hep-ph/9802304.
118. Полнарев А. Г., Хлопов М. Ю. Космология, первичные черные дыры и сверхмассивные частицы // УФН. 1985. Т. 145. С. 369–401.
119. Berezhinsky V. et al. Annihilations of superheavy dark matter in superdense clumps // Phys. Rev. D. 2010. Vol. 81. P. 103530. arXiv:1002.3445 [astro-ph.GA].
120. Kolb E. W., Tkachev I. I. Axion miniclusters and Bose stars // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 3051-3054. arXiv:hep-ph/9303313.
121. Bardeen J. M. et al., The statistics of peaks of Gaussian random fields // Astrophys. J. 1986. Vol. 304. P. 15-61.
122. Press W. H., Schechter P. Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation // Astrophys. J. 1974. Vol. 187. P. 425-438.
123. Bond J. R. et al. Excursion set mass functions for hierarchical Gaussian fluctuations // Astrophys. J. 1991. Vol. 379. P. 440-460.
124. Bond J. R., Myers S. T. The Peak-Patch Picture of Cosmic Catalogs. I. Algorithms // Astrophysical Journal Supplement. 1996. Vol. 103. P. 1-39.
125. Ade P. A. R. et al., Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation // Astron. Astrophys. 2014. Vol. 571. P. A22. arXiv:1303.5082 [astro-ph.CO].
126. Пиблс Ф. Дж. Э. Структура Вселенной в больших масштабах. Москва: Мир, 1983.
127. Green A. M., Liddle A. R. Constraints on the density perturbation spectrum from primordial black holes // Phys. Rev. D. 1997. Vol. 56. P. 6166-6174.

- arXiv:astro-ph/9704251.
128. Старобинский А. А. Спектр адиабатических возмущений во Вселенной при наличии особенностей в потенциале инфлатона // Письма в ЖЭТФ. 1992. Т. 55. С. 477-482.
 129. Blais D. et al. Accurate results for primordial black holes from spectra with a distinguished scale // Phys. Rev. D. 2003. Vol. 67. P. 024024. arXiv:astro-ph/0206262.
 130. Yokoyama J. Formation of MACHO-primordial black holes in inflationary cosmology // Astron. Astrophys. 1997. Vol. 318. P. 673-679. arXiv:astro-ph/9509027.
 131. Garcia-Bellido J., Linde A. D., Wands D. Density perturbations and black hole formation in hybrid inflation // Phys. Rev. D. 1996. Vol. 54. P. 6040-6058. arXiv:astro-ph/9605094.
 132. Cline J. M., Crotty P., Lesgourgues J. Does the small CMB quadrupole moment suggest new physics? // JCAP. 2003. Vol. 0309. P. 010. arXiv:astro-ph/0304558.
 133. Chung D. J. H. et al. Probing Planckian physics: Resonant production of particles during inflation and features in the primordial power spectrum // Phys. Rev. D. 2000. Vol. 62. P. 043508. arXiv:hep-ph/9910437.
 134. Gelmini G. B., Gondolo P. Ultra-cold weakly interacting massive particles: relics of non-standard pre-big-bang-nucleosynthesis cosmologies // JCAP. 2008. Vol. 0810. P. 002.
 135. Kolb E. W., Tkachev I. I. Femtolensing and Picolensing by Axion Miniclusters // Astrophys. J. 1996. Vol. 460. P. L25-L28. arXiv:astro-ph/9510043.
 136. Silk J., Stebbins A. Clumpy cold dark matter // Astrophys. J. 1993. Vol. 411. P. 439-449.
 137. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Гипотеза задержавшихся в расширении ядер и горячая космологическая модель // Астрон. журн. 1966. Т. 43. С. 758-760.
 138. Hawking S. Gravitationally collapsed objects of very low mass // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1971. Vol. 15. P. 75-78.
 139. Carr B. J. Primordial Black Holes as a Probe of Cosmology and High Energy Physics // Lect. Notes Phys.. 2003. Vol. 631. P. 301-321.

- arXiv:astro-ph/0310838.
140. Carr B. J., Kohri K., Sendouda Y., Yokoyama J. New cosmological constraints on primordial black holes // *Phys. Rev. D.* 2010. Vol. 81. P. 104019. arXiv:0912.5297 [astro-ph.CO].
 141. Belotsky K. M., et al. Signatures of primordial black hole dark matter // *Mod. Phys. Lett. A.* 2014. Vol. 29. P. 1440005. arXiv:1410.0203 [astro-ph.CO].
 142. Josan A. S., Green A. M., Malik K. A. Generalized constraints on the curvature perturbation from primordial black holes // *Phys. Rev. D.* 2009. Vol. 79. P. 103520. arXiv:0903.3184 [astro-ph.CO].
 143. Bugaev E. and Klimai P. Constraints on amplitudes of curvature perturbations from primordial black holes // *Phys. Rev. D.* 2009. Vol. 79. P. 103511. arXiv:0812.4247 [astro-ph].
 144. Dokuchaev V., Eroshenko Yu., Rubin S. Quasars formation around clusters of primordial black holes // *Grav. Cosmol.* 2005. Vol. 11. P. 99-104. arXiv:astro-ph/0412418.
 145. Дубрович В. К. Некоторые наблюдательные проявления дорекомбинационных протообъектов // *Письма в Астрон. журн.* 2003. Vol. 29. С. 9-12.
 146. Dubrovich V. K. and Glazyrin S. I. Cosmological dinosaurs // arXiv:1208.3999 [astro-ph.CO].
 147. Capela F., Pshirkov M., Tinyakov P. Constraints on primordial black holes as dark matter candidates from capture by neutron stars // *Phys. Rev. D.* 2013. Vol. 87. P. 123524. arXiv:1301.4984 [astro-ph.CO].
 148. Carr B. J. The primordial black hole mass spectrum // *Astrophys. J.* 1975. Vol. 201. P. 1-19.
 149. Khlopov M. Yu. and Polnarev A. G. Primordial black holes as a cosmological test of grand unification // *Physics Letters B.* 1980. Vol. 97. P. 383-387.
 150. Заботин Н. А., Насельский П. Д., Полнareв А. Г. High-Amplitude Peaks of Density Disturbances and the Formation of Primordial Black-Holes in the Dust like Universe // *Астрон. журн.* 1987. Т. 64. С. 673-685.
 151. Berezin V. A., Kuzmin V. A., Tkachev I. I. Thin-wall vacuum domain evolution // *Physics Letters B.* 1983. Vol. 120. P. 91-96.
 152. Khlopov M. Yu., Konoplich R. V., Rubin S. G., Sakharov A. S. Formation of

- Black Holes in First Order Phase Transitions // Preprint 1203 (1998), I Roma University; arXiv:hep-ph/9807343.
153. Rubin S. G., Khlopov M. Yu., Sakharov A. S. Primordial Black Holes from Non-Equilibrium Second Order Phase Transition // Grav. Cosmol. S. 2000. Vol. S6. P. 51-58. arXiv:hep-ph/0005271.
 154. Dokuchaev V. I., Eroshenko Yu. N. A Stochastic Model for Correlations between Central Black Hole Masses and Galactic Bulge Velocity Dispersions // Astron. Lett. 2001. Vol. 27. P. 759-764. arXiv:astro-ph/0202019.
 155. Ricotti M. Bondi Accretion in the Early Universe // The Astrophysical Journal. 2007. Vol. 662. P. 53-61. arXiv:0706.0864 [astro-ph].
 156. Nadezhin D. K., Novikov I. D., Polnarev A. G. Hydrodynamics of primordial black hole formation // Soviet Astronomy. 1978. Vol. 22. P. 129-138.
 157. Novikov I. D. et al. Primordial black holes // Astron. Astrophys. 1979. Vol. 80. P. 104-109.
 158. Choptuik M. W. Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70. P. 9-12.
 159. Niemeyer J. C., Jedamzik K. Dynamics of primordial black hole formation // Phys. Rev. D. 1999. Vol. 59. P. 124013. arXiv:astro-ph/9901292.
 160. Yokoyama J. Cosmological constraints on primordial black holes produced in the near-critical gravitational collapse // Phys. Rev. D. 1998. Vol. 58. P. 107502. arXiv:gr-qc/9804041.
 161. Moore B. An upper limit to the mass of black holes in the halo of the galaxy // Astrophys. J. Lett. 1993. Vol. 413. P. L93-L96. arXiv:astro-ph/9306004.
 162. Carr B. J. The contribution of accreting black holes to the background radiation density // MNRAS. 1979. Vol. 189. P. 123-136.
 163. Nemiroff R. J., Marani G. F., Norris J. P., and Bonnel J. T. Limits on the cosmological abundance of supermassive compact objects from a millilensing search in gamma-ray burst data // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 580. arXiv:astro-ph/0101488.
 164. Wilkinson P. N. et al. Limits on the Cosmological Abundance of Supermassive Compact Objects from a Search for Multiple Imaging in Compact Radio Sources // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 584-587. arXiv:astro-ph/0101328.

165. Fan X. et al. A Survey of $z > 5.8$ Quasars in the Sloan Digital Sky Survey. I. Discovery of Three New Quasars and the Spatial Density of Luminous Quasars at $z \approx 6$ // *AJ*. 2001. Vol. 122. P. 2833-2849. arXiv:astro-ph/0108063.
166. Willott C. J., McLure R. J. and Jarvis M. J. A $3 \times 10^9 M_{\odot}$ Black Hole in the Quasar SDSS J1148+5251 at $z = 6.41$ // *Astrophys. J.* 2003. Vol. 587. P. L15-L18. arXiv:astro-ph/0303062.
167. Spitzer L. Jr. Dynamical evolution of Globular Clusters // Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1987.
168. Саслау У. Гравитационная физика звездных и галактических систем. Москва: Мир, 1989.
169. Lightman A. P., and Shapiro S. L. The dynamical evolution of globular clusters // *Rev. Mod. Phys.* 1978. Vol. 50. P. 437-481.
170. Докучаев В. И. Рождение и жизнь массивных черных дыр // *Успехи физических наук*. 1991. Vol. 161. С. 1–52.
171. Rees M. J. Black Hole Models for Active Galactic Nuclei // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 1984. Vol. 22. P. 471-506.
172. Eisenstein D. J. and Loeb A. Origin of quasar progenitors from the collapse of low-spin cosmological perturbations // *Astrophys. J.* 1995. Vol. 443. P. 11-17. arXiv:astro-ph/9401016.
173. Rees M. J. Quasars and Galaxy Formation // in “Physics of Active Galactic Nuclei”, eds. Duschl W. J. and Wagner S. J., Springer-Verlag, Berlin, 1992, P. 662.
174. Gebhardt K., Rich R. M., and Ho L.C. A 20,000 Msolar Black Hole in the Stellar Cluster G1 // *Astrophys. J.* 2002. Vol. 578. P. L41-L45. arXiv:astro-ph/0209313.
175. Bean R. and Magueijo J. Could supermassive black holes be quintessential primordial black holes? // *Phys. Rev. D.* 2002. Vol. 66. P. 063505. arXiv:astro-ph/0204486.
176. Carr B. J. Primordial Black Holes: Do They Exist and Are They Useful? // Proceedings of “Inflating Horizon of Particle Astrophysics and Cosmology”, Universal Academy Press Inc and Yamada Science Foundation (2005). ArXiv:astro-ph/0511743.
177. Ryan M.P. Jr. Is the Existence of a Galaxy Evidence for a Black Hole at its

- Center? // *Astrophys. J. Lett.* 1972. Vol. 177. P. L79-L84.
178. Dokuchaev V. I., Eroshenko Yu. N. Origin of Correlations between Central Black Holes Masses and Galactic Bulge Velocity Dispersions // *Astron. Astrophys. Trans.* 2003. Vol. 22. P. 727-730. arXiv:astro-ph/0209324.
179. Rubin S. G., Sakharov A. S. and Khlopov M. Y. The Formation of Primary Galactic Nuclei during Phase Transitions in the Early Universe // *J. Exp. Theor. Phys.* 2001. Vol. 92. P. 921-929.
180. Khlopov M. Yu. and Rubin S. G. *Cosmological Pattern of Microphysics in the Inflationary Universe* // Kluwer Academic Publishers, 2004, Vol. 144, Dordrecht.
181. Weyl H. *Reine Infinitesimalgeometrie* // *Math. Zeit.* 1918. Vol. 2. P. 384.
182. Mannheim P. D. and Kazanas D. Exact vacuum solution to conformal Weyl gravity and galactic rotation curves // *Astrophys. J.* 1989. Vol. 342. P. 635-638.
183. O'Brien J. G. and Mannheim P. D. Fitting dwarf galaxy rotation curves with conformal gravity // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2012. Vol. 421. P. 1273-1282. arXiv:1107.5229 [astro-ph.CO].
184. Mannheim P. D. and O'Brien J. G. Fitting galactic rotation curves with conformal gravity and a global quadratic potential // *Phys. Rev. D.* 2012. Vol. 85. P. 124020. arXiv:1011.3495 [astro-ph.CO].
185. Mannheim P. D. Conformal cosmology with no cosmological constant // *Gen. Rel. Grav.* 1990. Vol. 22. P. 289-298.
186. Mannheim P. D. Solution to the Ghost Problem in Fourth Order Derivative Theories // *Found. Phys.* 2007. Vol. 37. P. 532-571. arXiv:hep-th/0608154.
187. Mannheim P. D. Making the case for conformal gravity // *Found. Phys.* 2012. Vol. 42. P. 388-420. arXiv:1101.2186 [hep-th].
188. Edery A. and Paranjape M. B. Causal Structure of Vacuum Solutions to Conformal(Weyl)Gravity // *Gen. Rel. Grav.* 1999. Vol. 31. P. 1031-1047. arXiv:astro-ph/9808345
189. Wheeler J. T. Weyl gravity as general relativity // *Phys. Rev. D.* 2014. Vol. 90. P. 025027.
190. Libanov M. and Rubakov V. Conformal Universe as false vacuum decay // *Phys. Rev. D.* 2015. Vol. 91. P. 103515.
191. Vilenkin A. Creation of universes from nothing // *Phys. Lett. B.* 1982. Vol.

117. P. 25-28.
192. Penrose R. Cycles of time: An extraordinary new view of the Universe. London: The Random House, 2010.
193. Penrose R. On the gravitization of quantum mechanics 1: quantum state reduction // Found. Phys. 2014. Vol. 44. P. 557-575.
194. 't Hooft G. Local Conformal Symmetry: the Missing Symmetry Component for Space and Time // arXiv:1410.6675 [gr-qc].
195. Berezin V. A., Kuzmin V. A. and Tkachev I. I. Could the metastable vacuum burn? // Phys. Lett. B. 1983. Vol. 124. P. 479-483.
196. Zel'dovich Ya. B. Particle production in cosmology // JETP Lett. 1970. Vol. 9. P. 307-311.
197. Зельдович Я. Б., Старобинский А. А. Рождение частиц и поляризация вакуума в анизотропном гравитационном поле // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 2161-2175.
198. Lukash V. N., Starobinskii A. A. The isotropization of the cosmological expansion owing to particle production // Sov. Phys. JETP. 1974. Vol. 39. P. 742-747.
199. Parker L. Quantized Fields and Particle Creation in Expanding Universes // Phys. Rev. 1969. Vol. 183. P. 1057-1068.
200. Гриб А. А., Мамаев С. Г. К теории поля в пространстве Фрийдмана // Ядерная физика. 1969. Т. 10. С. 1176-1181.
201. Zel'dovich Ya. B. and Pitaevsky L. P. On the possibility of the creation of particles by a classical gravitational field // Comm. Math. Phys. 1971. Vol. 23. P. 185-188.
202. Марков М. А. Элементарные частицы максимально больших масс (кварки, максимоны) // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. С. 878-890.
203. Markov M. A., Frolov V. P. Metric of a closed Friedman world perturbed by an electric charge // Theoretical and Mathematical Physics. 1970. Vol. 3. P. 301-311.
204. Man'ko V.I., Markov M. A. Properties of fridmons and the early stage of evolution of the universe // Theoretical and Mathematical Physics. 1973. Vol. 17. P. 1060-1063.

205. Markov M. A. The maximon and minimon in light of a possible formulation of the concept of an elementary particle // JETP Lett.. 1987. Vol. 45. P. 141-144.
206. Markov M. A., Frolov V. P. On the minimal size of particles in the general theory of relativity // Theoretical and Mathematical Physics. 1972. Vol. 13. P. 965-979.
207. Markov M. A., Frolov V.P. Maximons and the maximon cluster hypothesis // JETP Lett. 1979. Vol. 29. P. 335-337.
208. Flambaum V. V. and Berengut J. C. Atom made from charged elementary black hole // Phys. Rev. D. 2001. Vol. 63. P. 084010. arXiv:gr-qc/0001022.
209. Floratos E. G., Leontaris G. K. and Vlachos N. D. Gravitational Atom in Compactified Extra Dimensions // Phys. Lett. B. 2011. Vol. 694. P. 410-416. arXiv:1008.0765 [hep-ph].
210. Fil'Chenkov M. L., Laptev Yu. P. Graviatom dipole radiation // Gravitation and Cosmology. 2006. Vol. 12. P. 65-68.
211. Carr B. J., Gilbert J. H. and Lidsey J. E. Black hole relics and inflation: Limits on blue perturbation spectra // Phys. Rev. D. 1994. Vol. 50. P. 4853-4867. arXiv:astro-ph/9405027.
212. MacGibbon J. H. Can Planck-mass relics of evaporating black holes close the universe? // Nature. 1987. Vol. 329. P. 308-309.
213. Dolgov A. D., Naselsky P. D. and Novikov I. D. Gravitational waves, baryogenesis, and dark matter from primordial black holes // arXiv:astro-ph/0009407.
214. Adler R. J., Chen P., Santiago D. I. The Generalized Uncertainty Principle and Black Hole Remnants // General Relativity and Gravitation. 2001. Vol. 33. P. 2101-2108.
215. Chen P., Adler R. J. Black hole remnants and dark matter // Nuclear Physics B Proceedings Supplements. 2003. Vol. 124. P. 103-106. arXiv:gr-qc/0205106.
216. Волович И. В., Загребнов В. А., Фролов В. П. Квантовое рождение частиц (эффект Хокинга) в нестационарных черных дырах // ТМФ. 1976. Т. 29. С. 191–204.
217. Hiscock W. A. Models of evaporating black holes. II. Effects of the outgoing created radiation // Phys. Rev. D. 1981. Vol. 23. P. 2823-2827.

218. Kuroda Y. Vaidya Spacetime as an Evaporating Black Hole // Prog. Theor. Phys. 1984. Vol. 71. P. 1422-1425.
219. Beciu M. I. Evaporating black hole in Vaidya metric // Phys. Lett. A. 1984. Vol. 100. P. 77-79.
220. Kaminaga Y. A dynamical model of an evaporating charged black hole and quantum instability of Cauchy horizons // Class. Quantum Grav. 1990. Vol. 7. P. 1135-1161.
221. Zheng Z., Yang C. Q. and Ren Q. A. Hawking effect in Vaidya-de Sitter spacetime // Gen. Rel. Grav. 1994. Vol. 26. P. 1055-1065.
222. Farley A. N. St. J. and D'Eath P. D. Vaidya Space-Time in Black-Hole Evaporation // Gen. Rel. Grav. 2006. Vol. 38. P. 425-443. arXiv:gr-qc/0510040.
223. Sawayama S. Evaporating dynamical horizon with the Hawking effect in Vaidya spacetime // Phys. Rev. D. 2006. Vol. 73. P. 064024. arXiv:gr-qc/0509048.
224. Knutsen H. On the Vaidya-Tikekar model for a neutron star // Astron. Space Sci. 1984. Vol. 98. P. 207-209.
225. Barreto W. Exploding radiating viscous spheres in general relativity // Astron. Space Sci. 1993. Vol. 201. P. 191-201.
226. Adams R. C., Cary B. B. and Cohen J. M. An analytic model of the core of a supernova // Astron. Space Sci. 1994. Vol. 213. P. 205-232.
227. Sungwook E. H., Hwang D. and Stewart E. D. and Yeom D. The causal structure of dynamical charged black holes // Class. Quant. Grav. 2010. Vol. 27. P. 045014. arXiv:0808.1709 [gr-qc].
228. Alishahiha M., Astanceh A. F. and Mozaffar M. R. M. Thermalization in backgrounds with hyperscaling violating factor // Phys. Rev. D. 2014. Vol. 90. P. 046004. arXiv:1401.2807 [hep-th].
229. Hiscock W. A., Williams L. G. and Eardley D. M. Creation of particles by shell-focusing singularities // Phys. Rev. D. 1982. Vol. 26. P. 751-760.
230. Waugh B. and Lake K. Double-null coordinates for the Vaidya metric // Phys. Rev. D. 1986. Vol. 34. P. 2978-2984.
231. Lindquist R. W., Schwartz R. A., Misner C. W. Vaidya's Radiating Schwarzschild Metric // Physical Review. 1965. Vol. 137. P. B1364-B1368.
232. Berezin V. A., Dokuchaev V. I., and Eroshenko Yu. N. On maximal analytical

- extension of the Vaidya metric. *Class. Quantum Grav.* 2016. Vol. 33 P. 145003. arXiv:1603.00849 [gr-qc].
233. Levin O. and Ori A. Inner structure of an evaporating charged black hole with ingoing charged null fluid // *Phys. Rev. D.* 1996. Vol. 54. P. 2746-2752.
234. Bengtsson I. and Senovilla J. M. M. Note on trapped surfaces in the Vaidya solution // *Phys. Rev. D.* 2009. Vol. 79. P. 024027. arXiv:0809.2213 [gr-qc].
235. Israel W. Gravitational collapse of a radiating star // *Phys. Lett. A.* 1967. Vol. 24. P. 184-186.
236. Fayosyx F., Martín-Prats M. M. and Senovilla J. M. M. On the extension of Vaidya and Vaidya-Reissner-Nordström spacetimes // *Class. Quantum Grav.* 1995. Vol. 12. P. 2565-2576.
237. Krori K. D. and Barua J. Exterior solution for a charged radiating sphere in general relativity // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1974. Vol. 17. P. 2125-2129.
238. Waugh B. and Lake K. Double-null coordinates for the Vaidya metric // *Phys. Rev. D.* 1986. Vol. 34. P. 2978-2984.
239. Zybin K. P., Vysotsky M. I., and Gurevich A. V. The fluctuation spectrum cut-off in a neutralino dark matter scenario // *Phys. Lett. A.* 1999. Vol. 260. P. 262-268.
240. Landau L. D., Lifshits E. M., and Pitaevsky L. P. *Course of Theoretical Physics: Physical kinetics* // Vol. 10, (Pergamon Press, 1981).
241. Гуревич Л. Э., Чернин А. Д. *Введение в Космогонию.* Москва: Наука, 1978.
242. Battaglia M. et al. Updated Post-WMAP Benchmarks for Supersymmetry // *Eur. Phys. J.* 2004. Vol. C33. P. 273-296. arXiv:hep-ph/0306219.
243. Berezhinsky V. et al. Searching for relic neutralinos using neutrino telescopes // *Astropart. Phys.* 1996. Vol. 5. P. 333-352. arXiv:hep-ph/9603342.
244. Bottino A., Fornengo N. and Scopel S. Light relic neutralinos // *Phys. Rev. D.* 2003. Vol. 67. P. 063519. arXiv:hep-ph/0212379.
245. Dunkley J. et al. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Likelihoods and Parameters from the WMAP data // *Astrophys. J. Suppl.* 2009. Vol. 180. P. 306-329. [arXiv:0803.0586 [astro-ph]].
246. Griest K. and Kamionkowski M. Unitarity Limits on the Mass and Radius of Dark Matter Particles // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. P. 615-618.

247. Berezhinsky V. and Kachelrieß M. Monte Carlo simulation for jet fragmentation in SUSY-QCD // *Phys. Rev. D.* 2001. Vol. 63. P. 034007. [arXiv:hep-ph/0009053].
248. Blasi P., Dick R., Kolb E. W. Ultra-high energy cosmic rays from annihilation of superheavy dark matter // *Astropart. Phys.* 2002. Vol. 18. P. 57-66. [arXiv:astro-ph/0105232v3].
249. Gnedin O. Y., Hernquist L., and Ostriker J. P. Tidal Shocking by Extended Mass Distributions // *Astrophys. J.* 1999. Vol. 514. P. 109-118.
250. Arhipova N. A. et al. Mass function of gravitationally bounded objects in the inhomogeneous Universe // *Grav. Cosmol. Suppl.* 2002. Vol. 8. P. 66-71. arXiv:astro-ph/0303572.
251. Moore B. et al. Dark Matter Substructure within Galactic Halos // *Astrophys. J. Lett.* 1999. Vol. 524. P. L19-L22. arXiv:astro-ph/9907411.
252. Calcaneo-Roldan C. and Moore B. Surface brightness of dark matter: Unique signatures of neutralino annihilation in the galactic halo // *Phys. Rev. D.* 2000. Vol. 62. P. 123005. arXiv:astro-ph/0010056.
253. Stoehr F. et al. Dark matter annihilation in the halo of the Milky Way // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2003. Vol. 345. P. 1313-1322. arXiv:astro-ph/0307026.
254. Dalal N. and Kochanek C. S. Direct Detection of CDM Substructure // *Astrophys. J.* 2002. Vol. 572. P. 25-33. arXiv:astro-ph/0111456.
255. Gnedin O. Y., Ostriker J. P. On the Self-consistent Response of Stellar Systems to Gravitational Shocks // *Astrophys. J.* 1999. Vol. 513. P. 626-637. arXiv:astro-ph/9902326.
256. Taylor J. E., Babul A. The Dynamics of Sinking Satellites around Disk Galaxies: A Poor Man's Alternative to High-Resolution Numerical Simulations // *Astrophys. J.* 2001. Vol. 559. P. 716-735.
257. Diemand J., Kuhlen M., Madau P. Formation and Evolution of Galaxy Dark Matter Halos and Their Substructure // *Astrophys. J.* 2007. Vol. 667. P. 859-877. arXiv:astro-ph/0703337.
258. Zhao H. S., Taylor J., Silk J. and Hooper D. Earth-mass dark halos are torn into dark mini-streams by stars // arXiv:astro-ph/0502049v4.
259. Goerdt T. et al. The survival and disruption of cold dark matter microhaloes:

- implications for direct and indirect detection experiments // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*. 2007. Vol. 375. P. 191-198. arXiv:astro-ph/0608495.
260. Ostriker J. P., Spitzer L. Jr., Chevalier R. A. On the Evolution of Globular Clusters // *Astrophys. J. Lett.* 1972. Vol. 176. P. L51-L56.
261. Weinberg M. D. Adiabatic invariants in stellar dynamics. 2: Gravitational shocking // *Astron. J.* 1994. Vol. 108. P. 1403-1413.
262. Eddington A. S. The distribution of stars in globular clusters // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1916. Vol. 76. P. 572-585.
263. Widrow L. M. Distribution Functions for Cuspy Dark Matter Density Profiles // *Astrophys. J. Supp.* 2000. Vol. 131. P. 39-46.
264. Launhardt R., Zylka R., Mezger P. G. The nuclear bulge of the Galaxy. III. Large-scale physical characteristics of stars and interstellar matter // *Astron. Astrophys.* 2002. Vol. 384. P. 112-139. arXiv:astro-ph/0201294.
265. Bell E. F. et al. The Accretion Origin of the Milky Way's Stellar Halo // *Astrophys. J.* 2008. Vol. 680. P. 295-311. arXiv:0706.0004 [astro-ph].
266. King I. The structure of star clusters. I. an empirical density law // *Astron. J.* 1962. Vol. 67. P. 471-485.
267. Schneider A., Krauss L., Moore B. Impact of dark matter microhalos on signatures for direct and indirect detection // *Phys. Rev. D.* 2010. Vol. 82. P. 063525. arXiv:1004.5432 [astro-ph.GA].
268. Atwood W. B. et al. The Large Area Telescope on the Fermi Gamma-Ray Space Telescope Mission // *Astrophys. J.* 2009. Vol. 697. P. 1071-1102. arXiv:0902.1089 [astro-ph.IM].
269. Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И. Происхождение космических лучей. Москва: Изд-во АН СССР, 1963.
270. Березинский В. С. и др. Астрофизика космических лучей. Москва: Наука, 1990.
271. The GALPROP code for cosmic-ray transport and diffuse emission production, <http://galprop.stanford.edu>
272. de Boer W. et al. EGRET excess of diffuse galactic gamma rays as tracer of dark matter // *Astron. Astrophys.* 2005. Vol. 444. P. 51-67 (2005). arXiv:astro-ph/0508617.

273. Mei S. et al. The ACS Virgo Cluster Survey. XIII. SBF Distance Catalog and the Three-dimensional Structure of the Virgo Cluster // *Astrophys. J.* 2007. Vol. 655. P. 144-162. arXiv:astro-ph/0702510.
274. Ackermann M. et al. Constraints on dark matter annihilation in clusters of galaxies with the Fermi large area telescope // *JCAP.* 2010. Vol. 05. P. 025. arXiv:1002.2239 [astro-ph.CO].
275. Olling R. P., Merrifield M. R. Two measures of the shape of the dark halo of the Milky Way // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2000. Vol. 311. P. 361-369.
276. Olling R. P., Merrifield M R Luminous and dark matter in the Milky Way // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2001. Vol. 326. P. 164-180. arXiv:astro-ph/0104465.
277. Ando S., Komatsu E. Anisotropy of the cosmic gamma-ray background from dark matter annihilation // *Phys. Rev. D.* 2006. Vol. 73. P. 023521. arXiv:astro-ph/0512217.
278. Hooper D., Serpico P. D. Angular signatures of dark matter in the diffuse gamma ray background // *JCAP.* 2007. Vol. 06. P. 013. arXiv:astro-ph/0702328.
279. Zhao H. S., Taylor J. E., Silk J., and Hooper D. Tidal Destruction of The First Dark Microhalos // *Astrophys. J.* 2007. Vol. 654. P. 697-701. arXiv: astro-ph/0508215.
280. Mashchenko S., Couchman H. M. P. and Wadsley J. Cosmological puzzle resolved by stellar feedback in high redshift galaxies // *Nature.* 2005. Vol. 442. P. 539-542. arXiv:astro-ph/0605672.
281. Adriani O. et al. PAMELA Results on the Cosmic-Ray Antiproton Flux from 60 MeV to 180 GeV in Kinetic Energy // *Physical Review Letters.* 2010. Vol. 105. P. 121101. arXiv:1007.0821 [astro-ph.HE].
282. Adriani O. et al. Cosmic-Ray Electron Flux Measured by the PAMELA Experiment between 1 and 625 GeV // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106. P. 201101. arXiv:1103.2880 [astro-ph.HE].
283. Cumberbatch D. T., Silk J. Local dark matter clumps and the positron excess // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2007. Vol. 374. P. 455-465. arXiv:astro-ph/0602320.
284. Bergstrom L., Bringmann T., Edsjo J. New positron spectral features from supersymmetric dark matter: A way to explain the PAMELA data? // *Phys.*

- Rev. D. 2008. Vol. 78. P. 103520. arXiv:0808.3725 [astro-ph].
285. Hisano J., Matsumoto S., Nojiri M. M. Explosive Dark Matter Annihilation // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 92. P. 031303. arXiv:hep-ph/0307216.
286. Profumo S. TeV γ -rays and the largest masses and annihilation cross sections of neutralino dark matter // Phys. Rev. D. 2005. Vol. 72. P. 103521. arXiv:astro-ph/0508628.
287. Lattanzi M., Silk J. Can the WIMP annihilation boost factor be boosted by the Sommerfeld enhancement? // Phys. Rev. D. 2009. Vol. 79. P. 083523. arXiv:0812.0360 [astro-ph].
288. Cirelli M. et al. Model-independent implications of the e^\pm source cosmic ray spectra on properties of Dark Matter // Nucl. Phys. B. 2008. Vol. 813. P. 1–21.
289. Cholis I. et al. Case for a 700+GeV WIMP: Cosmic ray spectra from PAMELA, Fermi, and ATIC // Phys. Rev. D. 2009. Vol. 80. P. 123518. arXiv:0811.3641 [astro-ph].
290. Kane G., Lu R., Watson S. PAMELA satellite data as a signal of non-thermal wino LSP dark matter // Phys. Lett. B. 2009. Vol. 681. P. 151-160. arXiv:0906.4765 [astro-ph.HE].
291. Adriani O. et al. An anomalous positron abundance in cosmic rays with energies 1.5-100GeV // Nature. 2009. Vol. 458. P. 607-609. arXiv:0810.4995 [astro-ph].
292. Стожков Ю. И., Гальпер А. М. Международный эксперимент PAMELA // доклад на Семинаре им. Г.Т. Зацепина “Нейтринная и ядерная астрофизика” 18 февраля 2011 г.
293. Стожков Ю. И. Аномальный эффект, открытый в эксперименте ПAMEЛА, и его объяснение // Изв. РАН Сер. физ. 2011. Т. 75. С. 352-355.
294. Blasi P. Origin of the Positron Excess in Cosmic Rays // Phys. Rev. Lett. 2009. Vol. 103. P. 051104. arXiv:0903.2794 [astro-ph.HE].
295. Blasi P. and Serpico P. D. High-Energy Antiprotons from Old Supernova Remnants // Phys. Rev. Lett. 2009. Vol. 103. P. 081103. arXiv:0904.0871. [astro-ph.HE]
296. Padmanabhan T. Subramanian K. Aspects of Zel'dovich Approximation // Astrophys. J. 1993. Vol. 417. P. 3-11.
297. Mc Crea W.H. Relativity Theory and the Creation of Matter // Proc. Roy.

- Soc.. 1951 Vol. A 206. P. 562-575.
298. Eisenstein D. J., Loeb A. An analytical model for the triaxial collapse of cosmological perturbations // *Astrophys. J.* 1995. Vol. 439. P. 520-541. arXiv:astro-ph/9405012.
299. Zabotin N. A., Naselskii P. D., Polnarev A. G. High-Amplitude Peaks of Density Disturbances and the Formation of Primordial Black-Holes in the Dust like Universe // *Soviet Astronomy.* 1987. Vol. 31. P. 353-358.
300. Koay C. G., Sarlls J. E., Ozarslan E. Three-dimensional analytical magnetic resonance imaging phantom in the Fourier domain // *Magnetic Resonance in Medicine.* 2007. Vol. 58. P. 430-436.
301. Дорошкевич А. Г. Пространственная структура возмущений и происхождение вращения галактик во флуктуационной теории // *Астрофизика.* 1970. Т. 6. С. 581-600.
302. Sheth R. K., Mo H. J., Tormen G. Ellipsoidal collapse and an improved model for the number and spatial distribution of dark matter haloes // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2001. Vol. 323. P. 1-12. arXiv:astro-ph/9907024.
303. Seto N., Cooray A. Search for small-mass black-hole dark matter with space-based gravitational wave detectors // *Phys. Rev. D.* 2004. Vol. 70. P. 063512. arXiv:astro-ph/0405216.
304. Tricarico P. Near-earth asteroids detection rate with LISA // *Class. Quantum Grav.* 2009. Vol. 26. P. 085003.
305. Adams A. W., Bloom J. S. Direct Detection of Dark Matter with Space-based Laser Interferometers // arXiv:astro-ph/0405266.
306. Alcock C. et al. The MACHO Project: Microlensing Results from 5.7 Years of Large Magellanic Cloud Observations // *Astrophys. J.* 2000. Vol. 542. P. 281-307. arXiv:astro-ph/0001272.
307. Gurevich A. V. and Zybin K. P. The mass of cold dark matter particles and microlensing // *Phys. Lett. A.* 1995. Vol. 208. P. 276-280.
308. Захаров А. Ф., Сажин М. В. Микролинзирование звездами из нейтралино // *ЖЭТФ.* 1996. Т. 110. С. 1921-1932.
309. Гуревич А. В., Зыбин К. П., Сирота В. А. Мелкомасштабная структура темной материи и микролинзирование // *Успехи физ. наук.* 1997. Т. 167. С.

- 913–943.
310. Sirota V. A. Characteristic Features of Microlensing by Noncompact Objects of Dark Matter // JETP. 2000. Vol. 90. P. 227-239.
 311. Kaaret P. et al. Chandra High-Resolution Camera Observations of the Luminous X-Ray Source in the Starburst Galaxy M82 // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2001. Vol. 321. P. L29-L32. arXiv:astro-ph/0009211.
 312. Abdo A. A. et al. The Spectrum of the Isotropic Diffuse Gamma-Ray Emission Derived From First-Year Fermi Large Area Telescope Data // Phys. Rev. Lett. 2010. Vol. 104. P. 101101. [arXiv:1002.3603v1 [astro-ph.HE]].
 313. Spitzer L. and Saslaw W.C. On the Evolution of Galactic Nuclei // Astrophys. J. 1966. Vol. 143. P. 400-419.
 314. Abraham J. et al. Upper limit on the diffuse flux of UHE tau neutrinos from the Pierre Auger Observatory // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 100. P. 211101. arXiv:0712.1909 [astro-ph].
 315. Ahrens J. et al. Sensitivity of the IceCube detector to astrophysical sources of high energy muon neutrinos // Astropart. Phys. 2004. Vol. 20. P. 507-532. [arXiv:astro-ph/0305196].
 316. Rubtsov G. I. et al. Upper limit on the ultra-high-energy photon flux from AGASA and Yakutsk data // Phys. Rev. D. 2006. Vol. 73. P. 063009. [arXiv:astro-ph/0601449]
 317. Aloisio R., Berezhinsky V. and Kachelrieß M. On the status of superheavy dark matter // Phys. Rev. D. 2006. Vol. 74. P. 023516. [arXiv:astro-ph/0604311].
 318. Berezhinsky V. S. Neutrino astronomy and massive long-lived particles from the big bang // Nuclear Physics B. 1992. Vol. 380. P. 478-506.
 319. Zeldovich Ya. B., Sunyaev R. The interaction of matter and radiation in the hot model of the Universe, II // Astrophys. Sp. Sci. 1970. Vol. 7. P. 20-30
 320. Protheroe R. J., Stanev T. and Berezhinsky V. S. Electromagnetic cascades and cascade nucleosynthesis in the early Universe // Phys. Rev. D. 1995. Vol. 51. P. 4134-4144. arXiv:astro-ph/9409004.
 321. Sigl G., Jedamzik K., Schramm D.N., Berezhinsky V.S. Helium photodisintegration and nucleosynthesis: Implications for topological defects, high-energy cosmic rays, and massive black holes // Phys. Rev. D. 1995. Vol.

52. P. 6682-6693. arXiv:astro-ph/9503094.
322. Berezhinsky V. S., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Dense DM clumps seeded by cosmic string loops and DM annihilation // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2011. Vol. 12. P. 007. arXiv:1107.2751 [astro-ph.HE].
323. Vilenkin A., Shellard E. P. S. Cosmic strings and other topological defects // Cambridge University Press, Cambridge U.K. (1994).
324. Vilenkin A. Cosmic strings: progress and problems // In “Inflating Horizons of Particle Astrophysics and Cosmology”, ed. by H. Suzuki, J. Yokoyama, Y. Suto and K. Sato (Universal Academy Press, Tokyo, 2006). [arXiv:hep-th/0508135v2].
325. Vanchurin V., Olum K. D., Vilenkin A. Scaling of cosmic string loops // Phys. Rev. D. 2006. Vol. 74. P. 063527. arXiv:gr-qc/0511159.
326. Blanco-Pillado J. J., Olum K., Shlaer B. Large parallel cosmic string simulations: New results on loop production // Phys. Rev. D. 2011. Vol. 83. P. 083514. arXiv:1101.5173 [astro-ph].
327. Pogosian L., Wasserman I. and Wyman M. On vector mode contribution to CMB temperature and polarization from local strings // [arXiv:astro-ph/0604141v1].
328. Shlaer B., Vilenkin A., Loeb A. Early structure formation from cosmic string loops // JCAP. 2012. Vol. 05. P. 026. arXiv:1202.1346 [astro-ph.CO].
329. Christiansen J. L. et al. Search for cosmic strings in the Great Observatories Origins Deep Survey // Phys. Rev. D. 2008. Vol. 77. P. 123509. [arXiv:0803.0027v2 [astro-ph]].
330. Olum K. D. and Vilenkin A. Reionization from cosmic string loops // Phys. Rev. D. 2006. Vol. 74. P. 063516. [arXiv:astro-ph/0605465].
331. Abbott B. et al. First LIGO search for gravitational wave bursts from cosmic (super)strings // Phys. Rev. D. 2009. Vol. 80. P. 062002. [arXiv:0904.4718v2 [astro-ph.CO]].
332. van Haasteren R. et.al. Placing limits on the stochastic gravitational-wave background using European Pulsar Timing Array data // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2011. Vol. 414. P. 3117-3128. arXiv:1103.0576 [astro-ph].
333. Allen B. and Shellard E.P.S. Cosmic-string evolution - A numerical simulation

- // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 119-122.
334. Quashnock J. M. and Spergel D. N. Gravitational self-interactions of cosmic strings // Phys. Rev. D. 1990. Vol. 42. P. 2505-2520.
335. Michel F. C. Accretion of Matter by Condensed Objects // Astrophys. Sp. Sc. 1972. Vol. 15. P. 153.
336. Babichev E. O., Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Black hole mass decreasing due to phantom energy accretion // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 93. P. 021102. arXiv:gr-qc/0402089.
337. Babichev E., Dokuchaev V. and Eroshenko Yu. Perfect fluid and scalar field in the Reissner-Nordstrom metric // JETP. 2011. Vol. 112. P. 784-793. arXiv:0806.0916 [gr-qc].
338. Dokuchaev V. I. and Eroshenko Yu. N. Non-orientable wormholes as portals to the mirror world // Phys. Rev. D. 2014. Vol. 90. P. 024056. arXiv:1308.0896 [gr-qc].
339. Morris M. S. and Thorne K. S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity // Am. J. Phys. 1988. Vol. 56. P. 395-412.
340. Sushkov S. V. Wormholes supported by a phantom energy // Phys. Rev. D. 2005. Vol. 71. P. 043520. arXiv:gr-qc/0502084.
341. Gonzalez-Diaz P. F. On the accretion of phantom energy onto wormholes // Phys. Lett. B. 2006. Vol. 632. P. 159-161. arXiv:astro-ph/0510771.
342. Garattini R. and Lobo F. S. N. Self sustained phantom wormholes in semi-classical gravity // Class. Quant. Grav. 2007. Vol. 24. P. 2401-2413. arXiv:gr-qc/0701020.
343. Doroshkevich A., Hansen J., Novikov I. and Shatskiy A. Passage of radiation through wormholes // IJMPD. 2009. Vol. 18. P. 1665-1691. arXiv:0812.0702 [gr-qc].
344. Shatskii A. A. Образ неба другой вселенной, наблюдаемый через горловину кротовой норы // УФН. 2009. Т. 179. С. 861–864.
345. Carr B. J. and Hawking S. W. Black holes in the early Universe // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1974. Vol. 168. P. 399-416.
346. Nadezhin D. K., Novikov I. D. Polnarev A. G. Hydrodynamics of primordial

- black hole formation // Soviet Astronomy. 1978. Vol. 22. P. 129-138.
347. Novikov I. D., Polnarev A. G., Starobinskii A. A., Zeldovich Ia. B. Primordial black holes // Astronomy and Astrophysics. 1979. Vol. 80. P. 104-109.
348. Bicknell G. V., Henriksen R. N. Formation of primordial black holes // Astrophysical Journal. 1979. Vol. 232. P. 670-682.
349. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика // (М.: Физматлит, 2004).
350. Davis M. et al. The evolution of large-scale structure in a universe dominated by cold dark matter // Astrophys. J. 1985. Vol. 292. P. 371-394.
351. Kormendy J. and Richstone D. Inward Bound – The Search For Supermassive Black Holes In Galactic Nuclei // ARA& A. 1995. Vol. 33. P. 581-624.
352. Gebhardt K. et al. A Relationship between Nuclear Black Hole Mass and Galaxy Velocity Dispersion // Astrophys. J. 2000. Vol. 539. P. L13-L16. arXiv:astro-ph/0006289.
353. Ferrarese L. and Merritt D. A Fundamental Relation between Supermassive Black Holes and Their Host Galaxies // The Astrophysical Journal. 2000. Vol. 539. P. L9-L12. arXiv:astro-ph/0006053.
354. Silk J. and Rees M.J. Quasars and Galaxy Formation // Astron. Astrophys. 1998. Vol. 331. P. L1-14. arXiv:astro-ph/9801013.
355. Fukugita M. and Turner E.L. Quasars from Galaxy Collisions with Naked Black Holes // Astrophys. J. 1996. Vol. 460. P. L81-L84. arXiv:astro-ph/9506129.
356. Mo H. J. and White S. D. M. The abundance and clustering of dark haloes in the standard Λ -CDM cosmogony // MNRAS. 2002. Vol. 336. P. 112-118. arXiv:astro-ph/0202393.
357. Ferrarese L. and Merritt D. A Fundamental Relation Between Supermassive Black Holes and Their Host Galaxies // Astrophys. J. 2000. Vol. 539. P. L9-L12. arXiv:astro-ph/0006053.
358. Khlopov M. Yu., Rubin S. G. and Sakharov A. S. Primordial Structure of Massive Black Hole Clusters // Astroparticle Physics. 2005. Vol. 23. P. 265-277. arXiv:astro-ph/0401532.
359. Vestergaard M. Determining Central Black Hole Masses in Distant Active Galaxies // Astrophys. J. 2002. Vol. 571. P. 733-752. arXiv:astro-ph/0204106.
360. Dietrich M. et al. Continuum and Emission-Line Strength Relations for a Large

- Active Galactic Nuclei Sample // *Astrophys. J.*. 2002. Vol. 581. P. 912-924. arXiv:astro-ph/0208348.
361. Dokuchaev V. I., Eroshenko Yu. N. and Ozernoy L. M. The Eddington Luminosity Phase // in *Quasars: Duration and Implications in COSMIC EXPLOSIONS: Tenth Astrophysics Conference*. AIP Conference Proceedings. 2000. Vol. 522. P. 321-324. arXiv:astro-ph/9912152.
362. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. и Рубин С. Г. Всплески гравитационных волн от столкновений черных дыр в скоплениях // *Письма в Астрономический журнал*. 2009. Т. 35. С. 163-170. arXiv:1003.4158 [astro-ph.CO].
363. Rubin S. G. I. Ya Pomeranchuk and *Physics at the Turn of the Century* // Eds.: A. Berkov, N. Narozhny, and L. Okun. Singapore, World Scientific, 2003. arXiv:astro-ph/0511181.
364. <http://lisa.jpl.nasa.gov/> ???
365. Cattaneo A. et al. Active Galactic Nuclei In Cosmological Simulations - I. Formation of black holes and spheroids through mergers // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2005. Vol. 364. P. 407-423. arXiv:astro-ph/0509116.
366. Volonteri M., Lodato G., Natarajan P. The evolution of massive black hole seeds // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2008. Vol. 383. P. 1079-1088. arXiv:0709.0529.
367. Di Matteo T. et al. Direct cosmological simulations of the growth of black holes and galaxies // *The Astrophysical Journal*. 2008. Vol. 676. P. 33-53. arXiv:0705.2269.
368. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н., Рубин С. Г. Раннее формирование галактик, инициированное скоплениями черных дыр // *Астрон. ж.* 2008. Т. 85. С. 867-878. arXiv:0801.0885.
369. Mouri H., Taniguchi Y. Runaway Merging of Black Holes: Analytical Constraint on the Timescale // *Astrophys. J.* 2002. Vol. 566. P. L17-L20. arXiv:astro-ph/0201102.
370. Грищук Л. П., Липунов В. М., Постнов К. А., Прохоров М. Е. и Сатьяпракаш Б. С. Гравитационно-волновая астрономия: в ожидании первого зарегистрированного источника // *УФН*. 2001. Т. 171. С. 3-59.
371. Will C. M. On the Rate of Detectability of Intermediate-Mass Black

- Hole Binaries Using LISA // *Astrophys. J.* 2004. Vol. 611. P. 1080-1083. arXiv:astro-ph/0403644.
372. Finn L. S., Thorne K. S. Gravitational waves from a compact star in a circular, inspiral orbit, in the equatorial plane of a massive, spinning black hole, as observed by LISA // *Phys. Rev. D.* 2000. Vol. 62. P. 124021. arXiv:gr-qc/0007074.
373. Sesana A. et al. The Gravitational Wave Signal from Massive Black Hole Binaries and Its Contribution to the LISA Data Stream // *Astrophys. J.* 2005. Vol. 623. P. 23-30. arXiv:astro-ph/0409255.
374. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Взвешивание темной материи в центре Галактики // *Письма в ЖЭТФ.* 2015. Т. 101. С. 875-880. arXiv:1508.05725 [astro-ph.HE].
375. Ghez A. M., et al. Measuring Distance and Properties of the Milky Way's Central Supermassive Black Hole with Stellar Orbits // *Astrophys. J.* 2008. Vol. 689. P. 1044-1062. arXiv:0808.2870 [astro-ph].
376. Gillessen S. et al. Monitoring Stellar Orbits Around the Massive Black Hole in the Galactic Center // *Astrophys. J.* 2009. Vol. 692. P. 1075-1109. arXiv:0810.4674 [astro-ph].
377. Gillessen S. et al. The Orbit of the Star S2 Around SGR A* from Very Large Telescope and Keck Data // *Astrophys. J.* 2009. Vol. 707. P. L114-L117. arXiv:0910.3069 [astro-ph.GA].
378. Meyer L. et al. The Shortest-Known-Period Star Orbiting Our Galaxy's Supermassive Black Hole // *Science.* 2012. Vol. 338. P. 84-87. arXiv:1210.1294 [astro-ph.GA].
379. Aschenbach B. et al. X-ray flares reveal mass and angular momentum of the Galactic Center black hole // *Astron. Astrophys.* 2004. Vol. 417. P. 71-78. arXiv:astro-ph/0401589.
380. Genzel R. et al. Near-infrared flares from accreting gas around the supermassive black hole at the Galactic Centre // *Nature.* 2003. Vol. 425. P. 934-937. arXiv:astro-ph/0310821.
381. Dokuchaev V. I. Spin and mass of the nearest supermassive black hole // *Gen. Relativ. Gravit.* 2014. Vol. 46. P. 1832. arXiv:1306.2033 [astro-ph.HE].

382. Rubilar G. F. and Eckart A. Periastron shifts of stellar orbits near the Galactic Center // *Astron. Astrophys.* 2001. Vol. 374. P. 95-104.
383. Mouawad N. et al. Weighing the cusp at the Galactic Centre // *Astron. Nachr.* 2005. Vol. 326. P. 83-95. arXiv:astro-ph/0402338.
384. Zakharov A. F. et al. Apoastron shift constraints on dark matter distribution at the Galactic Center // *Phys. Rev. D.* 2007. Vol. 76. P. 062001. arXiv:0707.4423 [astro-ph].
385. Gualandris A., Gillessen S., Merritt D. The Galactic Centre star S2 as a dynamical probe for intermediate-mass black holes // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2010. Vol. 409. P. 1146-1154. arXiv:1006.3563 [astro-ph.GA].
386. de Paolis F. et al. Estimating the parameters of the Sgr A* black hole // *Gen. Rel. Gravit.* 2011. Vol. 43. P. 977-988. arXiv:1011.1545 [astro-ph.GA].
387. Borka D. et al. Constraining the range of Yukawa gravity interaction from S2 star orbits // *JCAP.* 2013. Vol. 11. P. 050. arXiv:1311.1404 [astro-ph.GA].
388. Hall J., Gondolo P. Stellar orbit constraints on neutralino annihilation at the galactic center // *Phys. Rev. D.* 2006. Vol. 74. P. 063511. arXiv:astro-ph/0602400.
389. Daylan T. et al. The Characterization of the Gamma-Ray Signal from the Central Milky Way: A Compelling Case for Annihilating Dark Matter // *Physics of the Dark Universe.* 2016. Vol. 12. P. 1-23 arXiv:1402.6703 [astro-ph.HE].
390. Fields B. D., Shapiro S. L., Shelton J. Galactic Center Gamma-Ray Excess from Dark Matter Annihilation: Is There a Black Hole Spike? // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 113. P. 151302. arXiv:1406.4856 [astro-ph.HE].
391. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. Москва: Наука, 1965. Глава XI.
392. Iorio L. Exact Expressions for the Pericenter Precession Caused by Some Dark Matter Distributions and Constraints on Them from Orbital Motions in the Solar System, in the Double Pulsar and in the Galactic Center // *Galaxies.* 2013. Vol. 1. P. 6-30. arXiv:1304.6396 [gr-qc].
393. Scherrer R. J., Turner M. S. On the relic, cosmic abundance of stable, weakly interacting massive particles // *Phys. Rev. D.* 1986. Vol. 33. P. 1585-1589.
394. Bach R. Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des

- Krumpungsbegriffs // Math. Zeitschr. 1921. Vol. 9. P. 110-135.
395. Polyanin A. D. and Zaitsev V. F. Handbook of nonlinear partial differential equations // CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton, Chapter 7.5.2.1. P. 540. (2012).
396. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Москва: Физматлит, 2006.
397. DeWitt B. S. Dynamical theory of groups and fields. NY: Gordon and Breach, 1965. Chapter 16.
398. Докучаев В. И., Ерошенко Ю. Н. Стационарные решения уравнения Дирака в гравитационном поле заряженной черной дыры // ЖЭТФ. 2013. Т. 144, С. 85-91.
399. Fock V. Geometrization of Dirac's Theory of Electron // Zeitschrift fur Physik. 1929. Vol. 57. P. 261-277.
400. Fock V., Iwanenko D. Uber eine mogliche geometrische deutung der relativistischen quantentheorie // Zeitschrift fur Physik. 1929. Vol. 54. P. 798-802.
401. Вейнберг С. Гравитация и космология. Волгоград: Платон, 2000.
402. Brill D. R., Wheeler J. A. Interaction of Neutrinos and Gravitational Fields // Reviews of Modern Physics. 1957. Vol. 29. P. 465-479.
403. Mukhopadhyay B. Behaviour of a spin-1/2 particle around a charged black hole // Class. Quant. Grav. 2000. Vol. 17. P. 2017-2026. arXiv:gr-qc/0003061.
404. Berezin V. A. Neutrino forces and the Schwarzschild metric // препринт ИЯИ АН СССР, (1975).
405. Deruelle N., Ruffini R. Quantum and classical relativistic energy states in stationary geometries // Physics Letters B. 1974. Vol. 52. P. 437-441.
406. Тернов И. М. и др. Фinitное движение массивных частиц в полях Керра и Шварцшильда // Известия ВУЗов. Физика. 1978. Vol. 9. С. 109-114.
407. Kofman L. A. Bound states in quantum evaporation of black holes // Phys. Lett. A. 1982. Vol. 87. P. 281-284.
408. Soffel M., Muller B., and Greiner W. Particles in a stationary spherically symmetric gravitational field // J. Phys. A: Math. Gen. 1977. Vol. 10. P. 551-560.
409. Тернов И. М., Гайна А. Б., Чижов Г. А. Фinitное движение электронов в поле микроскопических дыр // Известия ВУЗов. Физика. 1980. Т. 8. С. 56-62.

410. Гальцов Д. В., Померанцева Г. В., Чижов Г. А. Заполнение электронами квазисвязанных состояний в поле Шварцшильда // Известия ВУЗов. Физика. 1983. Т. 8. С. 75-77.
411. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. Stationary Bound States of Dirac Particles in Collapsar Fields // arXiv:1205.4348 [gr-qc].
412. Vronsky M. A. et al. Stationary Bound States of Dirac Particles in the Schwarzschild Gravitational Field // arXiv:1301.7595 [gr-qc].
413. Dzhunushaliev V. Canonical conjugated Dirac equation in a curved space // arXiv:1202.5100 [gr-qc].
414. Чандрасекар С. Математическая теория черных дыр // Москва: Мир, 1980, Часть 1, Глава 5.
415. Dokuchaev V. I. Is there life inside black holes? // Class. Quant. Grav. 2011. Vol. 28. P. 235015. arXiv:1103.6140 [gr-qc].
416. Воловик Г. Е. Simulation of Panlev-Gullstrand black hole in thin 3He-A film // Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 69. С. 662-668.
417. Miao Y., Xue Z., and Zhang S. Massive charged particle's tunneling from spherical charged black hole // Europhys. Lett. 2011. Vol. 96. P. 10008.
418. Ternov I. M., Gaina A. B. On the energies spectrum of the Dirac equation in the Schwarzschild and Kerr fields // Fizika. 1988. Vol. 31. P. 86-92.
419. Gaina A. B., Zaslavskii O. B. On quasilevels in the gravitational field of a black hole // Classical and Quantum Gravity. 1992. Vol. 9. P. 667-676.
420. Lasenby A. et al. Bound states and decay times of fermions in a Schwarzschild black hole background // Phys. Rev. D. 2005. Vol. 72. P. 105014. arXiv:gr-qc/0209090.
421. Сахаров А. Д. Испарение черных мини-дыр и физика высоких энергий // ЖЭТФ. Письма в редакцию. 1986. Т. 44. С. 295-298.
422. Frolov V. P., Markov M. A. and Mukhanov V. F. Black holes as possible sources of closed and semiclosed worlds // Phys. Rev. D. 1990. Vol. 41. P. 383-394.
423. Bicak J., Suchlik Z., Balek V. The motion of charged particles in the field of rotating charged black holes and naked singularities // Astronomical Institutes of Czechoslovakia, Bulletin. 1989. Vol. 40. P. 65-92.
424. Khlopov M. Yu., Mayorov A. G., Soldatov E. Yu. Towards Nuclear Physics of

- OHe Dark Matter // arXiv:1111.3577 [hep-ph].
425. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. Stationary bound states of spin-half particles in the Reissner-Nordstroem gravitational field // arXiv:1302.2557 [gr-qc].
426. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. Stationary bound states of spin-half particles in the Kerr and Kerr-Newman gravitational fields // arXiv:1303.1127 [gr-qc].
427. Vaidya P. C. The External Field of a Radiating Star in General Relativity // Current Sci. 1943. Vol. 12. P. 183-184.
428. Vaidya P. The gravitational field of a radiating star // Proc. Indian Acad. Sci. A. 1951. Vol. 33. P. 264-276.
429. Vaidya P. Newtonian Time in General Relativity // Nature. 1953. Vol. 171. P. 260-261.