

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Петров Павел Константинович

**Космологические решения в теориях со
старшими производными. Самосогласованность
классического описания.**

Специальность 1.3.3 — теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук,
Миронов С. А.

Москва – 2024

Посвящается памяти Рубакова Валерия Анатольевича

Содержание

Введение	6
1 Векторные галилеонные поля	17
1.1 Лагранжианы со вторыми производными в пространстве Минковского.	18
1.2 Включая динамическую гравитацию.	22
1.3 Стабильное решение, нарушающее условие энергодоминантности, в пространстве Минковского.	24
1.3.1 Решение.	24
1.3.2 Условия устойчивости в пространстве Минковского.	26
2 Степенной генезис в случае векторных галилеонных полей	28
2.1 Масштаб сильной связи	31
2.2 Модель для векторного поля с устойчивым NEC-нарушающим решением	35
2.2.1 Эволюция на ранних временах: в пространстве Минковского.	35
2.2.2 Включение динамической гравитации.	38
2.3 Основные результаты	40
3 Самосогласованность классической теории для генезиса с сильной гравитацией в прошлом	43
3.1 Общие положения	47
3.1.1 Модель	47
3.2 Предварительный анализ	49
3.3 Анализ	52
3.3.1 Упрощения	52
3.3.2 Лидирующие члены в действии	55
3.3.3 Решения для α , β и N_i^T	57

3.3.4	Отрешанное действие	58
3.3.5	Ограничения на μ и на δ	58
3.4	Основные результаты	59
4	Космологические возмущения	
	в несингулярных космологиях Хорндески	61
4.1	Модели Хорндески, имеющие степенное решение	61
4.1.1	Модель	61
4.1.2	Степенное сжатие	63
4.2	Космологические возмущения	66
4.3	Плоскостность спектров и масштабная инвариантность	69
4.4	Малое значение r отношения и проблема сильной связи	71
4.5	Древесная унитарность и масштаб сильной связи	77
4.5.1	Соотношения унитарности при различных скоростях звука	77
4.5.2	Размерный анализ для случая $u_S \ll 1$	79
4.5.3	Иерархия перемасштабированных амплитуд	81
4.5.4	Масштаб сильной связи от унитарных ограничений на дре- весном уровне	85
4.6	Примеры	86
4.6.1	$\mu > 1, n_S < 1$	86
4.6.2	$\mu = 1, n_S = 1$	93
4.7	Основные результаты	96
	Заключение	97
	Список литературы	100
	Приложение	112
A	Анализ структуры лагранжианов для векторных галилеонов	112

В	Разложение $\sqrt{-g}\mathcal{L}$ в переменных $\alpha, \beta, \zeta, N_i^T$ и h_{ij}	127
С	Решение уравнений связи	131
Д	Отрешанное действие	138
Е	Общие выражения в модели Хорндески	140
Ф	Спектр для возмущений	140
Г	Наибольшие слагаемые в кубическом действии	142
Н	Ковариантный лагранжиан	145
І	Масштабный фактор и параметр Хаббла в системе Эйнштейна	147
Ж	Стабильное космологическое решение: сжатие, отскок и первичный разогрев	148

Введение

Актуальность темы исследования

В настоящее время благодаря обширным теоретическим исследованиям и экспериментальным данным мы имеем детальное представление о свойствах ранней Вселенной как качественные, так и количественные. Инфляционная теория [1–5] сейчас является доминирующей парадигмой, соответствующей результатам экспериментов. Согласно этой теории, перед горячей стадией существовала фаза быстрого, почти экспоненциального расширения Вселенной. Это интенсивное расширение объясняет большие размеры видимой части Вселенной, ее однородность и изотропность, а также плоскостность метрики. После инфляции происходит разогрев, решающий проблему энтропии и неоднородностей [6–9], что естественным образом объясняет начальные условия Вселенной. Были предложены многочисленные варианты моделей инфляции [10–23]. Экспериментальные и наблюдательные данные ограничивают возможные параметры теорий, но не дают однозначного ответа на выбор единственно верной теории [24]. Для окончательного подтверждения инфляционной теории необходимо провести дополнительные экспериментальные исследования современной Вселенной. Например, многие модели инфляции предсказывают наличие реликтовых гравитационных волн во Вселенной, однако пока что такие эффекты не были обнаружены экспериментально.

Несмотря на огромный успех инфляционной теории в описание прошлого Вселенной в ней существуют проблемы. Одна из них - это наличие начальной сингулярности. Начальная сингулярность является характерным свойством инфляционных космологических решений [25]. С одной стороны данная проблема может быть решена посредством построения полной теории квантовой гравитации, которая могла бы описать полностью прошлое Вселенной. Другой способ - это предположить существование некоторой эффективной теории гравитации, которая позволит построить несингулярный сценарий ранней Вселенной. Поми-

мо этого, исследование данного вопроса позволит проверить, какие модификации теории гравитации возможны и расширят наше знание о фундаментальном устройстве природы.

Таким образом, интересно исследовать альтернативные и несингулярные космологические сценарии ранней Вселенной, помимо инфляции. Изучение таких сценариев может как подтвердить теорию инфляции, если другие сценарии окажутся непригодными из-за несовместимости с наблюдениями или наличия внутренних противоречий, так и дополнить инфляционную модель, например, устранив проблему начальной сингулярности.

Для построения несингулярных сценариев ранней Вселенной зачастую требуется нарушение [26] изотропного условия энергодоминантности (NEC) [25, 27], [28, 29]. Это условие имеет вид:

$$T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu > 0, \quad (1)$$

для любого светоподобного вектора n^μ . В космологическом контексте это условие принимает вид

$$\rho + p > 0. \quad (2)$$

До недавнего времени считалось, что непатологично (без возникновения градиентных или духовых неустойчивостей) нарушить NEC невозможно. Например, в теориях действительного скалярного поля, минимально связанного с гравитацией и с лагранжианами, содержащими только первые производные, нарушение условия NEC приводит к неустойчивостям [13, 30].

Тем не менее возможно нарушить NEC без возникновения неустойчивостей в теориях, чьи лагранжианы включают старшие производные от полей. Одним из примеров является *теория Хорндески*, [31, 32]. Теория Хорндески — это скалярно-тензорная модификация гравитации:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L},$$

где g — это детерминант метрики и

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\square\phi + G_4(\phi, X)R + G_{4X} [(\square\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2] \\ & + G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi - \frac{1}{6}G_{5X} [(\square\phi)^3 - 3\square\phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3], \end{aligned}$$

где R — это скаляр Риччи, ϕ — это действительное скалярное поле, $X = -\frac{g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi}{2}$, $\square\phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi$, $G_{4X} \equiv \partial G_4/\partial X$ и т.д. Здесь $G_{2,3,4,5}$ — это произвольные функции поля ϕ и X . Одной из интересных, актуальных и нерешенных задач является попытка обобщения теории Хорндески на другие поля помимо скалярных. Данные обобщения потенциально могут приводить к новым космологическим сценариям, которые были бы нереализуемы в рамках обычной скалярно-тензорной теории гравитации. Поэтому в рамках данной работы будут построены и изучены обобщения теории Хорндески на векторные поля.

Другая интересная проблема, которая возникает при попытке построить несингулярные сценарии Вселенной на основе теорий со старшими производными — это потенциальная опасность несамосогласованности классического описания. В работах [33, 34] для общей теории Хорндески, были сформулированы так называемые *запрещающие* теоремы (от англ. "no-go theorem") о невозможности построения устойчивых и несингулярных космологических решений на протяжении всей эволюции Вселенной. Один из способов обойти "no-go" теорему — это потребовать, чтобы эффективная масса Планка стремилась к нулю в асимптотическом прошлом. Другой способ — это использовать "расширенные" теории Хорндески (от англ. "beyond Horndeski theories") [35–37]. В данной диссертации я не рассматриваю эту возможность. Поэтому, если идти первым путем (т.е. рассматривать теории с потенциальной сильной связью в прошлом), то необходимо научиться давать ответ на вопрос о применимости классического описания к тому или иному несингулярному космологическому сценарию.

Одной из **актуальных** и новых задач в этой области является разработка метода, который позволил бы провести данный анализ (применимости классического описания), учитывая все порядки по теории возмущений. В данной

диссертации будет разработан данный метод и применен для сценария космологического генезиса, построенного в рамках теории Хорндески и с сильной гравитацией в прошлом [34].

После разработки данного метода естественным образом возникает новая **актуальная** и важная задача, а именно: построение устойчивого и несингулярного космологического сценария, для которого применимо классическое описание на ранних этапах эволюции, а также который приводит к наклонам спектров, согласующихся с экспериментальными данными. Данная задача обладает высокой актуальностью, так как данный сценарий способен быть полноценной и непатологической альтернативой теории инфляции. Он не только решает проблему начальной сингулярности, но и позволяет экспериментально проверить ультрафиолетовые модификации теории гравитации.

В данной диссертации будет построен и проанализирован подобный сценарий, а именно: сценарий Вселенной с отскоком в рамках теории Хорндески. Для данного сценария будет найден спектр космологических возмущений. А затем данный спектр будет сравнен с экспериментальными данными.

Цели и задачи диссертации

Цель данного диссертационного исследования - изучить теории с лагранжианами, содержащими старшие производные, и построить несингулярные космологические сценарии на основе этих теорий. Для достижения этой цели были поставлены следующие **задачи**:

- Построить векторный аналог обобщенных галилеонов, а далее исследовать космологические сценарии, которые можно построить на их основе.
- Разработать метод исследования вопроса сильной связи для несингулярных космологических сценариев во всех порядках по теории возмущений. И применить данный метод к конкретным космологическим сценариям.
- Наконец, построить полный и устойчивый на всех временах сценарий Все-

ленной с отскоком, который приводит к спектру возмущений, согласующемуся с экспериментом.

Научная новизна диссертации

Все основные положения, выдвигаемые на защиту, являются новыми. Так, построение векторных аналогов обобщенных галилеонов является новой задачей, которая до этого не освещалась в литературе.

Также до сих пор не был разработан метод, который позволяет проанализировать сильную связь во всех порядках по теории возмущений для несингулярных космологических сценариев с сильной гравитацией в прошлом. Поэтому данная задача является новой.

До сих пор в рамках теории Хорндески не был построен сценарий Вселенной с отскоком, с сильной гравитацией в прошлом, который бы приводил к спектру возмущений, совпадающему с экспериментальными данными.

Теоретическая и практическая значимость диссертации

Все результаты, полученные в диссертации имеют теоретическое значение. Предложенный устойчивый космологический сценарий Вселенной с отскоком в рамках подкласса теории Хорндески без начальной сингулярности и без сильной связи в прошлом является реалистичным примером модели ранней Вселенной. Также этот сценарий приводит к наклонам спектров, которые совпадают с экспериментальными данными. Благодаря тому, что построенная модель в будущем выходит на стадию, где динамика расширения определяется безмассовым скалярным полем и стандартной ОТО, указанный сценарий допускает естественный выход на горячую стадию после отскока, что делает данное решение интересным с точки зрения построения полной модели Вселенной.

Методология диссертационного исследования

В данной работе используются как численные, так и аналитические методы,

которые успешно применяются для решения различных задач в теоретической физике, классической и квантовой теории поля и космологии.

Положения, выносимые на защиту

1. Построены новые модели, содержащие векторные поля. Данные модели являются аналогами обобщенных галилеонов и представляют интерес для построения различных космологических сценариев. Также в рамках данной модели возможно существование фоновых решений, которые стабильны, несмотря на отсутствие калибровочной инвариантности. Некоторые из этих фоновых решений нарушают нулевое условие энергодоминантности.
2. В рамках класса моделей с векторными аналогами обобщенных галилеонов построена ранняя стадия космологического генезиса, для которой фоновое решение является устойчивым и находится вне режима сильной связи.
3. Для модели космологического генезиса с сильной гравитацией в прошлом проведен анализ проблемы сильной связи для всех порядков теории возмущений. Были сформулированы условия отсутствия сильной связи в данной модели.
4. Построена модель Вселенной с отскоком в рамках теории Хорндески. В рамках этой модели показано, что спектры космологических возмущений, совпадающие с экспериментальными, могут быть сгенерированы на ранней стадии сжатия. Малость r -отношения определяется малостью скалярной скорости звука. Произвольно малые значения r -отношения запрещены в нашей модели из-за условия отсутствия сильной связи в прошлом. Тем не менее, показывается, что возможно генерировать возмущения контролируемым образом, т.е. в режиме, где фоновая эволюция и возмущения

законно описываются в рамках классической теории поля и слабосвязанной квантовой теории.

Достоверность и обоснованность результатов

Результаты диссертации были опубликованы в рецензируемых международных научных журналах, а также обсуждались в рамках докладов на международных конференциях.

Апробация результатов

Основные результаты, изложенные в диссертации, были представлены на следующих конференциях и семинарах:

1. "Степенной генезис: Сильная связь и векторные галилеонные поля". 30 апреля 2020 г. Семинары отдела теоретической физики ИЯИ РАН, Москва, Россия.
2. «Сценарий космологического генезиса в теории Хорндески, самосогласованность классического описания» 19-20 апреля. Молодежная конференция по физике элементарных частиц и космология, 2021, X, Москва, Россия.
3. "Генерация космологических возмущений в модели Вселенной с отскоком, в теории Хорндески". Международная конференция по физике элементарных частиц и космологии 02-07 октября 2023 г. Ереван, Армения.
4. «Космологические возмущение в модели Вселенной с отскоком в теории Хорндески.», Семинар теоретической группы МФТИ, 7 ноября 2023 г., Москва, Россия

Результаты также были представлены 19 февраля 2024 г. на семинаре отдела теоретической физики Института ядерных исследований Российской академии наук.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах Web of Science, Scopus и RSCI:

1. P. Petrov, “Galileon-like vector fields,” Phys. Rev. D 100, no.2, 025006 (2019) [arXiv:1812.11134 [hep-th]].
2. P. K. Petrov, “Power-law Genesis: strong coupling and galileon-like vector fields,” Mod. Phys. Lett. A 35, no.37, 2050305 (2020) [arXiv:2004.13123 [hep-th]].
3. Y. Ageeva, P. Petrov and V. Rubakov, “Horndeski genesis: consistency of classical theory,” JHEP 12, 107 (2020) [arXiv:2009.05071 [hep-th]].
4. Y. Ageeva, P. Petrov and V. Rubakov, “Generating cosmological perturbations in non-singular Horndeski cosmologies,” JHEP 01, 026 (2023) [arXiv:2207.04071 [hep-th]].

Личный вклад автора

Все результаты, выносимые на защиту, получены лично автором или при его непосредственном участии.

Структура, объем и краткое содержание работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, десяти приложений и списка литературы. Общий объем работы 155 страниц. Диссертация содержит 20 рисунков. Список литературы включает 105 наименований.

В **главе 1** рассматриваются векторные аналоги обобщенных галилеонов. Так, в параграфе 1.1 строятся векторные аналоги обобщенных галилеонов в пространстве Минковского. В параграфе 1.2 построенные модели рассматриваются в случае включения динамической гравитации. Затем проверяется, какие из построенных лагранжианов по-прежнему приводят к уравнениям движения,

содержащим только вторые производные в случае включения динамической гравитации. В параграфе 1.3 подробно обсуждается устойчивое решение, нарушающее нулевое условие энергодоминантности. Также получены условия устойчивости и условие отсутствия сверхсветовых возмущений над однородным и изотропным фоновым решением.

Глава 2 посвящена построению сценария степенного генезиса в рамках векторного аналога обобщенных галилеонов, который был построен в главе 1. В параграфе 2.1 исследуется вопрос сильной связи в рассматриваемой модели. Параграф 2.2 посвящен построению и анализу начальной стадии космологического генезиса в рамках векторного аналога обобщенных галилеонов. Также показывается устойчивость найденного фонового решения и отсутствие сверхсветовых возмущений над этим решением. В параграфе 2.3 содержатся основные результаты, которые были получены в главе 2.

Далее, **глава 3** содержит исследование потенциальной проблемы сильной связи на ранних временах и во всех порядках по теории возмущений. Это исследование проводится для модели генезиса в теории Хорндески с сильной гравитацией в прошлом. В параграфе 3.1 описывается модель и выводятся общие формулы, которые будут применяться в дальнейшем. В параграфе 3.2 проводится предварительный анализ вопроса сильной связи в рассматриваемой модели генезиса. Параграф 3.3 посвящен полному анализу вопроса о потенциальном наличии сильной связи в асимптотическом прошлом для данного сценария. Наконец, в параграфе 3.4 содержатся основные результаты главы 3.

Наконец, в **главе 4** строится сценарий Вселенной с отскоком в рамках теории Хорндески, с сильной гравитацией в прошлом, который приводит к спектру возмущений, согласующемуся с экспериментальными данными. В параграфе 4.1 рассматриваются степенные решения в моделях, построенных на основе теорий Хорндески. Эти степенные решения соответствуют начальной стадии сжатия в сценарии Вселенной с отскоком. Параграф 4.2 посвящен вопросу генерации космологических возмущений на ранней стадии сжатия. В параграфе 4.3 рассмат-

ривается возможность получения плоского спектра в данной модели и связь этого вопроса с масштабной инвариантностью. Иными словами, показывается, что возможно получить плоский спектр для возмущений, при наличии масштабной инвариантности в теории. Параграф 4.4 посвящен анализу противоречий, возникающих при попытке построить сценарий Вселенной с отскоком, который одновременно бы приводил к малому значению r - отношения и при этом позволял произвести генерацию возмущений в режиме слабой связи. Параграф 4.5 посвящен выводу унитарных ограничений из оптической теоремы. Затем рассматривается вопрос о том, к какому масштабу сильной связи приводят эти унитарные ограничения. Показано, что анализ вопроса о сильной связи на основе унитарных ограничений позволяет получить гораздо более точный результат (с учетом всех численных коэффициентов), чем анализ вопроса сильной связи на основе размерных соображений. В параграфе 4.6 строятся два примера сценариев Вселенной с отскоком, которые приводят к красному и плоскому спектру для возмущений, соответственно. В параграфе 4.7 приводятся основные результаты, полученные в главе 4.

Заключение содержит краткую формулировку результатов исследований, представленных в диссертации.

Приложение А содержит анализ возможных структур лагранжианов для векторных галилеонных полей. Приложение В посвящено разложению по теории возмущений лагранжиана для теории Хорндески. В приложение С решаются уравнения связи для нединамических переменных. В приложении D решаются уравнения связи, полученные в приложении В. В приложении Е приводятся общие формулы для модели Хорндески. Приложение F посвящено получению спектра для возмущений. В приложение G ищутся самые значимые (в смысле ограничения на отсутствие сильной связи) слагаемые в кубическом лагранжиане. В приложение H по лагранжиану, заданному в ADM формализме, строится ковариантный лагранжиан. Приложение I посвящено получению масштабного фактора и параметра Хаббла в системе Эйнштейна. В приложении J в рамках

теории Хорндески строится численный пример стабильного космологического сценария Вселенной с отскоком, который приводит к спектру возмущений, совпадающему с экспериментальным.

1 Векторные галилеонные поля

Скалярные теории с лагранжианами, включающими вторые производные, которые, тем не менее, приводят к уравнениям поля второго порядка, привлекают значительный интерес. Это теории обобщенных Галилеонов [38–41], обобщением, которых на случай динамической гравитацией являются теории Хордески [31, 42]. С космологической точки зрения эти теории особенно интересны, поскольку они способны нарушать нулевое условие энергодоминантности (NEC) (см. обзор [29]). Естественно попытаться обобщить эти теории на поля, отличные от скалярных, например векторные поля. Однако, для случая калибровочно инвариантных полей такое обобщение невозможно в четырех измерениях [43], в то время как в более высоких размерностях пространства-времени мы приходим к теории галилеонов p -формы [44], [45]. Отказ от калибровочной инвариантности опасен, но не фатален. Действительно, существуют векторные теории (с лагранжианами, включающими только первые производные), которые не являются калибровочно-инвариантными, но, тем не менее, они не обладают явными патологиями. Одним из классов таких теорий являются обобщенные теории Прока [46, 47]. Теории другого класса [48] устойчивы на нетривиальных фоновых решениях. Интересным свойством последних является то, что они также могут нарушать условие NEC непатологичным образом [49].

В данной главе мы рассматриваем векторное поле и отказываемся от калибровочной инвариантности. Наша цель - построить простейшие лагранжианы для векторного поля, включающие вторые производные и все же приводящие к уравнениям поля второго порядка. Сначала мы делаем это в пространстве Минковского и обнаруживаем, что существует по крайней мере три довольно больших класса теорий, которые обладают желаемым свойством. Затем мы включаем динамическую гравитацию и наблюдаем, что все уравнения поля остаются второго порядка для теорий, принадлежащих двум из этих классов. Далее мы рассмотрим один из этих классов и приведем пример фонового реше-

ния в пространстве Минковского, который нарушает условие NEC. Затем мы выводим условия устойчивости (отсутствие духовых и градиентных неустойчивостей) для этого фонового решения в пространстве Минковского и находим область параметров, при которых данное решение устойчиво. Таким образом, рассматриваемые нами теории можно рассматривать как векторные аналоги обобщенных Галилеонов.

1.1 Лагранжианы со вторыми производными в пространстве Минковского.

Построим некалибровочно-инвариантную теорию для векторного поля в пространстве Минковского, лагранжиан которой удовлетворяет следующим требованиям:

1. Лагранжиан L содержит вторые производные, а также первые производные и само поле.
2. Уравнения поля, полученные из этого лагранжиана, имеют производные не выше второго порядка.
3. Лагранжиан нельзя свести интегрированием по частям к лагранжиану, включающему только первые производные.

Мы собираемся построить простейшие теории, для которых:

4. Лагранжиан линеен по вторым производным:

$$L = S^{\mu\nu\rho}(A_\lambda; A_{\tau;\xi})A_{\rho;\mu\nu} + L(A_\tau, A_{\lambda;\xi}) \quad (3)$$

Удобно думать о $S^{\mu\nu\rho}$ как о сумме

$$S^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}(K^{\mu\nu\rho} + K^{\nu\mu\rho}), \quad (4)$$

где $K^{\mu\nu\rho}$ несимметрична по индексам μ, ν .

Наше последнее предположение:

5. Функция $K^{\mu\nu\rho}$ in (4) моном в переменных $A_\mu, A_{\nu;\tau}$, которая не содержит абсолютно антисимметричного тензора:

$$K^{\mu_\alpha\mu_\beta\mu_\gamma} = \text{const} \cdot \eta^{\mu_{\sigma(1)}\mu_{\sigma(2)}} \dots \eta^{\mu_{\sigma(n+2m+2)}\mu_{\sigma(n+2m+3)}} A_{\mu_1} \dots A_{\mu_n} A_{\mu_{n+1};\mu_{n+2}} \dots A_{\mu_{n+2m-1};\mu_{n+2m}}, \quad (5)$$

где n is odd, σ обозначает перестановки среди $(n + 2m + 3)$ индексов и $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$ несвернутые индексы, $(\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma) = (\mu_{\sigma^{-1}(n+2m+1)}, \mu_{\sigma^{-1}(n+2m+2)}, \mu_{\sigma^{-1}(n+2m+3)})$.

Уравнения Эйлера-Лагранжа для теории с этим лагранжианом имеют следующий вид:

$$\frac{\partial L}{\partial A_\rho} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial A_{\rho;\mu}} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial A_{\rho;\mu\nu}} = 0, \quad (6)$$

где $A_{\rho;\mu} = \partial_\mu A_\rho$, $A_{\rho;\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu A_\rho$. Члены третьего порядка в уравнение (6) для лагранжиана (33) имеют вид:

$$\left(\frac{\partial S^{\mu\nu\rho}}{\partial A_{\tau;\lambda}} - \frac{\partial S^{\mu\nu\tau}}{\partial A_{\rho;\lambda}} \right) A_{\tau;\lambda\mu\nu}$$

Таким образом, чтобы уравнения поля были второго порядка, мы требуем, чтобы

$$\frac{\partial S^{\mu\nu\rho}}{\partial A_{\tau;\lambda}} - \frac{\partial S^{\mu\nu\tau}}{\partial A_{\rho;\lambda}} = 0. \quad (7)$$

Согласно (5), индексы μ, ν, ρ у функции $K^{\mu\nu\rho}$ являются индексами метрики, или векторного поля, или производной от векторного поля. Последний индекс в $K^{\mu\nu\rho}$ играет другую роль в уравнение (7) по сравнению с остальными индексами, и поэтому удобно классифицировать функции $K^{\mu\nu\rho}$ в соответствии с "происхождением" индекса ρ . Таким образом, мы приходим к четырем возможностям (другие варианты дают то же самое $S^{\mu\nu\rho}$ в (4)):

1. $K^{\mu\nu\rho} = L^{\mu\nu}{}_{\chi}(A_\sigma, A_{\tau;\lambda}) A^{\chi;\rho}$

$$2. K^{\mu\nu\rho} = f^\mu(A_\sigma, A_{\tau;\lambda})\eta^{\nu\rho}$$

$$3. K^{\mu\nu\rho} = B^{\mu\nu}(A_\sigma, A_{\tau;\lambda})A^\rho$$

$$4. K^{\mu\nu\rho} = \tilde{L}^{\mu\nu}{}_{\varkappa}(A_\sigma, A_{\tau;\lambda})A^{\rho;\varkappa},$$

где функции $L^{\mu\nu}{}_\alpha$, $\tilde{L}^{\mu\nu}{}_{\varkappa}$, $B^{\mu\nu}$ и f^μ снова являются одночленами по двум переменным A_σ , $A_{\tau;\lambda}$ которые не включают полностью антисимметричный тензор. Кроме того, удобно классифицировать функции $\tilde{L}^{\mu\nu}{}_{\varkappa}$ в соответствии с "происхождением" индекса \varkappa :

$$4.1. \tilde{L}^{\mu\nu}{}_{\varkappa} = T^\mu(A_\sigma, A_{\tau;\lambda})\delta_{\varkappa}^\nu; \quad K^{\mu\nu\rho} = T^\mu(A_\sigma, A_{\tau;\lambda})A^{\rho;\nu}$$

$$4.2. \tilde{L}^{\mu\nu}{}_{\varkappa} = X^{\mu\nu}{}_\alpha(A_\sigma, A_{\tau;\lambda})A^{\alpha;\varkappa}; \quad K^{\mu\nu\rho} = X^{\mu\nu}{}_\alpha(A_\sigma, A_{\tau;\lambda})A^{\alpha;\varkappa}A^{\rho;\varkappa}$$

$$4.3. \tilde{L}^{\mu\nu}{}_{\varkappa} = Z^{\mu\nu}{}_\alpha(A_\sigma, A_{\tau;\lambda})A_{\varkappa;\alpha}; \quad K^{\mu\nu\rho} = Z^{\mu\nu}{}_\alpha(A_\sigma, A_{\tau;\lambda})A_{\varkappa;\alpha}A^{\rho;\varkappa}$$

$$4.4. \tilde{L}^{\mu\nu}{}_{\varkappa} = V^{\mu\nu}(A_\sigma, A_{\tau;\lambda})A_{\varkappa}; \quad K^{\mu\nu\rho} = V^{\mu\nu}(A_\sigma, A_{\tau;\lambda})A_{\varkappa}A^{\rho;\varkappa}.$$

Используя эту классификацию, мы анализируем уравнение (7) в приложении А. Мы находим, что существуют три независимых лагранжиана, которые удовлетворяют вышеуказанным требованиям 1 — 5, а именно

$$L_1 = (F)^{l_1}(D)^{n_1}(B)^{k_1}\eta^{\mu\nu}A^\rho A_{\rho;\mu\nu}, \quad (8)$$

$$L_2 = (F)^{l_2}(D)^{n_2}(B)^{k_2}A_\sigma A_\tau A^{\sigma;\mu}A^{\tau;\nu}A^\rho A_{\rho;\mu\nu}, \quad (9)$$

$$L_3 = (F)^{l_3}(C)^{n_3}\eta^{\mu\nu}A^{\rho;\sigma}A_\sigma A_{\rho;\mu\nu}, \quad (10)$$

где k_i , l_i , n_i являются неотрицательными целыми числами, и

$$F = A_\mu A^\mu, \quad (11)$$

$$D = A^\nu A^\lambda A_{\nu;\lambda}, \quad (12)$$

$$B = A_\mu A^\nu A^{\mu;\lambda} A_{\nu;\lambda}, \quad (13)$$

$$C = A^{\mu;\tau} A_\tau A^\rho A_{\mu;\rho}. \quad (14)$$

Лагранжианы (8) and (9) имеют структуру, соответствующую случаю 3 для функции $K^{\mu\nu\rho}$, в то время как лагранжиан (10) соответствует случаю 4.4.

Лагранжианы (8) – (10) содержат вторые производные, когда

$$k_1 \neq 0 \text{ and/or } n_1 > 1, \quad (15)$$

$$k_2 \neq 0 \text{ and/or } n_2 \neq 0, \quad (16)$$

$$n_3 \neq 0. \quad (17)$$

Лагранжианы (8) и (9) независимы, когда

$$n_1 > 1. \quad (18)$$

Очевидное обобщения (8) – (10) это

$$L_1 = f^{(1)}(B, D, F)\eta^{\mu\nu} A^\rho A_{\rho;\mu\nu}, \quad f_B^{(1)} \neq 0 \text{ and/or } f_{DD}^{(1)} \neq 0, \quad (19)$$

$$L_2 = f^{(2)}(B, D, F)A_{\alpha}A_{\tau}A^{\alpha;\mu}A^{\tau;\nu}A^\rho A_{\rho;\mu\nu}, \quad f_B^{(2)} \neq 0 \text{ and/or } f_D^{(2)} \neq 0, \quad (20)$$

$$L_3 = f^{(3)}(C, F)\eta^{\mu\nu} A^{\rho;\lambda} A_{\lambda}A_{\rho;\mu\nu}, \quad f_C^{(3)} \neq 0, \quad (21)$$

где $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ и $f^{(3)}$ являются произвольными функциями их аргументов, и $f_B = \frac{\partial f}{\partial B}$, $f_{DD} = \frac{\partial^2 f}{\partial D^2}$, etc.

Стоит отметить, что могут существовать линейные комбинации лагранжианов, структура которых отличается от (19) – (21), но которые, тем не менее, приводят к уравнениям поля второго порядка из-за отмены между различными членами. Одним из примеров является

$$L = \left(\frac{1}{2} A^\rho A^{\mu;\nu} A_\nu A_{\mu;\lambda} A^\lambda + A^{\rho;\tau} A_\tau A_{\mu;\nu} A^\mu A^\nu \right) \square A_\rho.$$

В данной работе мы не рассматриваем этот случай.

1.2 Включая динамическую гравитацию.

В предыдущем разделе мы построили три калибровочно-инвариантных лагранжиана векторного поля, включающих вторые производные и все же приводящих к уравнениям поля второго порядка и / или низшего порядка в пространстве Минковского, уравнения (19) – (21). Наша цель здесь - выяснить, какие из этих лагранжианов приводят к уравнениям движения второго порядка и к тензору энергии-импульса, который не содержит старших производных от полей и от метрики.

Давайте рассмотрим лагранжиан (19). Предполагается минимальная связь с гравитацией, тогда $-\sqrt{-g}T^{\rho\sigma}\delta g_{\rho\sigma}$ в этом случае теория имеет вид

$$\begin{aligned} -\sqrt{-g}T^{\rho\sigma}\delta g_{\rho\sigma} &= 2\delta(\sqrt{-g}L_{(1)}) = \delta(\sqrt{-g}f^{(1)}(B, D, F)\square F) + \dots \\ \Rightarrow \sqrt{-g}f_B^{(1)}g^{\mu\nu}((\partial_\mu\partial_\nu F)\delta B + (\partial_\mu\partial_\nu B)\delta F) & \quad (22) \\ + \sqrt{-g}f_D^{(1)}g^{\mu\nu}((\partial_\mu\partial_\nu F)\delta D + (\partial_\mu\partial_\nu D)\delta F) + \dots, \end{aligned}$$

где пропущенные члены не содержат третьих производных, а стрелка обозначает интегрирование по частям и $\delta B = \frac{\delta B}{\delta g_{\rho\sigma}}\delta g_{\rho\sigma}$, etc. Удобно представить уравнение (22) в следующем виде:

$$-\sqrt{-g}T^{\rho\sigma}\delta g_{\rho\sigma} \Rightarrow I_1 + I_2 + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \sqrt{-g}f_B^{(1)}g^{\mu\nu}((\partial_\mu\partial_\nu F)\delta B + (\partial_\mu\partial_\nu B)\delta F), \\ I_2 &= \sqrt{-g}f_D^{(1)}g^{\mu\nu}((\partial_\mu\partial_\nu F)\delta D + (\partial_\mu\partial_\nu D)\delta F). \end{aligned}$$

Мы видим, что $T^{\mu\nu}$ не содержит производных третьего порядка от векторного поля и/или метрики. Действительно, используя тот факт, что $B = \frac{F_{;\mu}F^{;\mu}}{4}$, мы получаем, что I_1 не содержит старшие производные

$$I_1 \Rightarrow \frac{\sqrt{-g}}{2}f_B^{(1)}(-(\partial^\tau F)(\partial_\tau\partial_\mu\partial_\nu F)\delta F + (\partial^\tau F)(\partial_\mu\partial_\nu\partial_\tau F)\delta F) + \dots = 0 + \dots$$

I_2 также не содержит производных третьего порядка:

$$\begin{aligned}
I_2 &= f_D^{(1)} \sqrt{-g} A^\lambda A_{\varkappa} A^\nu A^\rho A^\mu g^{\sigma\alpha} ((\partial_\sigma \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\rho\lambda}^\varkappa + (\partial_\sigma \partial_\alpha \Gamma_{\rho\lambda}^\varkappa) \delta g_{\mu\nu}) \\
&\quad - f_D^{(1)} \sqrt{-g} A^\lambda A^\rho g^{\sigma\alpha} (2A^\mu (\partial_\sigma \partial_\alpha A_\mu) A_{\varkappa} \delta \Gamma_{\rho\lambda}^\varkappa + (\partial_\sigma \partial_\alpha \partial_\lambda A_\rho) A^\mu A^\nu \delta g_{\mu\nu}) \\
&\quad + \dots \\
&\Rightarrow \frac{1}{2} f_D^{(1)} \sqrt{-g} A^\lambda A^\varkappa A^\nu A^\rho A^\mu g^{\sigma\alpha} ((\partial_\sigma \partial_\alpha \partial_\varkappa g_{\mu\nu}) \delta g_{\rho\lambda} - (\partial_\sigma \partial_\alpha \partial_\rho g_{\mu\nu}) \delta g_{\lambda\varkappa}) \\
&\quad - f_D^{(1)} \sqrt{-g} A^\lambda A^\rho A^\mu A^\nu g^{\sigma\alpha} ((\partial_\sigma \partial_\alpha \partial_\lambda A_\mu) \delta g_{\rho\nu} - (\partial_\sigma \partial_\alpha \partial_\lambda A_\rho) \delta g_{\mu\nu}) + \dots = \\
&= 0 + \dots
\end{aligned}$$

Теперь, $\frac{\delta(\sqrt{-g}L_{(1)})}{\sqrt{-g}\delta A_\sigma}$ также не содержит производных третьего порядка. Действительно,

$$\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}L_1) &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} \left[f_B \left(\frac{\delta(F_{;\tau} F^{;\tau})}{4} \square F + \frac{\square(F_{;\tau} F^{;\tau})}{4} \delta F \right) \right. \\
&\quad \left. + f_D ((\square F) \delta D + (\square D) \delta F) \right] + \dots \\
&\Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{-g} \left[0.5 f_B ((F_{;\tau} - F_{;\tau}) \square F^{;\tau}) \delta F + \right. \\
&\quad \left. + f_D (A^\lambda A_\rho A^\mu A_\nu \partial_\tau \partial_\mu \partial^\tau g^{\rho\nu} - A^\lambda A^\rho A_\mu A_\nu \partial_\tau \partial_\rho \partial^\tau g^{\mu\nu}) \delta A_\lambda \right] \\
&\quad + \dots = 0 + \dots
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение движения имеет производные второго порядка и/или ниже. Подводя итог, мы видим, что лагранжиан (19) приводит к уравнению поля второго порядка и/или ниже и тензору энергии-импульса не содержащего третьи производные.

Теперь мы обратимся к лагранжиану (20). Используя тот факт, что $B =$

$\frac{F_{;\mu}F^{;\mu}}{4}$ и $D = \frac{F^{;\mu}A_{\mu}}{2}$, мы находим, что

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}L_2) &= \frac{\sqrt{-g}}{4}\delta\left(f^{(2)}(B, D, F)F^{;\nu}B_{;\nu}\right) + \dots \Rightarrow -\frac{\sqrt{-g}}{4}\delta\left(f^{(2)}(\square F)B\right) \\ &- \frac{\sqrt{-g}}{4}\delta\left(f^{(2)}_{;\nu}F^{;\nu}B\right) + \dots = -\frac{\sqrt{-g}}{4}\delta\left(f^{(2)}_{;\nu}F^{;\nu}B\right) + \dots \Rightarrow -\frac{\sqrt{-g}f_B^{(2)}}{4}\left(- (BF^{;\nu})_{;\nu}\delta B \right. \\ &- (\square B)B\delta F + B_{;\nu}F^{;\nu}\delta B) - \frac{\sqrt{-g}f_D^{(2)}}{4}\left(- (F^{;\nu}B)_{;\nu}\delta D - B(\square D)\delta F + D_{;\nu}F^{;\nu}\delta B\right) + \dots \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{-g}f_B^{(2)}B}{8}\left(- F^{;\tau}\square(F_{;\tau}) + (\square F)_{;\tau}F^{;\tau}\right)\delta F \\ &- \frac{\sqrt{-g}f_D^{(2)}A^{\lambda}F^{;\nu}}{16}\left(F^{;\tau}F_{;\tau\nu\lambda} - F^{;\tau}F_{;\lambda\nu\tau}\right)\delta F = 0 + \dots, \end{aligned}$$

где пропущенные члены не содержат третьих производных и $F_{;\nu} = \nabla_{\nu}F$, $F_{;\nu\mu} = \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}F$, etc., $\delta B = \frac{\delta B}{\delta g_{\rho\sigma}}\delta g_{\rho\sigma} + \frac{\delta B}{\delta A_{\mu}}\delta A_{\mu}$, и т.д. Таким образом, все уравнения поля имеют производные второго порядка и/или ниже.

Минимальное обобщение лагранжиана (21) приводит к уравнениям поля третьего порядка. Нам не удалось найти дополнительные члены, включающие тензор Римана, которые привели бы к сокращению третьих производных в уравнениях поля. Таким образом, мы предполагаем, что лагранжианы (21) не могут быть обобщены на теорию с динамической гравитацией таким образом, чтобы уравнения движения оставались второго порядка. В дальнейшем мы не рассматриваем лагранжиан (21).

Подводя итог, можно сказать, что в случае, когда мы включаем динамическую гравитацию, все уравнения поля остаются второго порядка для двух лагранжианов (19), (20).

1.3 Стабильное решение, нарушающее условие энергодоминантности, в пространстве Минковского.

1.3.1 Решение.

Наша цель здесь - выяснить, есть ли лагранжианы в наборе (19), (20), которые приводят к стабильным решениям с нарушением условия энергодоминантности.

В этом разделе мы приводим такой пример на фоне метрики Минковского. Давайте рассмотрим лагранжиан (19) с дополнительными членами первого порядка

$$L_1 = qD^2 A^\rho \square A_\rho + kB^2 + lC^2 + vF^6, \quad (23)$$

где q, k, l и v свободные параметры и B, C, D, F определяются уравнениями (11) – (14), соответственно. Конкретный выбор функций здесь таков, что все члены обладают одинаково преобразуются при масштабных преобразованиях $x^\mu \Rightarrow \lambda x^\mu, A_\mu \Rightarrow \lambda^{-1} A_\mu$, namely, $L_1 \Rightarrow \lambda^{-12} L_1$. Тогда существует нетривиальное однородное решение уравнения поля

$$A_\mu^{bg} = (\beta t^{-1}, 0, 0, 0), \quad t > 0. \quad (24)$$

Для этого решения уравнение поля дает

$$\beta = \left(\frac{3k + 3l - 5q}{v} \right)^{1/4}. \quad (25)$$

Это решение существует, когда

$$\begin{aligned} 3k + 3l - 5q > 0 \quad \text{and} \quad v > 0 \quad \text{or} \\ 3k + 3l - 5q < 0 \quad \text{and} \quad v < 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Для этого решения нам понадобится выражение для тензора энергии-импульса:

$$T_{\mu\nu} \Big|_{g_{\rho\sigma}=\eta_{\rho\sigma}; A_\tau=A_\tau^{bg}} = \frac{2\delta(\sqrt{-g}L)}{\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}} \Big|_{g_{\rho\sigma}=\eta_{\rho\sigma}; A_\tau=A_\tau^{bg}}.$$

С этой целью мы снова рассмотрим минимальную связь с метрикой, т.е. $\square A_\rho = \nabla^\mu \nabla_\mu A_\rho$ и $D = A_{\mu;\nu} A_\tau A_\lambda g^{\mu\tau} g^{\nu\lambda}$, и т.д., в искривленном пространстве-времени.

Лагранжиан (42) может быть записано в следующей форме:

$$L_1 = \frac{1}{2} f^{(1)}(D) \square F - f^{(1)}(D) A_{\tau;\sigma} A^{\tau;\sigma} + L(B, C, D, F)$$

где

$$f^{(1)}(D) = qD^2,$$

$$L(B, C, D, F) = kB^2 + lC^2 + vF^6.$$

Используя тот факт, что $\partial_0 T^{0\rho}|_{A_\mu=A_\mu^{bg}} = 0$ мы находим $T_{00} = 0$ и

$$T_{ij} = p\delta_{ij},$$

$$p = \left(-\frac{1}{2}\partial_\tau f \partial^\tau F + L - f A_{\tau;\sigma} A^{\tau;\sigma} \right) \Big|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}; A_\mu=A_\mu^{bg}},$$

где $i, j = 1, 2, 3$. Это приводит к

$$p = \beta^8 t^{-12} (v\beta^4 + k + l - 9q) = \beta^8 t^{-12} (4(k + l) - 14q).$$

Таким образом, фоновое решение (24) нарушает условие энергодоминатности при условии, что

$$l + k < \frac{7q}{2}. \quad (27)$$

Это возможно в обоих случаях, перечисленных в (26).

1.3.2 Условия устойчивости в пространстве Минковского.

Давайте рассмотрим устойчивость решения (24). Также согласно работам [50, 51], мы требуем отсутствия сверхсветовых возмущений. С этой целью мы изучаем несколько более общих лагранжиан

$$L_1 = f^{(1)}(B, D, F) A^\rho \square A_\rho + L(B, D, F, C), \quad (28)$$

где $L(B, D, F)$ и $f^{(1)}(B, D, F, C)$ являются произвольными функциями их аргументов. Мы рассматриваем однородное фоновое решение $A_\mu^{bg} = (A_0^{bg}(t), 0, 0, 0)$ и разложим лагранжиан (38) до второго порядка. В разложении нас интересуют только коэффициенты $(\delta A^{0,i} \delta A_0^{,i})$, $(\delta A^{0,0} \delta A_{0,0})$ and $(\delta A^{i,0} \delta A^i_{,0})$, $(\delta A^{i,j} \delta A^{i,j})$, потому что здесь мы рассматриваем случай больших импульсов, значит изменение δA_μ в пространстве и времени происходит в масштабах, намного меньших, чем временные характеристики фона $A_\mu^{bg}(t)$. Мы находим

$$\begin{aligned} \delta L_1 &= L_1(A_\mu^{bg} + \delta A_\mu) - L_1(A_\mu^{bg}) = K_{01}(\delta A^{0,i} \delta A_0^{,i}) + K_{00}(\delta A^{0,0} \delta A_{0,0}) \\ &+ K_{10}(\delta A^{i,0} \delta A^i_{,0}) + K_{11}(\delta A^{i,j} \delta A^{i,j}) + (\dots)(\delta A^0 \delta A_0) + (\dots)(\delta A^i \delta A^i) \\ &+ \dots, \end{aligned}$$

где точки обозначают члены, имеющие менее двух производных, и $A \equiv A_0^{bg}$.

Здесь

$$\begin{aligned}
K_{00} = & 2\dot{A}^2 A(L_{BB} + L_{CC}) + 4L_{BC}A^4\dot{A} + \frac{1}{2}A^4L_{DD} \\
& + 2A^4\dot{A}(L_{BD} + L_{CD}) + 2A^5\dot{A}^2\ddot{A}(f_{BB}^{(1)}) + \frac{1}{2}A^5\ddot{A}f_{DD}^{(1)} \\
& + 2A^5\dot{A}\ddot{A}(f_{BD}^{(1)}) + A^3\ddot{A}(f_B^{(1)}) \\
& - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(2A^3\dot{A}(f_B^{(1)}) + A^3f_D^{(1)}) - f^{(1)} - 2A^2\dot{A}^2(f_B^{(1)}) - 2A^2\dot{A}f_D^{(1)} \\
& - 2A^2f_F^{(1)} + A^2(L_C + L_B),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{01} = & -L_BA^2 - A^3\ddot{A}f_B^{(1)} + f^{(1)} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(2A^3\dot{A}(f_B^{(1)}) + A^3f_D^{(1)}) \\
& + 2A^2\dot{A}^2(f_B^{(1)}) + 2A^2\dot{A}f_D^{(1)} + 2A^2f_F^{(1)},
\end{aligned}$$

$$K_{10} = f^{(1)} - L_CA^2,$$

$$K_{11} = -f^{(1)}.$$

Итак, условиями устойчивости имеют вид

$$K_{00} > 0, \quad K_{01} < 0, \quad K_{10} > 0, \quad K_{11} < 0 \quad (29)$$

а условие отсутствия сверхсветовых возмущений имеет вид

$$|K_{00}| > |K_{01}|, \quad |K_{10}| > |K_{11}|. \quad (30)$$

Условия (29) и (30) для лагранжиана (24) приводят к

$$\begin{aligned}
l & > 3q - k, \\
l & < 0, \\
l & > \frac{36q - 12k}{13}, \\
v & > 0.
\end{aligned} \quad (31)$$

Мы видим, что лагранжиан (24) приводит к устойчивому однородному решению, нарушающему требования (25), когда параметры удовлетворяют соотношениям (31), (27) и (26). Фактически, все эти условия выполняются при условии, что

$$v > 0, \quad q > 0, \quad l < 0, \quad 3q < k < \frac{19q}{2}, \quad \frac{36q}{13} - \frac{12k}{13} < l < \frac{7q}{2} - k.$$

Таким образом, наш пример показывает, что в векторных галилеонных теориях существуют устойчивые однородные решения, которые нарушают нулевое условие энергодоминантности.

2 Степенной генезис в случае векторных галилеонных полей

В данной главе, мы рассматриваем лагранжиан, для векторных галилеонных полей, который был построен в предыдущим разделе. На основе этих лагранжианов мы строим начальную стадию космологического генезиса. Генезис [52–57] - это космологический сценарий без начальной сингулярности. В этом сценарии Вселенная начинает свое расширение с плоского пространства-времени и нулевой плотности энергии при больших отрицательных временах. По мере расширения Вселенной плотность энергии и параметр Хаббла растут. Затем при стремлении $t \rightarrow 0$ происходит переход к инфляционной стадии или же разогрев и переход на горячую стадию. Если гравитация описывается общей теорией относительности, то этот режим требует доминирования экзотической материи, который нарушает нулевое условие энергодоминантности - NEC (см. [29]). Позже плотность энергии экзотической материи преобразуется в плотность энергии обычного вещества, и начинается стандартная космологическая эволюция. Как показано в [58], непатологическое нарушение NEC возможно в контексте скалярных галилеонных теорий [40]. К настоящему времени были предложены многочисленные варианты реализации Генезиса, в основном, в контексте тео-

рий с участием скаляров (см. работы [52], [54–56, 59–63] и обзор [64]), а также и в моделях с векторными полями [65].

Простой способ построить модель ранней эпохи Генезиса - это использовать Лагранжиан, который в отсутствие гравитации трансформируется однородно под действием масштабных преобразований:

$$L \Rightarrow \lambda^N L,$$

при

$$\pi_\alpha(x^\nu) \Rightarrow \lambda^s \pi_\alpha(\lambda x^{nu}),$$

где π_α обозначает негравитационные поля в модели, а N и s - постоянные параметры. Тогда, как правило, при отсутствии динамической гравитации существует пространственно-однородное решение уравнений движения $\pi \propto |t|^{-s}$, $t \rightarrow -\infty$, для которого плотность энергии равна нулю, а давление отрицательно. Это означает нарушение NEC при условии того, что гравитация описывается в рамках общей теории относительности. В том случае, когда мы учитываем влияние динамической гравитации на эволюцию системы, плотность энергии перестаёт быть нулевой, вместо этого она возрастает, что находится в согласии с моделью Генезиса. Этот механизм был впервые предложен в работе [52] (со следующими параметрами масштабных преобразований $N = 4$ и $s = 1$), а затем был использован в контекстах других моделей (см. обзор [29]), включая модели с векторными полями [65].

Однако в моделях такого класса коэффициенты в квадратичном Лагранжиане для возмущений над классическим решением уравнений движения часто стремятся к нулю, при: $t \rightarrow -\infty$. Этот факт, в свою очередь, может означать, что энергетический масштаб сильной связи также стремится к нулю. В такой ситуации классическое описание системы может стать неприменимым, работа [52, 66].

Чтобы выяснить, так ли это, нужно изучить как квадратичные, так и старшие члены в Лагранжиане для возмущений и найти поведение масштаба силь-

ной связи Λ , при $t \rightarrow -\infty$:

$$\Lambda(t) \propto |t|^{-\sigma} ,$$

Этот масштаб следует сравнить с классическим энергетическим масштабом E_{cl} , который является скоростью эволюции системы, и в случае степенного Генезиса имеет вид:

$$E_{cl}(t) \propto |t|^{-1} ,$$

Классическое описание системы является законным при условии, что $E_{cl} \ll \Lambda$, что, в свою очередь, означает:

$$\sigma \leq 1 \tag{32}$$

(случай $\sigma = 1$ требует условий на свободные параметры в Лагранжиане: соотношение $E_{cl} \ll \Lambda$ может быть верным лишь в ограниченной области пространства параметров, поэтому этот случай требует дополнительного анализа).

В данной главе мы рассматриваем проблему сильной связи в контексте степенных моделей, описанных выше. Этому посвящён раздел 2.1, где мы показываем, что требование (32) эквивалентно:

$$N \leq 4 ,$$

Заметим, что это условие не выполняется для Генезиса с векторными полями, предлагаемого в работе [65]. Поэтому в разделе 2.2 мы строим другую модель с векторным полем и степенным фоновым решением. Эта модель удовлетворяет условию (32). Далее мы определяем диапазон параметров, при котором возмущения над фоновым решением имеют скорость, не превышающую скорость света, а фоновое решение устойчиво в пространстве Минковского и нарушает НЕС. Для полноты описания мы также включаем гравитацию (в виде GR) и описываем эволюцию масштабного фактора в течение начальной стадии Генезиса.

2.1 Масштаб сильной связи

Как было изложено выше, мы будем рассматривать Лагранжиан для M бозонных полей π_α , $\alpha = 1, 2, \dots, M$, в 4-ном пространстве Минковского. Индекс α может нумеровать поля (в том случае, если π_α являются скалярами) или нумеровать Лоренцевы индексы, или оба типа индексов. Предполагается, что Лагранжиан ковариантен относительно однородных масштабных преобразований

$$x^\nu \Rightarrow \lambda x^\nu, \quad \pi_\alpha(x^\nu) \Rightarrow \lambda^s \pi_\alpha(\lambda x^\nu), \quad s \neq 0.$$

А именно:

$$L \Rightarrow \lambda^N L. \quad (33)$$

Важно отметить, что мы предполагаем, что уравнения движения являются уравнениями второго порядка по производным, хотя Лагранжианы могут включать вторые производные полей. Этот факт относится как к обобщенным галилеонным теориям [29, 38, 40, 67, 68], так и к случаю с теорией галилеонных векторных полей [65].

Для определенности рассмотрим Лагранжианы, которые являются линейными комбинациями мономов, состоящих из n полей π_α без производных, m первых производных $\pi_{\alpha,\nu}$ от полей и l вторых производных от полей (рассуждения, приведённые ниже, также будут верны и для случая, когда рассматриваемые мономы содержат отрицательные степени полей π_α):

$$(\pi_{\alpha_1} \dots \pi_{\alpha_n}) \cdot (\partial \pi_{\gamma_1} \dots \partial \pi_{\gamma_m}) \cdot (\partial^2 \pi_{\omega_1} \dots \partial^2 \pi_{\omega_l}) \sim [\pi]^n \cdot [\partial \pi]^m \cdot [\partial^2 \pi]^l. \quad (34)$$

Здесь

$$ns + m(s + 1) + l(s + 2) = N,$$

таким образом, закон преобразования (33) выполняется. Для диапазона параметров, входящих в Лагранжиан, существует однородное степенное решение вида:

$$\pi_\alpha^{(0)} = \beta_\alpha |t|^{-s}, \quad (35)$$

с постоянным β_α . Действительно, соотношение (34) дает вклад в уравнение движения с общим числом полей, равным $(n + m + l - 1)$, и общим количеством производных, равным $(m + 2l)$. Поэтому, используя (35), получаем, что каждое из M уравнений движения пропорционально $|t|^{-N+s}$ с коэффициентом пропорциональности, являющимся полиномом от переменных β_α . Другими словами, уравнения движения для полей $\pi_\alpha^{(0)}$ приводят к системе M алгебраических уравнений для M коэффициентов β_α , которая имеет решение для области свободных параметров, входящих в Лагранжиан.¹

Теперь мы перейдём к рассмотрению малых возмущений относительно фонового решения (35). Запишем поле π_α в виде $\pi_\alpha = \pi_\alpha^{(0)} + \delta\pi$. Наша следующая цель - определить зависимость от времени или вид степенного поведения для наименьшего из существующих масштабов сильной связи в пределе $t \rightarrow -\infty$. Начнем наше рассмотрение с квадратичного Лагранжиана для возмущений $\delta\pi$. Так как мы предполагаем, что третьи и высшие производные от $\delta\pi$ отсутствуют в уравнениях движения, то отсутствуют члены со вторыми и высшими производными и в квадратичном Лагранжиане для возмущений. Таким образом, после интегрирования по частям члены, входящие в квадратичный Лагранжиан, можно схематично представить в следующем виде:

$$(\partial \delta\pi)^2.$$

Моном (34) в изначальном Лагранжиане после соответствующего разложения по возмущениям поля и интегрирования по частям приводит к члену вида: $\#(\partial \delta\pi)^2$ в квадратичном Лагранжиане. Коэффициент перед этим членом пропорционален $(n + m + l - 2)$ фоновым полям $\pi^{(0)}$ с действующими на них $(m + 2l - 2)$ производными. Иными словами, этот коэффициент пропорционален

¹За исключением того случая, когда существует какая-либо симметрия, которая связывает коэффициенты разных мономов (34) таким образом, что эта алгебраическая система не имеет реального решения или является вырожденной.

следующему выражению:

$$[\partial]^{(m+2l-2)} ([\pi^0]^{n+m+l-2}).$$

Следовательно, структура квадратичного Лагранжиана имеет вид:

$$\mathcal{L}^{(2)} \supset |t|^{-N+2s+2} (\partial \delta \pi)^2 .$$

Это, в свою очередь, означает, что канонически нормированные поля ξ_α связаны с $\delta \pi_\alpha$ следующим образом:

$$\xi_\alpha \propto |t|^{-N/2+s+1} \delta \pi_\alpha . \quad (36)$$

Размерность канонически нормированных полей ξ_α в "массовой" системе единиц, по определению, равна 1.

Теперь перейдем к рассмотрению старших членов в Лагранжиане для возмущений или, иными словами, к членам, описывающим взаимодействие между возмущениями $\delta \pi$. Соотношение (34) приводит к члену следующей формы:

$$[\pi^{(0)}]^{n-a} \cdot [\partial \pi^{(0)}]^{m-b} \cdot [\partial^2 \pi^{(0)}]^{l-c} \times [\delta \pi]^a \cdot [\partial \delta \pi]^b \cdot [\partial^2 \delta \pi]^c ,$$

где

$$a + b + c \geq 3. \quad (37)$$

Используя уравнения (35) и (36), мы приходим к тому, что через канонически нормированные поля этот член в Лагранжиане пропорционален

$$|t|^{\frac{N}{2}(a+b+c-2)+c-a} \times [\xi]^a \cdot [\partial \xi]^b \cdot [\partial^2 \xi]^c .$$

Из анализа размерности члена $[\xi]^a \cdot [\partial \xi]^b \cdot [\partial^2 \xi]^c$ в Лагранжиане (размерность $[\xi]^a \cdot [\partial \xi]^b \cdot [\partial^2 \xi]^c$ равна $a + 2b + 3c$, размерность Лагранжиана 4, таким образом, размерность коэффициента перед рассматриваемым членом равна $-(a + 2b + 3c - 4)$) мы получаем, что коэффициент перед ним равен $E_s^{-(a+2b+3c-4)}$, где E_s - ("наивно") масштаб сильной связи (здесь мы рассматриваем случай $a +$

$2b + 3c - 4 > 0$, в противном случае аналогичные рассуждения не приводят к каким-либо ограничениям на параметры модели). Таким образом,

$$E_s \propto |t|^{-\frac{N(a+b+c-2)+c-a}{a+2b+3c-4}},$$

при условии того, что здесь мы не рассматриваем возможность сокращений между различными членами в Лагранжиане для возмущений. Такие сокращения могли бы приводить к более слабым ограничениям на параметры модели.

Мы требуем, чтобы масштаб сильной связи E_s был выше, чем классическая скорость эволюции системы t^{-1} , при $|t| \rightarrow \infty$ и получаем:

$$\frac{\frac{N}{2}(a+b+c-2)+c-a}{a+2b+3c-4} < 1,$$

или

$$(N-4)(a+b+c-2) < 0.$$

Возвращаясь к уравнению (37), мы приходим к условию на параметр масштабного преобразования N :

$$N \leq 4,$$

где мы также включаем случай $N = 4$, в котором как классические, так и квантовые энергетические масштабы ведут себя как $|t|^{-1}$. В этом случае квантовый энергетический масштаб может быть выше из-за определенных соотношений между параметрами в Лагранжиане, см., например [52].

2.2 Модель для векторного поля с устойчивым НЕС-нарушающим решением

2.2.1 Эволюция на ранних временах: в пространстве Минковского.

Теперь перейдём к построению простой модели для векторного поля A_μ , которая ковариантна относительно однородных масштабных преобразований вида:

$$A_\mu(x^\nu) \rightarrow \lambda^s A_\mu(\lambda x^\nu),$$

а Лагранжиан преобразовывается в согласии с (33), и, кроме того, $N \leq 4$, чтобы избежать режима сильной связи на больших отрицательных временах. Методом проб и ошибок мы приходим к Лагранжиану:

$$L = q(D^2 A^\rho \square A_\rho + kB^2 + lC^2 + u(F_{\mu\nu} F_\rho{}^\nu A^{\mu,\rho} + 2A^{\rho,\mu} A_{\rho,\nu} A_\mu{}^{,\nu})), \quad (38)$$

где q , k , l и u - свободные параметры в Лагранжиане, и

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\ D &= A_{\mu;\nu} A^\mu A^\nu, \\ B &= A_\mu A^\nu A^{\mu;\lambda} A_{\nu;\lambda}, \\ C &= A^{\mu;\tau} A_\tau A^\rho A_{\mu;\rho}. \end{aligned}$$

Специальный вид этого Лагранжиана обусловлен несколькими требованиями к его структуре. Во-первых члены содержащие вторые производные от полей подобраны таким образом, чтобы уравнения движения как и для поля A_μ , так и для динамической метрики, в случаи минимальной связи с гравитацией, оставались уравнениями второго порядка. Иными словами это Лагранжиан является галилеоном с векторными полями. Во-вторых квадратичный Лагранжиан для полевых возмущений диагонален и невырожден. А в-третьих полный Лагранжиан (38) ковариантен под действием масштабных преобразований со следующими параметрами N и s :

$$N = \frac{12}{5}, \quad s = -\frac{1}{5}.$$

Последних два требования обосновывают законность применения утверждения про условие отсутствие сильной связи, сформулированного в разделе 2.1).

В соответствии с разделом 2.1 существует однородное и изотропное решение уравнений движения, вид которого даётся выражением ниже:

$$A_\mu^{bg} = (\beta|t|^{\frac{1}{5}}, 0, 0, 0), \quad (39)$$

где β - это константа, которая зависит от свободных параметров Лагранжиана. Классическая эволюция, описываемая уравнением (39), происходит в режиме слабой связи на больших и отрицательных временах, $t \rightarrow -\infty$.

Теперь мы перейдём к выяснению того, существует ли такой набор параметров q, k, l, u в Лагранжиане (38), который приводит к стабильности решения (39), отсутствию сверхсветового распространения полевых возмущений и нарушению условия NEC. Решая уравнения движения для векторного поля, мы находим, что β связана с параметрами Лагранжиана следующим образом:

$$\beta^5 = \frac{20u}{3m - 5},$$

где

$$m = l + k + u.$$

Для того чтобы определить область значения параметров Лагранжиана, в которой происходит нарушение условия NEC, нам потребуется выражение для тензора энергии-импульса для фонового решения (39):

$$T_{\mu\nu} = \frac{2\delta(\sqrt{-g}L)}{\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}} \Big|_{g_{\rho\sigma}=\eta_{\rho\sigma}}.$$

С этой целью мы рассмотрим минимальную связь с гравитацией, т.е. полагаем: $A_{\mu;\nu} = \nabla_\nu A_\mu$, $\square A_\rho = \nabla^\mu \nabla_\mu A_\rho$, $D = A_{\mu;\nu} A_\tau A_\lambda g^{\mu\tau} g^{\nu\lambda}$, и т.д. в искривлённом пространстве-времени. Тогда Лагранжиан (38) можно записать в следующей форме:

$$L = \frac{1}{2}f(D)\square F - f(D)A_{\tau;\sigma}A^{\tau;\sigma} + L(A_\mu, A_{\lambda,\nu})$$

где

$$F = A_\mu A^\mu,$$

$$f(D) = qD^2,$$

$$L = q[kB^2 + lC^2 + u(F_{\mu\nu}F_\rho{}^\nu A^{\mu,\rho} + 2A^{\rho,\mu}A_{\rho,\nu}A_\mu{}^{,\nu})].$$

Используя для упрощения вычислений тот факт, что $\partial_0\rho = 0$ в плоском пространстве времени, мы немедленно получаем выражение для тензора энергии-импульса

$$\begin{aligned} T_{00} &= 0, \\ T_{ij} &= p\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ p &= \left(-\frac{1}{2}\partial_\tau f \partial^\tau F + L - f A_{\tau;\sigma} A^{\tau;\sigma} \right) \Big|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}; A_\mu=A_\mu^{bg}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Следовательно, давление, соответствующее фоновому решению, определяется следующим уравнением,

$$p = \frac{qu^{\frac{8}{5}}2^{\frac{11}{5}}5^{-\frac{12}{5}}(11-m)}{(3m-5)^{\frac{8}{5}}}(-t)^{-\frac{12}{5}}, \quad t < 0. \quad (41)$$

Таким образом, условие нарушение NEC фоновым решением классических уравнений движения A_μ^{bg} имеет вид:

$$q(11-m) < 0. \quad (42)$$

Теперь передём к рассмотрению устойчивости фонового решения A_μ^{bg} . Также мы будем требовать того, чтобы скорость возмущений над решением A_μ^{bg} была меньше скорости света. Несмотря на то, что наличие сверхсветовых возмущений немедленно не приводит к проблемам в рассматриваемой теории, факт наличия возмущений такого типа сигнализирует о невозможности ультрафиолетового (UV) замыкания [50]. Иными словами, такая теория не может быть низкоэнергетической эффективной теорией поля, возникающей в некоторой лоренц-инвариантной теории, верной при всех масштабах энергии (однако это вывод оспаривается в некоторых работах, см., например, работу [51]). Тем не менее

при построении нашей модели для векторных галилеонных полей мы будем запрещать возможность наличия сверхсветовых возмущений.

Условия стабильности и условия отсутствия сверхсветовых возмущений над однородным и изотропным фоновым решением для векторных галилеонных моделей были получены в работе [65]. Используя результаты работы [65], легко найти, что существует два диапазона параметров такие, что все эти условия вместе с (42) выполняются, при $t < 0$:

$$(1) \quad q > 0, \\ u \neq 0, \\ \frac{25}{2} < k \leq \frac{39}{2}, \\ 11 - k < l < -\frac{k+1}{9},$$

и

$$(2) \quad q > 0, \\ u \neq 0, \\ k > \frac{39}{2}, \\ \frac{9-7k}{15} < l < -\frac{k+1}{9},$$

Таким образом, наш пример показывает, что существуют устойчивые, однородные решения для векторных галилеонных теориях, которые нарушают NEC и избегают режима сильной связи на ранних временах.

2.2.2 Включение динамической гравитации.

В этом разделе мы построим начальную стадию космологического Генезиса аналогичную той, которая была предложена в работе [52]. Для этого мы включаем динамическую гравитацию и предполагаем, что она описывается обычной общей теорией относительности, в то время, как векторное поле минимально связано с метрикой, как было описано выше. Важно отметить то, что такое

векторное поле не изменяет скорости распространения гравитационных волн, а также что все уравнения движения как для векторного поля, так и для метрики остаются уравнениями второго порядка по производным аналогично тому, как это происходит в теориях Хорндески.

В асимптотическом прошлом пространство-время предполагается Минковским, и в соответствии с (40), (41) тензор энергии-импульса обращается в ноль, при $t \rightarrow -\infty$. При больших, но конечных $|t|$ воздействие гравитационного поля на эволюцию векторного поля незначительно, и поэтому в лидирующем порядке по массе Планка M_{Pl}^{-1} плотность энергии и давление равны своим значениям в плоском пространстве-времени (40), (41). Тогда, используя одно из уравнений Фридмана,

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p),$$

мы находим, что значение параметра Хаббла даётся следующим выражением:

$$H = \frac{40\pi Gqu^{\frac{8}{5}}2^{\frac{6}{5}}5^{-\frac{12}{5}}(m-11)}{7(3m-5)^{\frac{8}{5}}}(-t)^{-\frac{7}{5}}, \quad t \rightarrow -\infty.$$

А масштабный фактор a имеет следующее асимптотическое поведение:

$$a = \exp(|const| * (-t)^{-\frac{2}{5}}), \quad t \rightarrow -\infty.$$

Причём масштабный фактор стремится к 1 на бесконечных отрицательных временах, т.е.:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a = 1.$$

Таким образом, Вселенная начинает свою эволюцию с асимптотически плоского пространства-времени, а в дальнейшем претерпевает ускоренное, экспоненциальное расширение, характерное для ранней эпохи Генезиса. На этом этапе возмущения векторного поля над степенным фоновым решением стабильны, и скорость этих возмущений не превышает скорости света.

2.3 Основные результаты

В данной главе были рассмотрены Лагранжианы для M бозонных полей, которые в отсутствие гравитации ковариантны относительно однородных масштабных преобразований. Было доказано, что для моделей такого типа может существовать однородное и изотропное классическое решение полевых уравнений движения. Далее были изучены малые полевые возмущения над классическим фоновым решением. После этого был получен общий вид квадратичного и старшего Лагранжианов для скалярных полевых возмущений. Было показано, что члены взаимодействия, входящие в старшие Лагранжианы для возмущений, приводят к возникновению масштаба сильной связи Λ в данной теории, и то что этот масштаб имеет степенной закон поведение (см. раздел 2.1):

$$\Lambda \propto |t|^{-\sigma}.$$

Наш дальнейший анализ режима сильной связи или, иными словами, возможности применения классического решения уравнений движения для описания эволюции системы основан на сравнении характерных масштабов энергии: для того чтобы выяснить, является ли классический подход к описанию модели законным, необходимо найденный масштаб сильной связи сравнить с обратным характерным временем эволюции решения. Таким образом, для того чтобы классическое описание системы оставалось законным мы требуем, чтобы масштаб сильной связи был много больше характерной скорости эволюции классического решения. После наложения такого требования, мы приходим к следующему условию на параметры масштабного преобразования (см. раздел 2.1):

$$N \leq 4.$$

Если квадратичный Лагранжиан для возмущений имеет невырожденный и диагональный вид, то утверждение про отсутствие сильной связи в модели применимо также и в том случае, когда присутствуют векторные поля в теории. В этом

случае часть индексов нумерирующих скалярные поля формально выступает в качестве Лоренцевых индексов и нумеруют компоненты векторного поля.

В разделе 2.2 был построен пример векторного галилеонного Лагранжиана, который ковариантен относительно масштабных преобразований с $N = \frac{12}{5}$, и имеет диагональный и невырожденный квадратичный Лагранжиан для полевых возмущений над однородным и изотропным фоновым решением. Также в этом разделе даётся явный вид искомого фонового решения. Таким образом в данной работе был построен пример Лагранжиана для векторных галилеонных полей, имеющих фоновое решение, которое применимо для классического описания системы, в том случае, когда мы пренебрегаем влиянием динамической гравитации. Важно отметить, что вообще говоря, наличие динамической гравитации может существенно изменить оценку на масштаб сильной связи, так как члены с деламбертианом от векторного поля и с ковариантными производными от поля приводят к нетривиальному вкладу в уравнения Эйнштейна после варьирования по метрике. Поэтому вопрос влияния возмущений метрики как на масштаб сильной связи, так и на устойчивость фонового решения требует дополнительного исследования.

Затем был найден тензор энергии-импульса для фонового решения. Также было получено условие нарушения NEC этим фоновым решением. Затем были получены условия устойчивости и условия отсутствия сверхсветовых возмущений для сконструированного Лагранжиана для однородного и изотропного фонового решения в плоском пространстве. Была показана возможность существования области значений свободных параметров приводящих к устойчивости решения, отсутствию сверхсветовых возмущений над решением и к нарушению условия NEC. Эта область значений параметров Лагранжиана была найдена явно и приводится в конце раздела 2.2.1). Таким образом построенный Лагранжиан, аналогично теориям со скалярными галилеонами, может быть одним из кандидатов на роль эффективной полевой теории, пригодной для построения различных нестандартных космологических сценариев, например сценария

генезиса.

Также в явном виде было найдено устойчивое решение, нарушающее изотропное условие энергодоминантности. Это означает, что на основе лагранжианов с векторными галилеонными полями также возможно построение космологических моделей, рассматривающих нарушения условия NEC.

3 Самосогласованность классической теории для генозиса с сильной гравитацией в прошлом

В предыдущей главе, при попытке построить начальную стадию космологического Генозиса, в рамках векторных галилеонных полей мы столкнулись с необходимостью анализировать применимость классического описания. Заметим, что данный анализ был проделан без учета возмущений метрики. Тем не менее для построения реалистичной несингулярной космологической модели необходимо научиться проводить данный анализ во всех порядках с учетом возмущений метрики. Данная проблема с масштабom сильной связи возникает и в скалярно-тензорной теории Хорндески, при попытке построить генозис или Вселенную с отскоком. Таким образом естественно начать исследование этого вопроса не с моделей с векторными полями (см. раздел 1), а с более простого случая - теории Хорндески [17, 31, 40, 67–72]. Теория Хорндески является скалярно-тензорной модификацией гравитации, с лагранжианом, содержащим вторые производные скалярного поля, и все же с уравнениями движения второго порядка. Однако устойчивого нарушения условия NEC недостаточно для построения полной космологической модели, хотя: в [33, 34] было показано что отсутствие неустойчивостей накладывает сильные ограничения на генозис Хорндески. Тем не менее, есть пример лагранжиана [34] который приводит к стабильному генозису на уровне классической теории поля и линейных возмущений. Потенциальный недостаток модели [34] это то, что "эффективная планковская масса" стремится к нулю в асимптотическом прошлом, что может привести к проблеме сильной связи и сделать классическое описание неприменимым ². В работе [66], проблема сильной связи в модели [34] была рассмотрена на уровне кубического действия для возмущений. Используя размерный анализ, было показано, что существует область в пространстве параметров, где

²В [62, 63, 73–75] было показано, что есть еще один способ обойти ограничения [33, 34] и это использование DHOST теорий [35, 36, 76, 77].

применима классическая теория поля, несмотря на тот факт, что "эффективная планковская масса" обращаются в нуль, при $t \rightarrow -\infty$.

Цель данной главы состоит в том, чтобы расширить анализ [66] на все порядки теории возмущений и найти условие применимости классического описания, для модели [34].

Давайте напомним, как возникает проблема сильной связи в модели генезиса [34]. Пусть h_{ij} и ζ обозначим тензорные и скалярно-метрические возмущения относительно пространственно плоского Фонового решения Фрийдмана - Леметра - Робертсона - Уокера (FLRW) в унитарной калибровке $\delta\phi = 0$, где ϕ является скалярным полем Хорндески. Квадратичное действие для этих возмущений имеет общий вид

$$\mathcal{S}_{(2)} = \int dt d^3x N_0 a^3 \left[\mathcal{G}_S \frac{\dot{\zeta}^2}{N_0^2} - \frac{\mathcal{F}_S}{a^2} \zeta_{,i} \zeta_{,i} + \mathcal{G}_T \frac{\dot{h}_{ij}^2}{8N_0^2} - \frac{\mathcal{F}_T}{8a^2} h_{ij,k} h_{ij,k} \right], \quad (43)$$

где \mathcal{F}_S , \mathcal{G}_S , \mathcal{F}_T , и \mathcal{G}_T являются функциями космического времени t , $a(t)$ является масштабным фактором, и N_0 является фоновым решением для функции сдвига. Чтобы избежать духовых и градиентных неустойчивостей, требуется, чтобы коэффициенты удовлетворяли

$$\mathcal{F}_S, \mathcal{G}_S, \mathcal{F}_T, \mathcal{G}_T > 0.$$

В случае с генезисом фоновое решение несингулярно: $a(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow -\infty$, и $N_0 = 1$. Таким образом, функции \mathcal{F}_S , \mathcal{G}_S , \mathcal{F}_T , и \mathcal{G}_T ограничены снизу строго положительным числом, тогда интеграл

$$\int_{-\infty}^t a(t) [\mathcal{F}_T(t) + \mathcal{F}_S(t)] dt$$

расходится на нижнем пределе интегрирования. No-go теорема [33, 34] утверждает, что в этом случае на некотором этапе космологической эволюции существует градиентная или духовая неустойчивость.

Модель [34] использует наблюдение о том, что эта no-go теорема не выполняется, если $\mathcal{F}_T \rightarrow 0$, $\mathcal{F}_S \rightarrow 0$, $\mathcal{G}_T \rightarrow 0$ и $\mathcal{G}_S \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$. Их асимптотическое

поведение имеет вид [34]

$$\mathcal{G}_T \propto (-t)^{-2\mu}, \quad \mathcal{F}_T \propto (-t)^{-2\mu}, \quad \mathcal{G}_S \propto (-t)^{-2\mu+\delta}, \quad \mathcal{F}_S \propto (-t)^{-2\mu+\delta}, \quad (44)$$

где μ and δ параметры модели, которые удовлетворяют следующим условиям $2\mu > 1 + \delta$ and $\delta > 0$. В то же время такое поведение подразумевает, что в асимптотическом прошлом можно столкнуться с режимом сильной связи, поскольку коэффициенты квадратичного действия для метрических возмущений, которые служат эффективными планковскими массами, стремятся к нулю, при $t \rightarrow -\infty$.

Однако в работе [66] было показано что тот факт, что \mathcal{F}_T , \mathcal{F}_S , \mathcal{G}_T , и \mathcal{G}_S стремятся к нулю, при $t \rightarrow -\infty$ не обязательно означает, что классическая теория поля неприменима для описания эволюции фонового решения. Чтобы увидеть, что происходит, нужно оценить фактический масштаб энергии сильной связи E_{strong} изучая кубические члены взаимодействия и члены взаимодействия более высокого порядка. Классический анализ применим для генезиса в теории Хорндески, если энергетический масштаб E_{class} характеризующий классическую эволюции ниже, чем E_{strong} ,

$$E_{class} \ll E_{strong}.$$

Здесь классический энергетический масштаб является обратным характерным временем эволюции классического фонового решения; для степенного фонового решения имеем:

$$E_{class} \sim |t|^{-1}.$$

Мы используем наивный размерный анализ, основанный на подсчете степеней, и находим наиболее сильные ограничения на параметры лагранжиана для каждого порядка по теории возмущений. При этом мы на всех этапах игнорируем любые возможные сокращения между членами, также при расчетах мы опускаем числовые коэффициенты. Сокращения между членами, если таковые имеются, могут только увеличить область пространства параметров, где проблема

сильной связи не возникает. Мы обнаруживаем, что самое сильное ограничение такое же, как и то, которое вытекает из кубического действия для скалярного возмущения, которое было подробно изученного в работе [66], т.е. нелинейности более высокого порядка не добавляют ничего нового в том, что касается проблемы сильной связи.

3.1 Общие положения

3.1.1 Модель

Мы изучаем модель генезиса из работы [34], которая принадлежит простому подклассу теорий Хорндески. Ковариантной формой действия для этого подкласса является

$$\mathcal{S} = \int d^3x dt \sqrt{-g} \mathcal{L}, \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X) \square \phi + G_4(\phi) R, \\ X &= -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \end{aligned} \quad (46)$$

R - скаляр Риччи, $\square \phi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi$ и $G_{2,3,4}$ являются некоторыми произвольными функциями. Мы используем метрику $(-, +, +, +)$ и работаем в натуральных единицах, т.е. $c = \hbar = G = 1$.

Вместо ковариантной формы для наших целей удобно использовать разложение Арновитта - Дезера - Мизнера (ADM)³ для лагранжиана: (73):

$$\mathcal{L} = A_2(t, N) + A_3(t, N) K + A_4(t, N) (K^2 - K_j^i K_i^j) + B_4(t, N) {}^{(3)}R, \quad (47)$$

где $\phi = const$ гиперповерхности считаются гиперповерхностями с постоянным временем. Последнее свойство означает, что мы выбираем унитарную калибровку для возмущений

$$\delta\phi = 0.$$

Общая форма метрики такова

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt), \quad (48)$$

где γ_{ij} пространственная метрика.

³Способ преобразования одного формализма в другой можно найти в работах [36, 78, 79].

Внешняя кривизна и пространственный тензор Риччи равны

$$K_{ij} \equiv \frac{1}{2N} (\dot{\gamma}_{ij} - {}^{(3)}\nabla_i N_j - {}^{(3)}\nabla_j N_i),$$

$${}^{(3)}R_{ij} \equiv \partial_k {}^{(3)}\Gamma_{ij}^k - \partial_i {}^{(3)}\Gamma_{kj}^k + {}^{(3)}\Gamma_{lk}^k {}^{(3)}\Gamma_{ij}^l - {}^{(3)}\Gamma_{li}^k {}^{(3)}\Gamma_{jk}^l,$$

где $K = \gamma^{ij} K_{ij}$, ${}^{(3)}R = \gamma^{ij} {}^{(3)}R_{ij}$. Мы приходим к $\sqrt{-g} \equiv N\sqrt{\gamma}$ in action (45), где $\gamma \equiv \det({}^{(3)}\gamma_{ij})$.

Мы изучаем конкретную теорию Хорндески из работы [34], в котором функции лагранжиана задаются следующим образом:

$$A_2 = f^{-2\mu-2-\delta} a_2(N), \quad (49a)$$

$$A_3 = f^{-2\mu-1-\delta} a_3(N), \quad (49b)$$

$$B_4 = -A_4 = f^{-2\mu}, \quad (49c)$$

где μ и δ - константы⁴, такие же как и в (44), и $f(t)$ функция времени

$$f \propto -t, \quad t \rightarrow -\infty.$$

В работе [34] было показано, что для того чтобы обойти No-go теорему необходимо потребовать

$$2\mu > 1 + \delta, \quad \delta > 0. \quad (50)$$

Мы используем этот выбор в дальнейшем. Функции a_2 и a_3 входящие в (49) имеют вид

$$a_2(N) = -\frac{1}{N^2} + \frac{1}{3N^4}, \quad (51a)$$

$$a_3(N) = \frac{1}{4N^3}. \quad (51b)$$

Асимптотики фонового решения для генезиса [34] равны

$$a \propto 1 + \frac{1}{\delta(-t)^\delta}, \quad N_0 \rightarrow 1, \quad \text{as } t \rightarrow -\infty,$$

⁴Заметим, что в работе [34, 66] параметр μ был обозначен как α . Мы используем обозначение α для одной из переменных в метрике.

где $a(t)$ является масштабным коэффициентом и N_0 является фоновым значением функции сдвига N .

Параметр Хаббла $H = \dot{a}/(N_0 a)$ и он равен

$$H \propto \frac{1}{(-t)^{1+\delta}}.$$

Везде, где это возможно, мы используем асимптотические значения $a = N_0 = 1$.

В этой работе мы сосредоточимся на анализе возмущений. Декомпозиция ADM метрики (48), для возмущений имеет вид

$$\begin{aligned} N &= N_0(1 + \alpha), \\ N_i &= \partial_i \beta + N_i^T, \text{ where } \partial_i N^{Ti} = 0, \\ \gamma_{ij} &= a^2 \left(e^{2\zeta} (e^h)_{ij} + \partial_i \partial_j Y + \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T \right). \end{aligned}$$

Мы фиксируем остаточную калибровочную свободу $Y = 0$ и $W_i^T = 0$, таким образом, пространственная часть метрики имеет вид

$$\gamma_{ij} = a^2 e^{2\zeta} (e^h)_{ij}$$

где

$$(e^h)_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij} + \frac{1}{2} h_{ik} h_{kj} + \frac{1}{6} h_{ik} h_{kl} h_{lj} + \dots, \quad h_{ii} = 0, \quad \partial_i h_{ij} = 0.$$

Переменные α , β и N^T входят в действие без временных производных; динамическими степенями свободы являются ζ и поперечный бесследовый тензор h_{ij} , т.е. скалярные и тензорные возмущения.

3.2 Предварительный анализ

Цель дальнейшего обсуждения в этом разделе - представить общую схему для получения масштаба сильной связи, который связан с членами взаимодействия в действии. Мы применяем наиболее простой подход и проводим наш анализ, используя *отрешенное* действие записанное в переменных ζ и h (мы часто опускаем индексы в h_{ij}).

Для дальнейшего размерного анализа мы игнорируем все числовые коэффициенты и используем (47), (49) и схематично запишем асимптотику (при больших $-t$) для подынтегрального выражения в действии следующим образом:

$$\sqrt{g}\mathcal{L} \propto (-t)^{-2\mu} \left[(-t)^{-2-\delta} a_2(N) + (-t)^{-1-\delta} a_3(N)K + (K^2 - K_j^i K_i^j) + {}^{(3)}R \right] N \sqrt{\gamma}. \quad (52)$$

Варьируя это действие по нединамическим переменным α , β и N_i^T мы получаем уравнения связи, затем решаем эти уравнения для α , β и N_i^T , подставляем их обратно в действие и получаем отрешенное действие для ζ и h . Важно отметить, что параметр μ входит общим множителем только в (52), поэтому уравнения на нединамические поля и, следовательно, выражения для α , β и N_i^T не зависят от параметра μ , в то время как отрешенное действие имеет общий множитель $(-t)^{-2\mu}$.

Затем мы раскладываем отрешанное действие по полям ζ и h_{ij} . Квадратичная часть действия имеет вид (43). В соответствии с приведенными выше рассуждениями, член более высокого порядка, например p -го порядка по скалярам ζ и q -го порядка по тензорам h_{ij} в подынтегральном выражении (при $p + q \geq 3$) имеет следующий вид:

$$(\sqrt{-g}\mathcal{L})_{(pq)} \propto (-t)^{-2\mu} \sum_l (-t)^{d_l} \cdot (\partial_t)^{a_l} \cdot (\partial_i)^{b_l} \cdot \zeta^p \cdot h^q, \quad (53)$$

где индекс (pq) относится к степеням ζ и h а l обозначает различные типы членов, a_l и b_l являются количеством временных и пространственных производных (каждая из которых действует либо на ζ , либо на h), соответственно, и d_l линейны по δ . В нашем размерном анализе мы отбрасываем числовые коэффициенты в (53). Примером членов вида (53) является кубическое действие в скалярном секторе ($p = 3$, $q = 0$), записанное в статьях [66, 80, 81]; в этом случае сумма в (53) содержит 17 членов с разным количеством производных и/или различными коэффициентами, зависящими от времени. Поскольку раз-

мерность временных и пространственных производных одинакова, для нашего размерного анализа мы переписываем (53) как

$$(\sqrt{-g}\mathcal{L})_{(pq)} \propto (-t)^{-2\mu} \sum_l (-t)^{d_l} \cdot (\partial)^{c_l} \cdot \zeta^p \cdot h^q, \quad (54)$$

где мы вводим оператор общей производной ∂ и подсчитываем количество этих операторов с помощью $c_l \equiv a_l + b_l$. Очевидно, что количество членов в сумме в(54) меньше, чем в выражение (53).

Следующим шагом является каноническая нормировка возмущений ζ и h_{ij} . Явная форма отрешанного квадратичного действия (43) и асимптотическое поведение коэффициентов (44) немедленно дают каноническую нормировку для поля

$$(h_{ij})_{(c)} \propto \sqrt{\mathcal{G}_T} h_{ij} \propto (-t)^{-\mu} h_{ij},$$

и

$$\zeta_{(c)} \propto \sqrt{\mathcal{G}_S} \zeta \propto (-t)^{-\mu + \frac{\delta}{2}} \zeta.$$

Тот факт, что коэффициенты здесь стремятся к нулю как $t \rightarrow -\infty$ (из-за условий (50), наложенных на параметры лагранжиана) имеет решающее значение, поскольку сигнализирует о возможном режиме сильной связи на ранних этапах. В терминах канонически нормированных полей мы имеем

$$\begin{aligned} (\sqrt{-g}\mathcal{L})_{(pq)} &\propto (-t)^{-2\mu} \sum_l (-t)^{d_l} \cdot (\partial)^{c_l} \cdot \mathcal{G}_S^{-p/2} \cdot \zeta_{(c)}^p \cdot \mathcal{G}_T^{-q/2} \cdot h_{(c)}^q \\ &\equiv \sum_l \Lambda_l \cdot (\partial)^{c_l} \cdot \zeta_{(c)}^p \cdot h_{(c)}^q, \end{aligned} \quad (55)$$

где

$$\Lambda_l \equiv (-t)^{-2\mu + d_l} \mathcal{G}_S^{-p/2} \mathcal{G}_T^{-q/2} = (-t)^{-2\mu + d_l + p(\mu - \delta/2) + q\mu}.$$

Теперь мы используем размерный анализ и находим энергетический масштаб сильной связи E_l , связанный с каждым из членов в (55). Размерность канонически нормированных полей равна $[\zeta_{(c)}] = [(h_{ij})_{(c)}] = 1$, в то время как

$[\sqrt{-g}\mathcal{L}] = 4$. Таким образом, размерность Λ_l равна

$$[\Lambda_l] = [\mathcal{L}] - [\zeta_{(c)}^p] - [h_{(c)}^q] - [\partial^{c_l}] = 4 - p - q - c_l.$$

Обратите внимание, что только члены с $4 - c_l - p - q < 0$ потенциально приводят к сильной связи. Энергии сильной связи E_l равна

$$E_l \propto \Lambda_l^{-\frac{1}{c_l+p+q-4}} \propto (-t)^{-\frac{-2\mu+d_l+p(\mu-\delta/2)+q\mu}{c_l+p+q-4}}.$$

Требованием применимости классического подхода являются следующие условия: $E_{class} \ll E_l$ для любого l . Классический энергетический масштаб равен $\dot{H}/H \propto (-t)^{-1}$ (масштаб $H \propto (-t)^{-1-\delta}$ меньше), таким образом $E_{class} \propto (-t)^{-1}$. Требуя $E_{class} \ll E_l$, мы получаем, что данный одночлен порядка (pq) приводит к следующему условию, налагаемому на параметры лагранжиана μ и δ (которые должны подчиняться условию (50)):

$$-2\mu + d_l + p(\mu - \delta/2) + q\mu < c_l + p + q - 4, \quad (56)$$

где $p + q \geq 3$, $4 - c_l - p - q < 0$. Мы переписываем (56) как

$$\mu < 1 + \frac{p\delta}{2(p+q-2)} - \frac{(d_l - c_l) + 2}{p+q-2}, \quad (57)$$

и видим, что наиболее "опасными" из (pq) -слагаемых являются те, у которых наибольшая разница $(d_l - c_l)$. Итак, при заданном (pq) -порядке мы должны найти член в $(\sqrt{-g}\mathcal{L})_{(pq)}$ с наибольшей разницей $d_l - c_l$, а затем найти наименьшую правую часть в (57) среди всех p и q (с $p+q \geq 3$). Это даст наисильнейшее ограничение на параметры лагранжиана.

Мы проводим эту процедуру в разделе 3.3; подробности расчетов приведены в приложениях В, С и D.

3.3 Анализ

3.3.1 Упрощения

Явная оценка пертурбативного разложения для исходного действия, отрешивание связей, как известно, являются сложной процедурой. Однако мы делаем

ряд упрощений. В конце концов мы обнаружим, что самое сильное ограничение на параметры модели такое же, как и ограничение связанное с кубическими членами в лагранжиане, которые уже были подробно проанализированы в работе [66]. Наши упрощения заключаются в следующем.

1) Как упоминалось выше, мы отбрасываем все числовые коэффициенты, таким образом пренебрегая любыми возможными сокращениями. Кроме того, мы не отслеживаем тензорную структуру различных членов в действии кубического и более высокого порядка.

2) В соответствии с приведенным выше обсуждением, для заданных p и q мы сохраняем только те одночлены в (54), которые имеют наибольшее значение $(d_l - c_l)$. Мы записываем значение $(d_l - c_l)$ в виде верхнего индекса перед выражением, включающим поля, т.е. мы используем обозначение

$$(-t)^d (\partial)^c \zeta^p h^q = {}^{(d-c)} \zeta^p h^q \quad (58)$$

и не различаем одночлены с разными d и c , но с одним и тем же $(d - c)$.

3) Мы делаем то же самое в членах кубического и более высокого порядка в исходном действии, включающем все переменные α , β , N^T , ζ и h . Чтобы понять, почему это правильно, мы запишем уравнения связи:

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{(2)}}{\delta\alpha} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{H.O.}}{\delta\alpha} = 0, \quad (59a)$$

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{(2)}}{\delta\beta} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{H.O.}}{\delta\beta} = 0, \quad (59b)$$

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{(2)}}{\delta N^T} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{H.O.}}{\delta N^T} = 0, \quad (59c)$$

где $(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{(2)}$ является квадратичной частью исходного подынтегрального выражения в действии, которая известна явно (и структура которой будет приведена ниже), и $(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{H.O.}$ содержит кубические члены и члены более высокого порядка. Общим членом в последнем является (для упрощения формул здесь мы не записываем общий коэффициент $t^{-2\mu}$ в $(\sqrt{-g}\mathcal{L})$, см. выражения (52), (54))

$$(-t)^D (\partial)^C \alpha^{m_\alpha} \beta^{m_\beta} (N^T)^{m_{N^T}} \zeta^{m_\zeta} h^{m_h} \quad (60)$$

где положительные целые числа m_α, \dots, m_h . Давайте сравним эффекты от членов с одинаковым набором параметров (m_α, \dots, m_h) и разными C и D . После решения уравнений связи можно найти $\alpha(\zeta, h)$, $\beta(\zeta, h)$, $N^T(\zeta, h)$, снова в виде рядов по ζ , h и их производных, с коэффициентами, зависящими от t . Подставляя их обратно в (60), получаем

$$(-t)^D (\partial)^C \alpha^{m_\alpha}(\zeta, h) \beta^{m_\beta}(\zeta, h) (N^T(\zeta, h))^{m_{NT}} \zeta^{m_\zeta} h^{m_h} .$$

который представляет собой линейную комбинацию выражений (58). Наибольшее значение $(d - c)$ для заданных (p, q) получается для наибольшего значения $(D - C)$. Также, порядок за порядком по теории возмущений, наибольшие вклады в переменные α , β и N^T (в смысле наибольшего $(d - c)$ для данного (p, q) в отрешаном действии) связаны с членами с наибольшим значением $(D - C)$. Итак, для заданных (m_α, \dots, m_h) мы сохраняем только члены в оригинальном лагранжиане $(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{H.O.}$ с наибольшим значением $(D - C)$ и, по аналогии с (58), используем обозначения

$$(-t)^D (\partial)^C \alpha^{m_\alpha} \beta^{m_\beta} (N^T)^{m_{NT}} \zeta^{m_\zeta} h^{m_h} \stackrel{(D-C)}{=} \alpha^{m_\alpha} \beta^{m_\beta} (N^T)^{m_{NT}} \zeta^{m_\zeta} h^{m_h} \quad (61)$$

и не различаем члены с одинаковыми $(D - C)$, но разными D и C .

4) Еще одно упрощение заключается в том, что мы заменяем некоторые члены в оригинальном лагранжиане $(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{H.O.}$, которые имеют вид (60), на новые с большими $(D - C)$. Это может только усилить ограничение на параметры модели (но на самом деле это не так). Конкретно, мы производим следующие замены в $(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{H.O.}$ (здесь мы используем обозначения (61)):

$$-2^{-\delta}(1 + \alpha + \dots) \rightarrow^{-2} (1 + \alpha + \dots), \quad (62a)$$

$$-3^{-\delta}\beta(1 + \alpha + \dots) \rightarrow^{-3} \beta(1 + \alpha + \dots), \quad (62b)$$

$$-2^{-\delta}(1 + \alpha + \dots)\zeta N^T \rightarrow^{-2} (1 + \alpha + \dots)\zeta N^T . \quad (62c)$$

Отметим, что аналогичные замены в квадратичной части $(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{(2)}$ (точнее, в части, билинейной по нединамическим переменным) были бы невозможно,

поскольку они бы привели бы к ошибочному ослаблению ограничений на параметры модели. Наконец, мы можем добавить произвольные дополнительные слагаемые к $(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{H.O.}$; опять же, это может только усилить ограничение на параметры модели (но на самом деле это не так). Мы используем это наблюдение для замены

$$(1 + \alpha) \rightarrow (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots) \quad (63)$$

при разложении члена $\sqrt{-g}B_4^{(3)}R$ в (47) (и только в этом случае). Эти замены значительно упрощают расчеты.

3.3.2 Лидирующие члены в действии

С учетом приведенных выше обозначений и упрощений доминирующие члены в исходном действии имеют довольно очевидную форму. Напомним, что существует общий фактор $t^{-2\mu}$ в $(\sqrt{-g}\mathcal{L})$, см. (52), (54), и что это не влияет на верхние индексы $(D - C)$ и $(d - c)$, которые не зависят от μ . Поэтому удобно записывать выражения $t^{2\mu}\sqrt{-g}\mathcal{L}$ instead of $\sqrt{-g}\mathcal{L}$. и что это не влияет на верхние индексы $(D - C)$ и $(d - c)$, которые не зависят от μ . Эти вычисления описаны в приложение В и приводят к

$$\begin{aligned} t^{2\mu}\sqrt{-g}\mathcal{L} \supset t^{2\mu}(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{(2)} + \left\{ (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots) \left[\begin{aligned} &^{-2}(1 + \zeta + \zeta^2 + \dots) \\ &+^{-2}(1 + \zeta + \zeta^2 + \dots)(h^2 + h^3 + \dots) \\ &+^{-3}\beta(1 + \zeta + \zeta^2 + \dots)(1 + h + h^2 + \dots) \\ &+^{-2}N^T(\zeta + \zeta^2 + \dots) +^{-2}N^T(1 + \zeta + \zeta^2 + \dots)(h + h^2 + \dots) \\ &+^{-4}\beta^2(1 + \zeta + \zeta^2 + \dots)(1 + h + h^2 + \dots) +^{-2}(N^T)^2(1 + \zeta + \zeta^2 + \dots)(1 + h + h^2 + \dots) \\ &+^{-3}\beta N^T(1 + \zeta + \zeta^2 + \dots)(1 + h + h^2 + \dots) \end{aligned} \right] \right\}^{H.O.}, \quad (64) \end{aligned}$$

где обозначения $\{\dots\}^{H.O.}$ означает, что линейная и квадратичная части опущены. Мы пишем знак \supset вместо знаков равенства или пропорциональности, поскольку мы производим замены (62) и (63), приступаем к наивному анализу и не заботимся о числовых коэффициентах и возможных сокращениях.

Точное подынтегральное выражение второго порядка $(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{(2)}$ было вычислено в Ref. [23], за исключением члена, включающего N^T . Последний член вычисляется простым способом и имеет вид $(\partial_i N_j^T)^2$ из-за поперечности N_i^T . Мы снова опускаем числовые коэффициенты и записываем

$$\begin{aligned} t^{2\mu}(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{(2)} &\propto \dot{\zeta}^2 + \zeta_{,i}\zeta_{,i} + (-t)^{-\delta-2}\alpha^2 \\ &+ (-t)^{-\delta-1}\alpha\beta_{,ii} + \dot{\zeta}\beta_{,ii} + (-t)^{-\delta-1}\alpha\dot{\zeta} + \alpha\zeta_{,ii} \\ &+ \dot{h}_{ij}^2 + h_{ij,k}h_{ij,k} \\ &+ (\partial_i N_j^T)^2. \end{aligned}$$

Давайте сравним член $(-t)^{-\delta-1}\alpha\dot{\zeta}$ и $\alpha\zeta_{,ii}$. В наших обозначениях они записываются следующим образом $^{-\delta-2}\alpha\dot{\zeta}$ and $^{-2}\alpha\zeta$, соответственно. Поскольку $\delta > 0$, последний член доминирует над первым как в уравнениях связи (59a), так и в отрешанном действии. Итак, мы пренебрегаем первым членом. После этого часть подынтегрального выражения действия второго порядка записывается следующим образом:

$$t^{2\mu}(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{(2)} \supset \ ^{-2}\zeta^2 + \ ^{-2-\delta}\alpha^2 + \ ^{-3-\delta}\alpha\beta + \ ^{-3}\zeta\beta + \ ^{-2}\zeta\alpha + \ ^{-2}h^2 + \ ^{-2}(N^T)^2. \quad (65)$$

Обратите внимание, что верхние индексы у нединамических переменных здесь (члены с α^2 , $\alpha\beta$ и $(N^T)^2$) играют двойную роль. С одной стороны, они определяют структуру линейных членов в уравнениях связи (59) и, следовательно, входят в пертурбативное решение этих уравнений с противоположными знаками. В качестве примера, для линейного порядка, рассмотрим уравнение связи (59b), которое имеет форму $^{-3-\delta}\alpha + \ ^{-3}\zeta = 0$ и приводит к $\alpha \propto \ ^{\delta}\zeta$. С другой стороны, эти верхние индексы входят со своими исходными знаками в выражениях для частей отрешанного действия, полученного путем подстановки решений $\alpha(\zeta, h)$, $\beta(\zeta, h)$ и $N^T(\zeta, h)$ обратно в (65).

3.3.3 Решения для α , β и N_i^T

Теперь мы решим уравнения связи (59) и найдем α , β и N_i^T . Для линейного порядка мы используем действие (65), и находим решения (см. приложение С)

$$\alpha_{(pq)} = \delta \zeta, \quad (66a)$$

$$\beta_{(pq)} = \delta^{+1} \zeta, \quad (66b)$$

$$N_{(pq)}^T = 0, \quad p + q = 1. \quad (66c)$$

Обратите внимание, что решения линейного порядка включают только ζ , что и должно быть, поскольку h_{ij} является бесследовым и поперечным тензором, и, следовательно, нет способа построить из него линейную скалярную структуру. Кроме того, решение для N_i^T не имеет линейного члена.

Решения в квадратичном порядке получаются путем добавления (66) в кубическую часть действия (64) и использования выражения (59). Мы выполняем этот расчет в приложении С. Сохраняя только доминирующие члены (с наибольшим значением $(d - c)$ в каждом слагаемом), мы получаем

$$\alpha_{(pq)} = \delta h^2 + 3\delta \zeta^2 + 2\delta \zeta h, \quad (67a)$$

$$\beta_{(pq)} = \delta^{+1} h^2 + 3\delta^{+1} \zeta^2 + 2\delta^{+1} \zeta h, \quad (67b)$$

$$N_{(pq)}^T = h^2 + 2\delta \zeta^2 + \delta \zeta h, \quad p + q = 2. \quad (67c)$$

Мы получаем условия для более высоких порядков в приложении С по индукции

$$\alpha_{(pq)} = (2p+q-1)\delta \zeta^p h^q, \quad (68a)$$

$$\beta_{(pq)} = (2p+q-1)\delta^{+1} \zeta^p h^q, \quad (68b)$$

$$(N^T)_{(pq)} = (2p+q-2)\delta \zeta^p h^q, \quad p + q \geq 2. \quad (68c)$$

Полные решения представляют собой линейные комбинации (66) и (68) где все p и все q такие что $p + q \geq 2$.

3.3.4 Отрешанное действие

Теперь мы подставляем решения (68) в части подынтегрального выражения для действия второго и более высокого порядка (64). Мы сохраняем члены с максимальным значением $(d-c)$ для каждой комбинации с фиксированным $\zeta^p h^q$ в отрешанном действии кубического и более высокого порядка. Подробности расчетов приведены в приложении D, и здесь мы приводим результаты. Вклад, полученный из второго члена более высокого порядка в (64) равен

$$t^{2\mu}(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{H.O.} \supset \sum_{p+q \geq 3} (2p+q-3)\delta-2 \zeta^p h^q . \quad (69)$$

Квадратичное действие (65) дает следующие вклады:

$$t^{2\mu}(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{(2)} \supset \sum_{2p+q \geq 4, p+q \geq 3} (2p+q-3)\delta-2 \zeta^p h^q , \quad (70)$$

где условие $p+q \geq 3$ отражает тот факт, что нас интересуют кубические члены и члены более высокого порядка. Мы видим, что структура ведущих членов в отрешанном действии имеет довольно простую форму.

3.3.5 Ограничения на μ и на δ

Теперь мы вспомним, что член $(d-c)\zeta^p h^q$ ($p+q \geq 3$) дает ограничение (57) на параметры модели, которое мы получаем здесь:

$$\mu < 1 + \frac{p\delta}{2(p+q-2)} - \frac{(d-c)+2}{p+q-2}, \quad p+q \geq 3.$$

Каждый член в выражении (69) имеет $d-c = (2p+q-3)\delta-2$ и таким образом приводит к ограничению:

$$\mu + \delta + \frac{\delta(p-2)}{2(p+q-2)} < 1, \quad p+q \geq 3. \quad (71)$$

Нетрудно видеть, что самое сильное из этих ограничений исходит из условий с $q=0, p \geq 3$ (которые включают кубический порядок в скалярном секторе) и имеет вид

$$\mu + \frac{3}{2}\delta < 1. \quad (72)$$

Это ограничение совпадает с результатом Ref. [66] , полученными в кубическом порядке.

Кубические члены и члены более высокого порядка в $(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{(2)}$, даваемые выражением (70), также имеют $(d - c) = (2p + q - 3)\delta - 2$. Ограничения на параметры имеют ту же форму, что и (71), но теперь диапазон p и q равен $2p + q \geq 4$, $p + q \geq 3$. Самое сильное из этих ограничений снова следует из условий $q = 0$, $p \geq 3$ и имеет вид (72). Таким образом, модель с параметрами, которые удовлетворяют условию (72) (вместе с $2\mu > 1 + \delta$ с $\delta > 0$, см. (50))

свободна от проблемы сильной связи до тех пор, пока речь идет о достоверности классического описания генезиса.

3.4 Основные результаты

Подводя итог, можно сказать, что модель, которую мы изучали в этой статье , допускает описание классической теорией поля ранней стадии генезиса при условии, что ее параметры выбраны в диапазоне

$$\begin{aligned} 2\mu &> 1 + \delta > 1, \\ \mu + \frac{3}{2}\delta &< 1. \end{aligned}$$

Эта эпоха генезиса примечательна тем, что при $t \rightarrow -\infty$, "эффективная планковская масса" стремится к нулю, что является необходимым условием в теориях Хорндески (в отличие от их обобщений) для избежания нестабильностей в течение всей эволюции. Тем не менее , энергетический масштаб сильной связи E_{strong} остается значительно выше энергетического масштаба классической эволюции $E_{class} \sim t^{-1}$, в той мере, в какой

$$\frac{E_{strong}(t)}{E_{class}(t)} \rightarrow \infty \quad \text{as } t \rightarrow -\infty .$$

Это связано с тем, что члены взаимодействия в действии для возмущений достаточно быстро стремятся к нулю на минус бесконечности.

Очевидно, что модель, изучаемая в этой статье, является всего лишь примером непротиворечивой несингулярного космологического сценария. Ее преимущество в том, что она достаточно проста, чтобы обеспечить достаточно прямой анализ проблемы сильной связи, как мы продемонстрировали в этой главе.

Было бы интересно изучить различные способы включения такой модели генезиса в полный космологический сценарий, т.е. придумать и изучить здоровый переход к следующей стадии, такой как инфляция, или непосредственно к обычной горячей эпохе. Первые шаги в этом направлении уже сделаны в работе [82]

4 Космологические возмущения в несингулярных космологиях Хорндески

4.1 Модели Хорндески, имеющие степенное решение

4.1.1 Модель

Мы рассматриваем подкласс теорий Хорндески, действие которых имеет вид

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \{ G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X) \square \phi + G_4(\phi, X) R + G_{4X} [(\square \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2] \} \quad (73)$$

$$X = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi ,$$

где $\square \phi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi$ и $(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2 = \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla^\mu \nabla^\nu \phi$, R является скаляром Риччи. Сигнатура метрики равна $(-, +, +, +)$. В отличие от общей теории Хорндески, лагранжиан (73) включает в себя три произвольные функции $G_{2,3,4}$, а не четыре. Удобно работать в формализме ADM [72]. С этой целью метрика записывается в виде

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt) ,$$

где γ_{ij} является трехмерной метрикой, N - функция сдвига и $N_i = \gamma_{ij} N^j$ является вектором сдвига. Мы обозначим координатную временную переменную через \hat{t} и оставляем обозначение t для космического времени. Выбрав унитарную калибровку (в которой ϕ зависит от \hat{t} только и имеет форму $\phi = \phi(\hat{t})$), мы переписываем действие следующим образом,

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[A_2(\hat{t}, N) + A_3(\hat{t}, N) K + A_4(\hat{t}, N) (K^2 - K_{ij}^2) + B_4(\hat{t}, N) R^{(3)} \right] , \quad (74)$$

где

$$A_4(\hat{t}, N) = -B_4(\hat{t}, N) - N \frac{\partial B_4(\hat{t}, N)}{\partial N} ,$$

${}^{(3)}R_{ij}$ тензор Риччи сосчитанный по γ_{ij} , $\sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma}$, $K = \gamma^{ij}K_{ij}$, ${}^{(3)}R = \gamma^{ij}{}^{(3)}R_{ij}$ и

$$K_{ij} \equiv \frac{1}{2N} \left(\frac{d\gamma_{ij}}{d\hat{t}} - {}^{(3)}\nabla_i N_j - {}^{(3)}\nabla_j N_i \right),$$

является внешней кривизной гиперповерхностей $\hat{t} = \text{const}$. Связь между функциями Лагранжа в ковариантном и ADM формализмах задается формулами [36, 78, 79]

$$G_2 = A_2 - 2XF_\phi, \quad G_3 = -2XF_X - F, \quad G_4 = B_4, \quad (75)$$

где N и X связаны соотношениями

$$N^{-1}d\phi/d\hat{t} = \sqrt{2X}, \quad (76)$$

и

$$F_X = -\frac{A_3}{(2X)^{3/2}} - \frac{B_{4\phi}}{X}. \quad (77)$$

Попутно отметим здесь одну тонкость. Уравнение (77) определяет $F(\phi, X)$ с точностью до аддитивного члена вида $D(\phi)$. Этот член изменяет лагранжевы функции,

$$G_2 \rightarrow G_2 - 2XD_\phi, \quad G_3 \rightarrow G_3 - D.$$

Однако дополнительный вклад в действие (73) исчезает при интегрирование по частям,

$$\int d^4x \sqrt{-g} (-2XD_\phi + D\Box\phi) = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu (D\nabla^\mu\phi) = 0. \quad (78)$$

Следовательно, эта свобода, по сути, не имеет значения.

Чтобы описать фоновую метрику и связанные с ней возмущения, мы записываем

$$N = N_0(\hat{t})(1 + \alpha), \quad (79a)$$

$$N_i = \partial_i\beta + N_i^T, \quad (79b)$$

$$\gamma_{ij} = a^2(\hat{t}) \left(e^{2\zeta} (e^h)_{ij} + \partial_i\partial_j Y + \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T \right), \quad (79c)$$

где $a(\hat{t})$ и $N_0(\hat{t})$ фоновые решения $\partial_i N^{Ti} = 0$ и

$$(e^h)_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij} + \frac{1}{2}h_{ik}h_{kj} + \frac{1}{6}h_{ik}h_{kl}h_{lj} + \dots, \quad h_{ii} = 0, \quad \partial_i h_{ij} = 0.$$

На протяжении всей этой статьи мы обозначаем фоновую функцию сдвига через N вместо N_0 . Остаточная калибровочная свобода фиксируется $Y = 0$ и $W_i^T = 0$. Переменные α , β и N_i^T входят в действие без временных производных; динамическими степенями свободы являются ζ и поперечные бесследовые h_{ij} , т.е. скалярные и тензорные возмущения. После интегрирования переменных α и β мы получаем квадратичные действия для скалярных и тензорных возмущений [57]

$$\mathcal{S}_{\zeta\zeta}^{(2)} = \int d\hat{t} d^3x N a^3 \left[\frac{\mathcal{G}_S}{N^2} \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\hat{t}} \right)^2 - \frac{\mathcal{F}_S}{a^2} \left(\vec{\nabla}\zeta \right)^2 \right], \quad (80a)$$

$$\mathcal{S}_{hh}^{(2)} = \int d\hat{t} d^3x \frac{N a^3}{8} \left[\frac{\mathcal{G}_T}{N^2} \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial\hat{t}} \right)^2 - \frac{\mathcal{F}_T}{a^2} h_{ij,k} h_{ij,k} \right]. \quad (80b)$$

Явные выражения для коэффициентов \mathcal{G}_S , \mathcal{F}_S , \mathcal{G}_T , и \mathcal{F}_T в общем случае модели типа (74), а также уравнения для фона собраны в приложении E.

4.1.2 Степенное сжатие

Чтобы построить Вселенную с отскоком на ранних временах (??), мы выбираем следующую форму [83] функций Лагранжа в (74) т.е. при $t \rightarrow -\infty$ функции ведут себя следующим образом

$$A_2(\hat{t}, N) = \hat{g}(-\hat{t})^{-2\mu-2} \cdot a_2(N), \quad (81a)$$

$$A_3(\hat{t}, N) = \hat{g}(-\hat{t})^{-2\mu-1} \cdot a_3(N), \quad (81b)$$

$$A_4 = A_4(\hat{t}) = -B_4(\hat{t}) = -\frac{\hat{g}}{2}(-\hat{t})^{-2\mu}, \quad (81c)$$

где \hat{g} - некоторая положительная константа. Тогда уравнения для фонового решения (Е.1), принимают следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{(Na_2)_N}{(-\hat{t})^2} + \frac{3Na_{3N}H}{(-\hat{t})} + 3H^2 &= 0, \\ \frac{a_2}{(-\hat{t})^2} + 3H^2 - \frac{1}{N} \left[\frac{(2\mu + 1)a_3}{(-\hat{t})^2} - \frac{4\mu H}{(-\hat{t})} - 2\frac{dH}{d\hat{t}} + \frac{a_{3N}}{(-\hat{t})} \frac{dN}{d\hat{t}} \right] &= 0, \end{aligned}$$

где H - физический параметр Хаббла. Мы используем *анзац*

$$N = \text{const}, \quad a = d(-t)^\chi, \quad (83)$$

где $\chi > 0$ - константа, а $t = N\hat{t}$ - космическое время, так что $H = \chi/t$, и находим алгебраическое уравнения для N и χ :

$$(Na_2)_N - 3\chi a_{3N} + 3\frac{\chi^2}{N^2} = 0, \quad (84a)$$

$$a_2 - \frac{1}{N}(2\mu + 1)\left(a_3 + 2\frac{\chi}{N}\right) + 3\frac{\chi^2}{N^2} = 0. \quad (84b)$$

В дальнейшем мы предполагаем, что эти уравнения имеют решение с $N > 0$ и $1 > \chi > 0$ (причина требования $\chi < 1$ вскоре станет ясна, смотрите также уравнение (??)).

Давайте подчеркнем, что форма функций Лагранжа (81), а также все обсуждение в этой статье относятся только к ранней стадии сжатия. Чтобы получить сам отскок, а также последующую стадию расширения, необходимо использовать более сложные лагранжевы функции, которые могут быть получены, например, с помощью процедуры сшивки, описанной в работе [83]. Наблюдение из работы [?] заключается в том, что нахождение стабильных моделей с отскоком, при заданной асимптотикой на ранних временах с "сильной гравитацией в прошлом" относительно проста. В этой статье мы не ставим своей целью построение полных космологических моделей и рассматриваем только ранние времена т.е. те времена, на которых происходит генерация космологических возмущений.

Коэффициенты, входящие в квадратичные действия (80) для возмущений вычисляются простым способом с использованием общих выражений (Е.2), (Е.3).

В дальнейшем удобно работать в космическом времени $t = N \text{hatt}$ и записывать квадратичные действия в удобных формах (здесь и далее точка обозначает производную по космическому времени t).

$$\mathcal{S}_{hh} = \int dt d^3x \frac{a^3}{8} \left[\mathcal{G}_T \dot{h}_{ij}^2 - \frac{\mathcal{F}_T}{a^2} h_{ij,k} h_{ij,k} \right], \quad (85a)$$

$$\mathcal{S}_{\zeta\zeta} = \int dt d^3x a^3 \left[\mathcal{G}_S \dot{\zeta}^2 - \frac{\mathcal{F}_S}{a^2} \zeta_{,i} \zeta_{,i} \right]. \quad (85b)$$

Тогда

$$\mathcal{G}_T = \mathcal{F}_T = \frac{g}{(-t)^{2\mu}}, \quad (86)$$

где

$$g = N^{2\mu} \hat{g}, \quad (87)$$

и

$$\mathcal{G}_S = g \frac{g_S}{2(-t)^{2\mu}}, \quad \mathcal{F}_S = g \frac{f_S}{2(-t)^{2\mu}}, \quad (88)$$

с

$$f_S = \frac{2(2 - 4\mu + N^2 a_{3N})}{2\chi - N^2 a_{3N}}, \quad (89a)$$

$$g_S = 2 \left[\frac{2 \left(2N^3 a_{2N} + N^4 a_{2NN} - 3\chi(2\chi + N^3 a_{3NN}) \right)}{(N^2 a_{3N} - 2\chi)^2} + 3 \right], \quad (89b)$$

где $a_{2,3}(N)$ и их производные должны быть вычислены при решении уравнений (84), так что g , f_S и g_S не зависят от времени. Обратите внимание, что распространение тензорных возмущений происходит со скоростью света,

$$u_T^2 = \frac{\mathcal{F}_T}{\mathcal{G}_T} = 1,$$

где скорость звука в скалярном секторе задается формулой

$$u_S^2 = \frac{\mathcal{F}_S}{\mathcal{G}_S} = \frac{f_S}{g_S}, \quad (90)$$

и может быть существенно меньше 1.

Завершая этот раздел, заметим, что конформное преобразование

$$g_{\mu\nu} = \frac{M_P^2}{2B_4} g_{\mu\nu}(E) , \quad (91)$$

где $M_P = (8\pi G)^{-1/2}$ - приведенная планковская масса, преобразующая теорию в систему координат Эйнштейна. В системе Эйнштейна действием является кубический Хорндески, а масштабный коэффициент задается уравнением (??).

4.2 Космологические возмущения

Квадратичные действия для возмущений совпадают (с точностью до фактора $u_S^2 \neq 1$) с действием для тензорных возмущения. Таким образом, космологические возмущения с почти плоским спектром мощности могут генерироваться на ранней эпохе сжатия. Рассмотрим для определенности скалярное возмущение ζ . Оно подчиняется линеаризованному уравнению

$$\ddot{\zeta} + \frac{2\mu - 3\chi}{|t|} \dot{\zeta} + \frac{u_S^2 k^2}{d^2 |t|^{2\chi}} \zeta = 0 , \quad (92)$$

Для $0 < \chi < 1$ мода находится под горизонтом на ранних временах (в том смысле, что $|t|$ больше периода колебаний $d \cdot |t|^\chi / (u_S k)$), таким образом, она адекватно описывается в рамках приближении WKБ . На более поздних временах мода находится за горизонтом; далее мы рассмотрим этот случай

$$2\mu - 3\chi > 0 , \quad (93)$$

в котором мода из-за Хаббловского трения замораживается и выходит за горизонт. Выход из горизонта происходит в момент времени $t_f(k)$, когда

$$\frac{2\mu - 3\chi}{|t_f|} \sim \frac{u_S k}{d |t_f|^\chi} ,$$

т.е.,

$$|t_f|(k) \sim \left[\frac{d}{k} \cdot \frac{(2\mu - 3\chi)}{u_S} \right]^{\frac{1}{1-\chi}} . \quad (94)$$

Таким образом, если параметры теории выбраны следующим образом: $1 > \chi > 0$, $2\mu - 3\chi > 0$, то возмущения генерируются стандартным образом, *при условии, что теория находится в режиме слабой связи на временах, порядка момента выхода моды за горизонт* $|t| \sim |t_f|$.

Давайте также обсудим ограничение, связанное с феноменом Белинского - Халатникова - Лифшица [84–86]. В нашей модели это явление проявляется в поведении тензорных (а также скалярных) мод в режиме за горизонтом в сжимающейся Вселенной: в случае БХЛ одно из двух решений для режима за горизонтом с заданным конформным импульсом растет по мере увеличения t и расходится в формальном пределе $t \rightarrow 0$, в то время как другое решение остается постоянным по времени. Это означает, что Вселенная становится сильно анизотропной и неоднородной в поздние времена, что нежелательно (см., например, работу [87]). Чтобы избежать БХЛ, нужно убедиться, что зависящее от времени решение за горизонтом затухает, а не растет, при увеличении времени t . Уравнение движения для возмущения получено из (85а) с пренебрежением пространственными производными имеет вид:

$$\frac{1}{a^3 \mathcal{G}_T} \frac{d}{dt} \left(a^3 \mathcal{G}_T \dot{h}_{ij} \right) = 0 .$$

Одно из его решений постоянно во времени, в то время как другое является

$$h_{ij} \propto \int dt \frac{1}{a^3 \mathcal{G}_T} \propto (-t)^{2\mu-3\chi+1} .$$

Оно затухает, при

$$2\mu + 1 > 3\chi . \tag{95}$$

Это ограничение гарантирует также отсутствие явления БХЛ для скалярных возмущений. Напомним, что мы выбираем следующие ограничения на параметры $\mu > 1$ и $\chi < 1$ в нашей модели, таким образом, условие (95) обязательно выполняется.

Мы проводим расчеты в приложении F, и здесь мы приводим результаты

для спектров мощности:

$$\mathcal{P}_\zeta \equiv \mathcal{A}_\zeta \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_S-1}, \quad \mathcal{P}_T \equiv \mathcal{A}_T \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_T}, \quad (96)$$

где k_* - обезразмеривающий коэффициент. Наклоны спектров равны

$$n_S - 1 = n_T = 2 \cdot \left(\frac{1 - \mu}{1 - \chi} \right), \quad (97)$$

и амплитуды задаются формулой

$$\mathcal{A}_\zeta = \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{g_S u_S^{2\nu}} \frac{(1 - \chi)^{2\frac{\mu-\chi}{1-\chi}}}{\pi \sin^2(\nu\pi) \Gamma^2(1 - \nu)} \left(\frac{k_*}{2d} \right)^{2\frac{1-\mu}{1-\chi}}, \quad (98a)$$

$$\mathcal{A}_T = \frac{8}{g} \cdot \frac{(1 - \chi)^{2\frac{\mu-\chi}{1-\chi}}}{\pi \sin^2(\nu\pi) \Gamma^2(1 - \nu)} \left(\frac{k_*}{2d} \right)^{2\frac{1-\mu}{1-\chi}}, \quad (98b)$$

где

$$\nu = \frac{1 + 2\mu - 3\chi}{2(1 - \chi)} = \frac{3}{2} + \frac{1 - n_S}{2}. \quad (99)$$

Из уравнения (98) мы находим, что малость скалярной и тензорной амплитуды гарантируется большим значением общего префактора \hat{g} в уравнение (81), и, следовательно, коэффициент g , дается уравнением (87). Кроме того, мы видим из (98), что отношение тензорной амплитуды к скалярной в нашей модели равно

$$r = \frac{\mathcal{A}_T}{\mathcal{A}_\zeta} = 8 \frac{f_S^\nu}{g_S^{\nu-1}} = 8 g_S u_S^{2\nu}. \quad (100)$$

Это показывает, что не так просто получить небольшое значение r , как того требуют наблюдения [24, 88, 89], которые дают

$$r < 0.032.$$

Поскольку $f_S \leq g_S$, необходимо для отсутствия сверхсветовых возмущений, то малость r - отношения требует, чтобы выполнялось $f_S \leq g_S \ll 1$, либо $u_S \ll 1$, либо и то, и другое. Из уравнения (89) ясно, что одновременное выполнение условий $g_S \ll 1$, $f_S \ll 1$ требует сильной тонкой подстройки параметров. Напротив, уравнение (89a) предполагает, что $f_S \ll 1$ при $g_S \sim 1$, и следовательно $u_S^2 \ll 1$ можно достичь лишь посредством небольшой подстройки параметров модели. Мы приводим конкретные примеры в разделе 4.6. Таким

образом, малое отношение тензора к скалярному в нашей модели обусловлено малой скоростью звука скалярных возмущений. Это напоминает ситуацию с к-инфляцией [30, 90, 91], где отношение тензорной амплитуды к скалярной также достигается за счет маленького значения u_S .

Теперь мы обратимся к скалярным и тензорным наклонам спектров, которые заданы уравнением (97). Во-первых, отметим, что два наклона равны друг другу, в отличие от большинства инфляционных моделей. Во-вторых, мы обращаем внимание на то, что приближительная плоскостность спектров обеспечивается в нашей модели выбором $\mu \approx 1$, в то время как слегка красный спектр Λ CDM (??) получается в случае

$$\mu > 1 .$$

Как мы обсудим ниже, малое значение r - отношения, особенно в случае $\mu > 1$, является нетривиальным с точки зрения проблемы сильной связи. Прежде чем перейти к вопросу о сильной связи, давайте обсудим плоскостность спектра для возмущений.

4.3 Плоскостность спектров и масштабная инвариантность

Плоскостность спектров для возмущений при $\mu = 1$ не случайна: модель с $\mu = 1$ инвариантна относительно масштабных преобразований. Давайте посмотрим на это в явном виде.

Сразу бросается в глаза, что при $\mu = 1$ действие в ADM формализме (74) с функциями Лагранжа, заданными (81), инвариантно относительно масштабного преобразования

$$\hat{t} = \lambda \hat{t}' , \quad x^i = \lambda x'^i , \quad (N, N_i, \gamma_{ij})(x^i, \hat{t}) = (N', N'_i, \gamma'_{ij})(x'^i, \hat{t}') , \quad (101)$$

с $\lambda = \text{const}$. Однако в ADM формализме это несколько туманный момент. Чтобы прояснить его, мы переходим к ковариантному формализму. С этой целью

мы определяем поле ϕ без потери общности таким образом, что

$$-\hat{t} = e^{-\phi} .$$

Тогда уравнение (76) приводит к

$$N = \frac{e^{\phi}}{\sqrt{2X}} , \quad (102)$$

и функции лагранжиана принимают следующий вид

$$A_2 = \hat{g}e^{(2\mu+2)\phi}a_2\left(\frac{e^{\phi}}{\sqrt{2X}}\right) , \quad (103a)$$

$$A_3 = \hat{g}e^{(2\mu+1)\phi}a_3\left(\frac{e^{\phi}}{\sqrt{2X}}\right) , \quad (103b)$$

$$A_4 = -\frac{\hat{g}}{2}e^{2\mu\phi} . \quad (103c)$$

Они определяют функции G_2, G_3, G_4 в соответствии с уравнениями (75) и (77). Мы приводим полные выражения для этих функций G_2, G_3, G_4 и сами вычисления в приложении Н.

Теперь в ковариантном формализме мы определяем масштабное преобразование метрики и скалярного поля,

$$g_{\mu\nu} = \lambda^2 g'_{\mu\nu} , \quad \phi = \phi' - \ln \lambda , \quad (104)$$

тогда $X = \lambda^{-2}X'$. Комбинация в правой части уравнения (102) инвариантна относительно этого преобразования. Теперь просто проверить, что действие (73) с $\mu = 1$ инвариантно относительно масштабного преобразования (104). Это ясно из того факта, что при масштабной трансформации происходят следующие

$$A_2(\phi, X) = \lambda^{-2\mu-2}A_2(\phi', X') , \quad A_3(\phi, X) = \lambda^{-2\mu-1}A_3(\phi', X') , \quad B_4(\phi) = \lambda^{-2\mu}B_4(\phi')$$

и $\square\phi = \lambda^{-2}\square'\phi'$, $R = \lambda^{-2}R'$. Тонкость здесь касается функции F . Ее производная F_X преобразуется как $F_X = \lambda^{2-2\mu}F'_{X'}$, как и должно быть, так что можно было бы подумать, что

$$F = \int F_X dX = \lambda^{-2\mu} \int F'_{X'} dX' = \lambda^{-2\mu} F' .$$

Однако это не совсем верно. F_X определяется уравнением (77) может содержать члены типа $ce^{2\mu\phi}X^{-1}$, т.е., F может содержать член $ce^{2\mu\phi}\ln X$. Затем, после масштабного преобразования, функция F и, следовательно, функции G_2 и G_3 получают логарифмические члены λ ,

$$(G_2)_{log} = -4c\mu X' e^{2\mu\phi} \cdot \lambda^{-2\mu-2} \ln \lambda^{-2}, \quad (G_3)_{log} = -c e^{2\mu\phi} \cdot \lambda^{-2\mu} \ln \lambda^{-2}.$$

Однако их вклад в действие (73) исчезает при интегрирование по частям, точно так же, как в уравнении (78).

4.4 Малое значение r отношения и проблема сильной связи

В этом разделе мы обсуждаем в общих чертах вопрос генерации космологических возмущений в модели Вселенной с отскоком в теории Хордески. Это связано с опасной сильной связью, с одной стороны, и малым значением r - отношения, с другой - особенно для положительного $(\mu - 1)$, как требуется для красного спектра у скалярных возмущений. Используя конкретный пример, мы увидим в разделе 4.6, что проблема может быть преодолена, но в довольно узком диапазоне параметров. Это делает наш механизм особенно интересным и фальсифицируемым.

В этом разделе мы рассматриваем случай $\mu > 1$, как того требует значение Λ CDM красного спектра у скалярных возмущений (??), см. уравнение (??). Наши формулы, однако, справедливы также в случае плоского спектра $\mu = 1$, $n_S = 1$.

Модель с $\mu > 1$ страдает от сильной связи в асимптотическом прошлом, $t \rightarrow -\infty$. Это подробно обсуждалось в работе [83] (также смотрите работу [66, 92, 93]).

Характерной классической энергетический масштаб в степенной модели от-

скока является обратное характерное время эволюции системы,

$$E_{class}(t) = |t|^{-1} .$$

Действительно, как фоновые значения физических величин, так и параметры, управляющие возмущениями, эволюционируют степенным образом и получают изменения порядка единицы на временах $|t|$ (это не относится к масштабному коэффициенту $a(t)$ для случая $\chi \ll 1$, но применимо к параметру Хаббла, поскольку $|\dot{H}/H| \sim |t|^{-1}$). Чтобы увидеть, является ли этот классический энергетический ниже масштаба сильной связи, необходимо оценить энергию сильной связи.

Давайте сначала рассмотрим тензорный сектор модели. Его квадратичное действие задается выражением (85а); важно отметить, что коэффициент $\mathcal{G}_T = \mathcal{F}_T$ стремится к нулю, при $t \rightarrow -\infty$, см. уравнение (86). Кубическое действие имеет вид [94]

$$\mathcal{S}_{hhh}^{(3)} = \int dt a^3 d^3x \left[\frac{\mathcal{F}_T}{4a^2} \left(h_{ik}h_{jl} - \frac{1}{2}h_{ij}h_{kl} \right) h_{ij,kl} \right] . \quad (105)$$

Таким образом, масштаб энергии сильной связи E_{strong} в тензорном секторе определяется поведением \mathcal{F}_T . Чтобы оценить этот масштаб в данный момент времени, сначала отметим, что мы можем изменить масштаб пространственных координат в этот момент времени, чтобы выполнялось следующие

$$a = 1 .$$

Теперь, если масштаб сильной связи E_{strong} намного выше энергии $|t|^{-1}$ классической эволюции и фоновое решение можно рассматривать как медленно изменяющийся, то в данный момент времени естественно ввести канонически нормированное поле $h_{ij}^{(c)}$ следующим образом

$$h_{ij} = \mathcal{G}_T^{-1/2} h_{ij}^{(c)} .$$

Тогда кубический член взаимодействия принимает вид

$$\mathcal{S}_{hhh}^{(3)} = \int dt d^3x \left[\frac{\mathcal{F}_T}{4\mathcal{G}_T^{3/2}} \left(h_{ik}^{(c)} h_{jl}^{(c)} - \frac{1}{2} h_{ij}^{(c)} h_{kl}^{(c)} \right) \partial_k \partial_l h_{ij}^{(c)} \right] .$$

Из размерных соображений масштаб энергии сильной связи оценивается следующим образом

$$E_{strong}^{TTT} \sim \frac{\mathcal{G}_T^{3/2}}{\mathcal{F}_T} = \frac{g^{1/2}}{|t|^\mu}, \quad (106)$$

где мы используем (86). Этот масштаб действительно выше классического энергетического масштаба $H \sim |t|^{-1}$ при условии, что

$$|t|^{2\mu-2} < g. \quad (107)$$

Как было показано в работах [66,83,92,93], это неравенство действительно справедливо при сколь угодно больших $|t|$ в случае $\mu < 1$, но оно не выполняется в асимптотическом прошлом для случая $\mu > 1$, как того требует красный наклон у спектра.

Таким образом, существует потенциальное противоречие между красным наклоном и обоснованностью описания в рамках классической теории поля, т.е. отсутствием сильной связи. Можно по-разному относиться к этой потенциальной проблеме. Во-первых, можно не рассматривать ситуацию на очень ранних этапах эволюции, а рассматривать только эволюцию в эпоху, когда теория слабо связана, в том смысле, что $|t|^{-1} < E_{strong}$. Во-вторых, можно предположить медленное изменение параметра $\mu = \mu(t)$ с $\mu < 1$ в асимптотическом прошлом до $\mu > 1$ в более поздние моменты времени, когда генерируются возмущения. В любом случае, наш расчет спектров в разделе 4.2 применим *при условии, что эволюцию можно описывать посредством WKB приближения и выход за горизонт происходит в режиме слабой связи*. Это означает, что время заморозки мод (94) должно происходить в режиме слабой связи (107) для любого рассматриваемого импульса k .

Фактически, тензорный сектор в этом отношении не представляет какой-либо проблемы. Чтобы убедиться в этом, напомним, что тензорные моды выходят за эффективный горизонт в момент

$$t_f^{(T)}(k) \sim \left(\frac{d}{k}\right)^{\frac{1}{1-\chi}},$$

(см. уравнение (94) с $u_S = 1$ для тензорных мод). Тогда выражение (107) с $t = t_f^{(T)}$ принимает вид

$$\frac{1}{g} \left(\frac{d}{k} \right)^{2\frac{\mu-1}{1-\chi}} \ll 1.$$

Левая часть здесь имеет такой порядок как и тензорная амплитуда \mathcal{A}_T , уравнение (98b), таким образом, отсутствие сильной связи во время выхода за горизонт гарантируется малостью тензорной амплитуды.

Последнее свойство на самом деле очевидно в системе Эйнштейна. Для $\mu > 1$ вселенная в системе Эйнштейна испытывает степенную инфляцию (??). Сильная связь в асимптотике $t \rightarrow -\infty$ ($t_E \rightarrow 0$) интерпретируется как простой факт, что инфляционный параметр Хаббла $H_E \sim t_E^{-1}$ формально превышает M_P при малом t_E . Теперь тензорная амплитуда имеет порядок H_E^2/M_P^2 во время выхода за горизонт; малая амплитуда тензора означает отсутствие сильной связи на этих временах, $H_E \ll M_P$.

В случае $\mu = 1$ условие применимости классического описания не зависит от времени,

$$g \gg 1.$$

Опять же, это условие выполняется автоматически при условии, что тензорная амплитуда (98b) мала.

Ситуация более тонкая в скалярном секторе, поскольку скалярная скорость звука u_S мала, как того требует малое r - отношение (см. уравнение (100)). Чтобы оценить этот новый аспект, мы рассмотрим скалярные возмущения, квадратичное действие которых задается (85b), т.е.,

$$\mathcal{S}_{\zeta\zeta} = \int dt d^3x a^3 \mathcal{G}_S \left[\dot{\zeta}^2 - \frac{u_S^2}{a^2} \zeta_{,i} \zeta_{,i} \right].$$

Далее мы предполагаем, с учетом приведенного выше обсуждения, что g_S в уравнениях. (88), (89b) имеет порядок 1, а малость u_S обусловлена малостью f_S . Кубические члены в действии для ζ вычисляются в работах [80, 81, 95, 96]. Как мы обсудим в разделе 4.5.3, наиболее значимые члены в контексте сильной связи

сводятся всего к одному члену (G.2) в кубическом действии (где мы полагаем, что $a = 1$ за счет масштабного преобразования пространственных координат):

$$\mathcal{S}_{\zeta\zeta\zeta}^{(3)} = \int dt d^3x \Lambda_\zeta \partial^2 \zeta (\partial_i \zeta)^2, \quad (108)$$

с

$$\Lambda_\zeta = \frac{\mathcal{G}_T^3}{4\Theta^2},$$

где $\partial^2 = \partial_i \partial_i$, и Θ задается уравнением (E.4b). В нашей модели (81), мы имеем

$$\Theta = g \frac{\vartheta}{|t|^{2\mu+1}}, \quad \vartheta = \frac{1}{2} N^2 a_{3N} - \chi, \quad (109)$$

Значит,

$$\Lambda_\zeta = g \frac{\lambda_\zeta}{|t|^{2\mu-2}},$$

где⁵

$$\lambda_\zeta = \frac{1}{4\vartheta^2} = O(1), \quad (110)$$

для любых значений u_S , включая $u_S \ll 1$. Чтобы избавиться от скорости звука в квадратичной части действия, мы не только устанавливаем $a = 1$, но и дополнительно масштабируем пространственные координаты, $x^i = u_S y^i$. После введения канонически нормированного поля

$$\zeta^{(c)} = (2\mathcal{G}_S)^{1/2} u_S^{3/2} \zeta,$$

мы получаем квадратичное действие в канонической форме (с эффективной скоростью звука, равной 1), тогда, как кубическое действие принимает вид

$$\mathcal{S}_{\zeta\zeta\zeta}^{(3)} = \int dt d^3y \Lambda_\zeta (2\mathcal{G}_S)^{-3/2} u_S^{-11/2} \partial_y^2 \zeta^{(c)} (\partial_y \zeta^{(c)})^2. \quad (111)$$

Исходя из размерных соображений, масштаб сильной связи определяется

$$(E_{strong}^{\zeta\zeta\zeta})^{-3} \sim \Lambda_\zeta (\mathcal{G}_S)^{-3/2} u_S^{-11/2}.$$

⁵В модели из раздела 4.6 свойство $\lambda_\zeta = O(1)$ выполняется при условии, что χ не очень близок к 1, так и происходит в случае, который мы рассматриваем.

Собирая все факторы и опуская факторы порядка 1, мы получаем

$$E_{strong}^{\zeta\zeta\zeta} \sim \frac{1}{|t|} \left(\frac{g^{1/2} u_S^{11/2}}{|t|^{\mu-1}} \right)^{1/3}. \quad (112)$$

Условие применимости (квази-) классического приближения, $E_{strong} > |t|^{-1}$, теперь имеет вид

$$\left(\frac{g u_S^{11}}{|t|^{2(\mu-1)}} \right)^{1/6} > 1. \quad (113)$$

Для малых u_S оно сильнее, чем условие (107), т.е., уравнение (113) применимо на более поздних временах (эти времена соответствуют меньшему значению значению модуля $|t|$) чем уравнение (107).

Давайте посмотрим, может ли условие (113) выполняться в моменты, когда соответствующая мода выходит за горизонт. Наиболее опасными являются самые длинные моды, т.е. моды с наименьшие $k = k_{min}$. Чтобы получить приближительную оценку, мы берем $k_{min} \approx k_*$ (зависимость от импульса слабая ввиду малого $|n_S - 1|$) и выражаем время выхода (94) при $k = k_*$ через скалярную амплитуду (98а). Мы опускаем коэффициенты порядка 1 и получаем

$$t_f^{2(\mu-1)} \sim g \mathcal{A}_\zeta u_S^3.$$

Далее мы приходим к

$$\left(\frac{g u_S^{11}}{|t_f(k_{min})|^{2(\mu-1)}} \right)^{1/6} \sim \left(\frac{u_S^8}{\mathcal{A}_\zeta} \right)^{1/6} \sim \left(\frac{r^{4/\nu}}{\mathcal{A}_\zeta} \right)^{1/6},$$

где мы используем уравнение. (100) с ν , даваемым выражением (99). Итак, условие (113) с точностью до коэффициентов порядка 1 переходит в

$$\left(\frac{r^{4/\nu}}{\mathcal{A}_\zeta} \right)^{1/6} > 1. \quad (114)$$

Мы видим, что существует результат зависит от двух малых чисел, r и \mathcal{A}_ζ . Для приближительной оценки мы берем $\chi \ll 1$ и $\mu \approx 1$, что согласуется с малым значением $(1 - n_S)$, которое дается выражением (97). Затем $\nu \approx 3/2$. Если мы затем возьмем, в качестве примера случай: $r = 0,02$ и $\mathcal{A}_\zeta \simeq 2 \cdot 10^{-9}$, то в левой

части мы получим числовое значение, приблизительно равное 5, которое подозрительно близко к 1. Урок, который мы извлекаем из этой приблизительной оценки, двоякий. Во-первых, здесь нельзя пренебрегать числовыми коэффициентами "порядка 1". В частности, нужно быть более точным при оценке E_{strong} : вместо наивного размерного анализа необходимо использовать унитарные ограничения. Мы рассматриваем этот момент в общих чертах в разделе 4.5 и применяем результаты к конкретной модели в разделе 4.6. Во-вторых, ясно, что в нашем классе моделей не может быть сколь угодно малого r - отношения; действительно, $r \simeq 0,02$, по-видимому, уже находится на грани допустимости слабосвязанного описания, которое мы используем. Мы обосновываем последнее наблюдение в разделе 4.6 в рамках конкретной модели.

Приведенный выше анализ проводится также в случае $\mu = 1, n_S = 1$. Вместо (113) мы получаем условие отсутствия сильной связи, которое снова не зависит от времени,

$$(gu_S^{11})^{1/6} > 1. \quad (115)$$

с $\nu = 3/2$, что приводит к

$$\left(\frac{r^{8/3}}{\mathcal{A}_\zeta}\right)^{1/6} > 1,$$

который аналогичен (114). Мы уточняем этот качественный аргумент в разделе 4.6.

4.5 Древесная унитарность и масштаб сильной связи

4.5.1 Соотношения унитарности при различных скоростях звука

Квантовый энергетический масштаб сильной связи удобно оценивать, используя унитарные границы для парциальных амплитуд (PWA) при рассеянии $2 \rightarrow 2$ [97–99]. В нашей модели у нас есть девять каналов $2 \rightarrow 2$, которые мы обозначаем как $\alpha\beta$, где $\alpha = (\alpha1, \alpha2)$ и $\beta = (\beta1, \beta2)$ относятся к начальному состоянию

и конечному состоянию соответственно:

$$\alpha 1, \alpha 2 \rightarrow \beta 1, \beta 2 = \zeta \zeta \rightarrow \zeta \zeta , \quad (116a)$$

$$\zeta h \rightarrow \zeta \zeta , \quad \zeta \zeta \rightarrow \zeta h \quad (116b)$$

$$\zeta h \rightarrow \zeta h \quad (116c)$$

$$\zeta \zeta \rightarrow hh , \quad hh \rightarrow \zeta \zeta \quad (116d)$$

$$\zeta h \rightarrow hh , \quad hh \rightarrow \zeta h \quad (116e)$$

$$hh \rightarrow hh . \quad (116f)$$

Дополнительная сложность заключается в том, что возмущения ζ и h имеют разные скорости звука.

В этой ситуации (довольно очевидным) обобщением отношения унитарности PWA является [100]

$$\text{Im } a_{\alpha\beta}^{(l)} = \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma}^{(l)} \frac{g_{\gamma}}{u_{\gamma 1} u_{\gamma 2} (u_{\gamma 1} + u_{\gamma 2})} a_{\gamma\beta}^{(l)*} , \quad (117)$$

где $a_{\alpha\beta}^{(l)}$ является PWA с моментом импульса l и начальным и конечным состояниями α и β соответственно, γ относится к двум частицам в промежуточном состоянии со скоростями звука $u_{\gamma 1}$ и $u_{\gamma 2}$, и $g_{\gamma} = 2$, если эти промежуточные частицы различимы, и $g_{\gamma} = 1$, если эти частицы идентичны.⁶ Мы опустили вклады в правую часть из-за многочастичных промежуточных состояний, поскольку они могут только усилить унитарные ограничения.

После переопределения

$$\tilde{a}_{\alpha\beta}^{(l)} = \left(\frac{g_{\alpha}}{u_{\alpha 1} u_{\alpha 2} (u_{\alpha 1} + u_{\alpha 2})} \right)^{1/2} a_{\alpha\beta}^{(l)} \left(\frac{g_{\beta}}{u_{\beta 1} u_{\beta 2} (u_{\beta 1} + u_{\beta 2})} \right)^{1/2} , \quad (118)$$

мы приходим к знакомой форме соотношения унитарности, которую мы записываем в матричной форме для матрицы $\tilde{a}_{\alpha\beta}^{(l)}$:

$$\text{Im } \tilde{a}^{(l)} = \tilde{a}^{(l)} \tilde{a}^{(l)\dagger} .$$

⁶Уравнение (117) не является наиболее общим соотношением унитарности, но оно справедливо, если правая часть насыщается на древесном уровне. Этого достаточно для наших целей.

Наиболее строгая оценка унитарности на древесном уровне получается для наибольшего собственного значения матрицы $\tilde{a}^{(l)}$ (которая является вещественной и симметричной). Эта оценка имеет вид [101]

$$|\text{максимальное собственное значение } \tilde{a}^{(l)}| \leq \frac{1}{2}.$$

Все эти факты подробно выводятся в работе [100].

4.5.2 Размерный анализ для случая $u_S \ll 1$

Рассматриваемая модель имеет большой параметр u_S^{-1} , который управляет малым отношением тензора к скаляру. Итак, как мы видели, самое раннее время, после которого мы можем доверять нашей модели, зависит от u_S . Я ограничиваюсь кубическим порядком возмущений; ожидая, что более высокие порядки не дадут ничего нового [83, 93]. *Давайте пока проигнорируем тот факт, что $u_S \ll 1$.* Тогда весь лагранжиан, определяемый функциями (81), которые пропорциональны $g(-t)^{-2\mu}$, в то время как единственным другим параметром является t (я игнорирую константы порядка 1). Обратите внимание, что $g(-t)^{-2\mu}$ имеет размерность (масса)². Итак, исходя из размерных соображений, до канонической нормировки полей члены в кубическом лагранжиане имеют следующий схематический вид

$$\frac{g}{|t|^{2\mu}} \cdot (|t|\partial)^n \cdot \partial^2 \cdot \varphi^3,$$

где φ в совокупности обозначает (безразмерные) скалярные и тензорные возмущения, на данном этапе я не различаю временные и пространственные производные.

Переход к канонически нормированным полям $\varphi^{(c)} \sim (g^{1/2}/|t|^\mu)\varphi$, запишем кубический лагранжиан следующим образом

$$\frac{|t|^\mu}{g^{1/2}} \cdot (|t|\partial)^n \cdot \partial^2 \cdot \varphi^{(c)3}. \quad (119)$$

При таком кубическом члене вклад в амплитуду $2 \rightarrow 2$ схематически равен,

$$a^{(l)} \sim \frac{((|t|^\mu/g^{1/2})E^2(E|t|)^n)^2}{E^2} \sim \frac{|t|^{2\mu-2}}{g}(E|t|)^{2n+2},$$

где E является энергией в системе центра масс, а E^2 в знаменателе возникает из-за пропагатора, см. рис. 1. Значит игнорируя тот факт, что $u_S \ll 1$, получаем оценку: (107))

$$|t_{cl}|^{2\mu-2} \sim g . \quad (120)$$

Давайте теперь вновь вернемся к случаю $u_S \ll 1$. Важно отметить, что коэффициенты в кубическом лагранжиане не содержат обратных степеней u_S , поэтому никакого умножения финального ответа на u_S^{-1} не происходит. Обратите внимание, что это не совсем тривиальный факт. Во-первых, теория включает в себя нединамические переменные α, β, N_i^T входящие в (79). Выражения для них $\alpha(\zeta, h_{ij}), \beta(\zeta, h_{ij})$ и $N_i^T(\zeta, h_{ij})$, получаются путем решения уравнений связи, и в принципе, ответ может быть усилен обратными степенями u_S . На самом деле, можно проверить, что это не так.

Тем не менее, перемасштабированные амплитуды $\tilde{a}^{(l)}$ приобретают зависимость от u_S . Теперь схематично амплитуды можно записать следующим образом:

$$\tilde{a}^{(l)} \sim \frac{|t|^{2\mu-2}}{g} (E|t|)^{2n+2} u_S^{-K},$$

где K зависит от процесса. Теперь время начиная с которого теорию можно описывать классической теорией поля определяется выражением

$$|t_{cl}|^{2\mu-2} \sim g u_S^K .$$

Чем больше K , тем меньше $|t_{cl}|$, тем позже система переходит в режим классической теории/слабой связи. Итак, чтобы выяснить фактическое время t_{cl} , мы собираемся искать процессы, чьи амплитуды приводят к вкладам u_S^{-K} с наибольшими значениями K .

В случае $\mu = 1$ условием достоверности классического описания является условие $g u_S^K > 1$, поэтому, опять же, самая строгая оценка на параметры модели получается для наибольшего значения K .

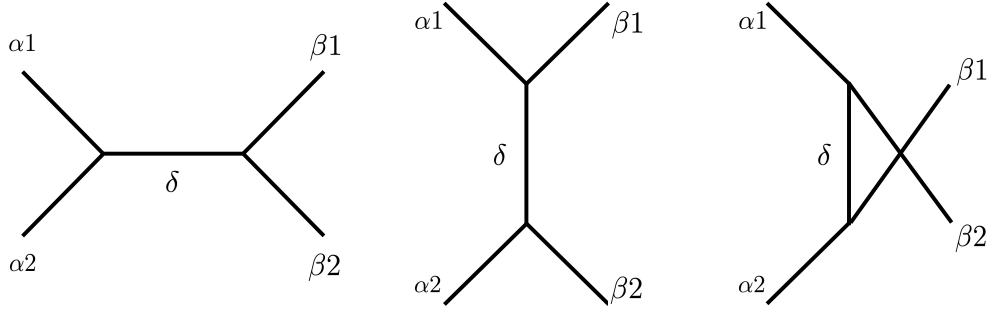


Рис. 1: Древесные диаграммы. Частицы α_1 , α_2 , β_1 , β_2 и δ могут быть скалярными или тензорными.

4.5.3 Иерархия перемасштабированных амплитуд

Давайте рассмотрим древесные диаграммы, показанные на рис. 1.

В нашем классе моделей амплитуды $\tilde{a}_{\alpha\beta}^{(l)}$ с одной и той же энергией E в системе центра масс $\mathbf{p}_{\alpha_1} = -\mathbf{p}_{\alpha_2}$ и различными частицами в начальном, конечном и промежуточном состояниях демонстрируют иерархическую структуру с точки зрения большого параметра u_S^{-1} . Это обусловлено следующими свойствами:

(i) Из-за перемасштабирования амплитуды (118) умножаются на фактор $u_S^{-3/2}$ для двух начальных (или двух конечных) *скалярных* внешних ног; и на фактор $u_S^{-1/2}$ если начальные (или конечные) состояния соответствуют полю ζh ; никакое усиление такого рода не происходит если два начальных (или два конечных) состояния соответствуют тензорным полям.

(ii) Поскольку энергия и импульс *скалярной частицы* связаны через $\omega = u_S p$ (мы оставляем обозначение E для энергии центра масс), пространственный импульс входящего или исходящего скаляра может быть либо порядка $p \sim E/u_S$, либо порядка $p \sim E$. Каждая *пространственная* производная в вершине, действующая на внешнюю ногу ζ дает фактор u_S^{-1} . То же самое наблюдение применимо к внутренней линии ζ в t - и u -каналах.

(iii) Скалярный пропагатор задается формулой

$$S(\omega, p) = \frac{1}{\omega^2 - u_S^2 p^2}.$$

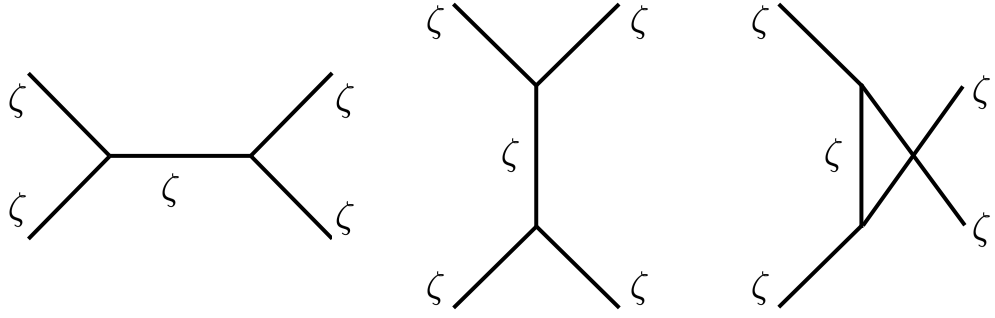


Рис. 2: Скалярные древесные диаграммы: случай (а).

Для случая $\omega = 0$ (t - и/или u -диаграммы, с внутренней линией ζ) это дает фактор u_S^{-2} при условии, что импульс в пропагаторе порядка $p \sim E$.

Отметим, что максимальное число *пространственных* производных в кубической ζ вершине равно 4. В конкретном классе моделей Хордески (73) с $G_5 = 0$, и, кроме того, с $G_4 = G_4(\phi)$, в других вершинах имеется не более 2 *пространственных* производных. Мы выводим этот факт в приложении G. Еще одно полезное наблюдение состоит в том, что для данной энергии в системе центра масс E входящие (исходящие) импульсы имеют порядок $p \sim E/u_S$, если начальными (конечными) частицами являются ζ , в противном случае $p \sim E$.

Теперь я рассмотрю различные каналы и диаграммы отдельно.

(а). Скалярные диаграммы, рис. 2, процес (116а). В этом случае все пространственные импульсы, включая промежуточный импульс на диаграммах в каналах t и u , имеют порядок E/u_S . Следовательно, механизмы (i) и (ii) работают, в то время как механизм (iii) - нет. Максимальное количество пространственных производных в каждой вершине равно 4, диаграмма приводит к фактору

$$u_S^{-3/2} \cdot u_S^{-3/2} \cdot 1 \cdot u_S^{-4} \cdot u_S^{-4} = u_S^{-11},$$

(далее первые два фактора обусловлены механизмом (i), третий множитель обусловлен механизмом (iii) и последние два множителя обусловлены механизмом (ii)).

(b). Для диаграмм со скалярными внешними ветвями и тензорным пропа-

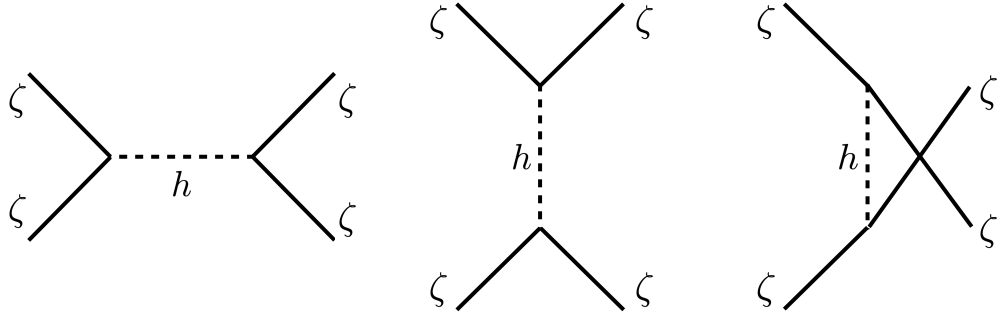


Рис. 3: Древесная диаграмма с ногами ζ и h -пропагатором: случай **(b)**.

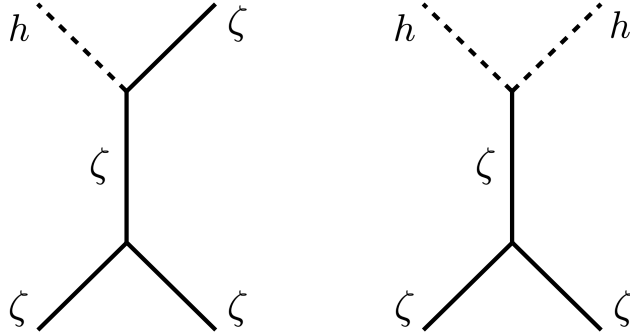


Рис. 4: Древесная t -канальная диаграмма: случай **(c)** (левая) и **(d)** (правая).

гатором, рис. ?? максимальное количество пространственных производных в каждой Вершина $\zeta\zeta h$ равна 2. Следовательно, множитель равен

$$u_S^{-3/2} \cdot u_S^{-3/2} \cdot 1 \cdot u_S^{-2} \cdot u_S^{-2} = u_S^{-7} . \quad (121)$$

Таким образом, этот тип диаграмм дает субдоминантный вклад.

(c). Процесс (116b) с t -канальным обменом частицей ζ , рис. 4, левая диаграмма. Входящие пространственные импульсы имеют порядок E , в то время как исходящие имеют порядок E/u_S . Таким образом, импульс в пропагаторе порядка E/u_S , и механизм (iii) не работает. Это диаграмма дает множитель

$$u_S^{-1/2} \cdot u_S^{-3/2} \cdot 1 \cdot u_S^{-2} \cdot u_S^{-4} = u_S^{-8} , \quad (122)$$

таким образом, этот процесс также является субдоминантным.

(d). Чтобы проиллюстрировать механизм (iii), мы рассмотрим t - канальный процесс (116d) с обменом частицами ζ , рис. 4, правая диаграмма. Про-

пространственные импульсы входящих и исходящих частиц имеют порядок $p \sim E$, пространственная часть импульса в пропагаторе также имеет порядок E , поэтому механизм (ii) не работает. Эта диаграмма приводит к множителю

$$u_S^{-1/2} \cdot u_S^{-1/2} \cdot u_S^{-2} \cdot 1 \cdot 1 = u_S^{-3}, \quad (123)$$

это случай также является субдоминантным.

Другие диаграммы могут быть изучены аналогичным образом, и все они подавлены по сравнению с чисто скалярным процессом **(a)**. Общий аргумент прост. Путем замены одной или нескольких внешних скалярных ног (для случая **(a)**) на тензорные ноги, теряется фактор u_S^{-1} из-за отсутствия механизма (i) и фактор u_S^{-2} из-за отсутствия механизма (ii). В принципе, можно было бы получить коэффициент u_S^{-2} за счет (iii) (мы видели в нашем примере **(c)**, что на самом деле это не так, если заменить только одну скалярную ногу), но в любом случае общее подавление новой диаграммы по крайней мере u_S по сравнению с исходной, чисто скалярной диаграммой⁷. Замена скалярной внутренней линии тензорной линией не улучшает ситуацию, и в конкретном случае **(b)** приводит к субдоминантному результату.

Мы приходим к выводу, что время начиная с которого классическое описание теории применимо t_{cl} связано со скалярным сектором теории. Это означает, в частности, что нет необходимости в поиске наибольшего собственного значения перемасштабированной матрицы PWA \tilde{a} (Sec. 4.5.1). Соответствующими членами в кубическом скалярном действии являются члены с четырьмя *пространственными* производными. При пренебрежении числовыми коэффициентами время t_{cl} действительно определяется из (113),

$$|t_{cl}|^{2\mu-2} \sim gu_S^{11},$$

для случая $\mu = 1$ условием является $gu_S^{11} > 1$. Чтобы уточнить эти оценки, мы

⁷На самом деле подавление всегда еще сильнее см. (121), (122), (123). Более того, в смешанных секторах некоторые вершины в кубическом действии сами по себе подавляются положительными степенями u_S , что приводит к еще более сильному подавлению вкладов в амплитуды.

выполняем точный расчет доминирующих амплитуд в скалярном секторе.

4.5.4 Масштаб сильной связи от унитарных ограничений на древесном уровне

Теперь мы готовы выполнить расчет энергии сильной связи, из оценки унитарности на древесном уровне. (вне массовой поверхности) кубическое действие с 4 пространственными производными в скалярном секторе задается (108). Мы продолжаем использовать подход, описанный в разделе 4.5.3, полагая $a = 1$, как и раньше, и работаем с полем $\tilde{\zeta} = (2\mathcal{G}_S)^{-1/2}\zeta$, которое имеет канонический кинетический член, и градиентный член со скоростью звука u_S . Тогда кубическое действие имеет вид

$$\mathcal{S}_{\zeta\zeta\zeta}^{(3)} = \int dt d^3x \tilde{\Lambda}_\zeta \partial^2 \tilde{\zeta} (\partial \tilde{\zeta})^2,$$

где

$$\tilde{\Lambda}_\zeta = (2\mathcal{G}_S)^{-3/2} \Lambda_\zeta = \frac{\lambda_\zeta |t|^\mu}{g_S^{3/2} g^{1/2}} \cdot |t|^2.$$

Теперь несложно вычислить $2 \rightarrow 2$ матричный элемент $M(\cos \theta, E)$ как функцию угла рассеяния θ и энергии в системе центра масс E . Мы получаем

$$M = \frac{E^6}{4u_S^8} (1 - \cos^2 \theta) \tilde{\Lambda}_\zeta^2,$$

(источником зависимости от u_S является механизм (ii) из раздела 4.5.3). Теперь я запишу перемасштабированные парциальные амплитуды

$$\tilde{a}^{(l)} = \frac{1}{2u_S^3} \cdot \frac{1}{32\pi} \int d(\cos \theta) P_l(\cos \theta) M,$$

где P_l - многочлены Лежандра, коэффициент $(2u_S^3)^{-1}$ получается из переопределения (118) (т.е. это связано с механизмом (i) из раздела 4.5.3), и получаем

$$\begin{aligned} \tilde{a}^{(0)} &= \frac{\tilde{\Lambda}_\zeta^2 E^6}{192\pi u_S^{11}}, \\ \tilde{a}^{(2)} &= -\frac{\tilde{\Lambda}_\zeta^2 E^6}{960\pi u_S^{11}}. \end{aligned}$$

Наименьшая энергия сильной связи определяется s -канальной амплитудой. Это насыщает унитарную границу $|\tilde{a}^{(0)}| \leq 1/2$ на энергии

$$E_{strong}(t) = \left(\frac{96\pi u_S^{11}}{\tilde{\Lambda}^2} \right)^{1/6} = \frac{(96\pi)^{1/6}}{|t|} \left(\frac{g_S^3 g u_S^{11}}{\lambda_\zeta^2 |t|^{2\mu-2}} \right)^{1/6}.$$

Это уточняет оценку (112). Действуя, также как и в разделе 4.4, мы вычисляем отношение квантового и классического энергетического масштаба в момент времени, когда мода $k_* \approx k_{min}$ выходит за эффективный горизонт:

$$\frac{E_{strong}(t_f(k_*))}{E_{class}(t_f(k_*))} \equiv \frac{E_{strong}(k_*)}{E_{class}(k_*)} = E_{strong}(t_f(k_*)) \cdot |t_f(k_*)| = C \cdot \left(\frac{u_S^8}{\mathcal{A}_\zeta} \right)^{1/6}, \quad (125)$$

где

$$C = \frac{96^{1/6} g_S^{1/3}}{|\lambda_\zeta|^{1/3}} \left(\frac{2^{2\frac{\mu-1}{1-\chi}} (1-\chi)^{2\frac{\mu-\chi}{1-\chi}} (2\mu-3\chi)^{2\frac{1-\mu}{1-\chi}}}{\Gamma^2(1-\nu) \sin^2(\nu\pi)} \right)^{1/6}. \quad (126)$$

Это результат верен и для общих моделей из класса (81). В случае $\mu = 1$, $n_S = 1$ (и, следовательно, $\nu = 3/2$) я прихожу к

$$C = \frac{96^{1/6} g_S^{1/3}}{|\lambda_\zeta|^{1/3}} \left(\frac{(1-\chi)^2}{4\pi} \right)^{1/6}.$$

Результат (125) зависит довольно сложным образом, через параметры χ , g_S и λ_ζ , как от формы функций лагранжиана ($a_2(N)$ и $a_3(N)$ из выражения (81)) также и от решения уравнений движения, (84). Чтобы получить представление о том, какие ограничения дает условия отсутствия сильной связи на выходе моды за горизонт, мы теперь обратимся к конкретным примерам.

4.6 Примеры

4.6.1 $\mu > 1$, $n_S < 1$

В этом разделе мы рассмотрим конкретную модель типа (81) с простыми формами функций лагранжиана:

$$a_2(N) = c_2 + \frac{d_2}{N}, \quad (127a)$$

$$a_3(N) = c_3 + \frac{d_3}{N}, \quad (127b)$$

где c_2, c_3, d_2, d_3 , безразмерные константы. Используя уравнение (89), я получаю

$$f_S = -2 \left(\frac{4\mu - 2 + d_3}{2\chi + d_3} \right) ,$$

$$g_S = \frac{6d_3^2}{(2\chi + d_3)^2} .$$

В соответствии с нашим обсуждением в разделе 4.2, можно обнаружить, что единственный способ получить малое тензорное отношение к скалярному (100) - это гарантировать, что $f_S \ll 1$ и $g_S \sim 1$, так что $u_S^2 = f_S/g_S \ll 1$. Я начинаю со случая $\mu > 1$, который соответствует $n_S < 1$ в соответствии, и гарантируем малое значение u_S .

$$d_3 = -2 .$$

Этот выбор кажется довольно примечательным, но пока не ясно, может ли он быть следствием какой-то симметрии или динамического принципа. В любом случае, с этим выбором я прихожу к выражению

$$f_S = \frac{4(\mu - 1)}{1 - \chi} = 2(1 - n_S) ,$$

$$g_S = \frac{6}{(1 - \chi)^2} ,$$

где мы используем уравнение (97). Интересно, что малое тензорное отношение к скалярному $r \sim f_S^\nu/g_S^{\nu-1}$ и малый скалярный наклон $(1 - n_S)$ теперь управляются одним и тем же малым параметром $(\mu - 1)$.

Используя $d_3 = -2$, мы обнаруживаем, что уравнения для фонового решения имеют относительно простую форму. Это алгебраические уравнения:

$$3\chi^2 - 6\chi + c_2 N^2 = 0 ,$$

$$3\chi^2 + 2(2\mu + 1)(1 - \chi) - \kappa N + c_2 N^2 = 0 ,$$

где

$$\kappa = c_3(1 + 2\mu) - d_2 . \tag{131}$$

Соответствующим решением этих уравнений является (второе решение не стабильно)

$$\chi = \frac{3 + 8\rho(\mu - 1)(2\mu + 1) - \sqrt{9 - 12\rho(2\mu + 1)(5 - 2\mu)}}{3 + 16\rho(\mu - 1)^2}, \quad (132a)$$

$$N = \frac{2}{\kappa} [1 + 2\mu - 2(\mu - 1)\chi], \quad (132b)$$

где

$$\rho = \frac{c_2}{\kappa^2}. \quad (133)$$

Хотя выражение для N не имеет особого физического значения (единственное требование состоит в том, чтобы $N > 0$), значение χ является важной характеристикой решения. Обратите внимание, что в то время как N зависит от c_2 и κ отдельно, параметр χ зависит (для данного μ) от одной комбинации ρ состоящий из трех параметров модели. Далее мы увидим, что μ и ρ (или, что эквивалентно, χ) это единственные параметры, от которых зависит масштаб стальной связи.

Для малых и положительных значений $(\mu - 1)$ допустимый диапазон параметров равен

$$\kappa > 0, \quad 0 < \rho \lesssim \frac{2}{27}. \quad (134)$$

Эти соотношения гарантируют, что $N > 0$ и, что важно, $2\mu - 3\chi > 0$, см. (93).

Теперь я располагаю явными формулами, позволяющими увидеть, какой диапазон r - отношения согласуется с расчетами слабой связи. Я получаю из (109), (110)

$$\theta = 1 - \chi, \quad (135a)$$

$$\lambda_\zeta = \frac{1}{4(1 - \chi)^2}, \quad (135b)$$

в то время как параметр ν по-прежнему задается с помощью (99). Помимо зависимости от μ , эти параметры снова зависят только от ρ .

Я выражаю параметр μ через n_S и χ , используя (97). Тогда остается единственный свободный параметр χ (или, что эквивалентно, ρ). Окончательные формулы

получены из (100) и (125) имеют вид:

$$r = 48(1 - \chi)^{2(\nu-1)} \left(\frac{1 - n_S}{3} \right)^\nu,$$

$$\frac{E_{strong}(k_*)}{E_{class}(k_*)} = E_{strong}(t_f(k_*)) \cdot |t_f(k_*)| = \tilde{C} \cdot \left(\frac{r^{4/\nu}}{\mathcal{A}_\zeta} \right)^{1/6},$$

где $\nu = 2 - n_S/2$ и

$$\tilde{C} = \frac{C}{(8g_S)^{2/3\nu}},$$

где C дается выражением (126), значит

$$\tilde{C} = 2^{\frac{12-11n_S}{24-6n_S}} 3^{\frac{4-3n_S}{24-6n_S}} (1 - \chi)^{\frac{12-n_S}{3(4-n_S)}}$$

$$\left(\frac{(2 - 2\chi)^{1-n_S} \left(2 + (1 - n_S) - \chi(3 + (1 - n_S)) \right)^{-(1-n_S)}}{\Gamma^2\left(\frac{n_S}{2} - 1\right) \sin^2 \left[\left(2 - \frac{n_S}{2}\right) \pi \right]} \right)^{1/6}$$

$$\approx \frac{3^{1/18} (1 - \chi)^{11/9}}{2^{5/18} \pi^{1/6}} = 0.7 \cdot (1 - \chi)^{11/9},$$

где мы используем, что $n_S \approx 1$ в последних двух выражениях. На рис. 5 я показываю r -отношение и соотношение $E_{strong}(k_*)/E_{cl}(k_*)$ как функции χ для центрального наблюдаемого значения из Λ CDM

$n_S = 0,9649$. Основная мысль заключается в том, что значение r ограничено снизу в нашей модели, $r > 0,018$ для $n_S = 0,9649$, даже для случая $E_{strong}(k_*)/E_{cl}(k_*) > 1$. Обратите внимание, что параметры должны соответствовать $(2\mu - 3\chi) > 0$, что приводит к

$$\chi < \frac{3 - n_S}{4 - n_S} \approx \frac{2}{3}. \quad (136)$$

Это ограничение также показано на 5.

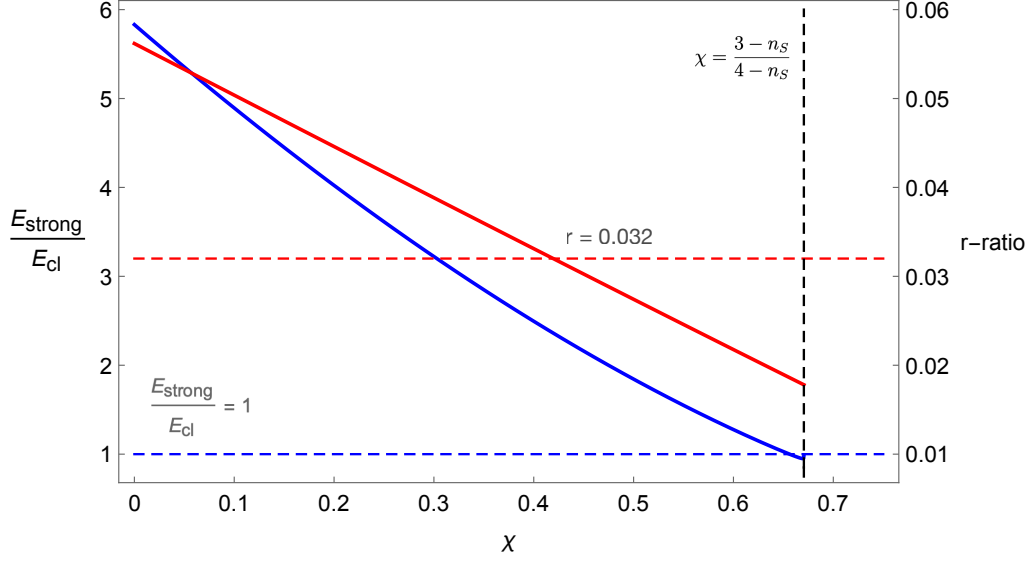


Рис. 5: Отношение $E_{strong}(k_*)/E_{cl}(k_*)$ (синия линия) и r -отношение (красная линия) как функции χ для центрального значения $n_s = 0.9649$. Разрешенная граница на $r < 0.032$ и унитарное ограничение $E_{strong}(k_*)/E_{cl}(k_*) > 1$ ограничивают пространство параметров правой нижней частью рисунка.

На рисунке 6 я показываю, что произойдет, если скалярный спектр n_s будет изменяться в пределах допустимого региона. Следует отметить, что во всем допустимом диапазоне параметр r довольно велик, $r > 0,015$, в то время как масштаб сильной связи всегда близок к классической энергетической шкале, $E_{strong} \lesssim 3E_{cl}$. Мы приходим к выводу, что наша простая модель может быть легко закрыта новыми экспериментальными данными на значение r - отношения.

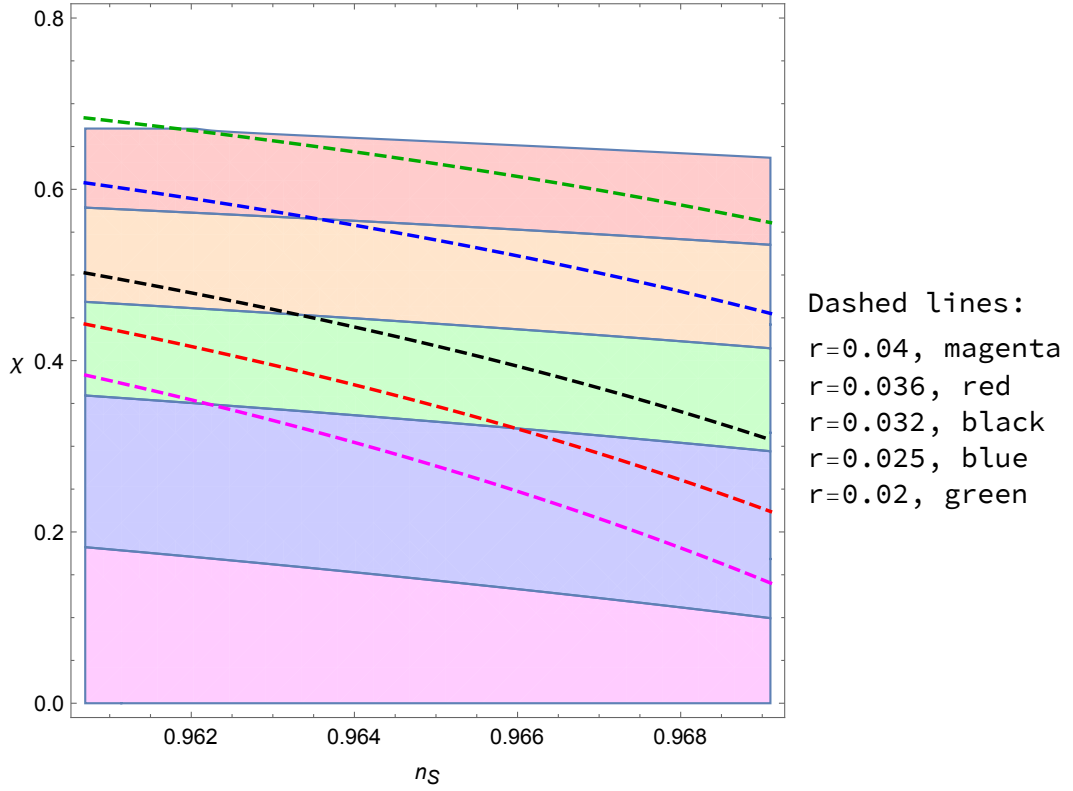


Рис. 6: Пространство параметров n_s и χ . Цветные полосы соответствуют различным отношениям энергии сильной связи к классической энергии: $1 < E_{strong}(k_*)/E_{cl}(k_*) < 1.5$ (красный), $1.5 < E_{strong}(k_*)/E_{cl}(k_*) < 2.2$ (оранжевый), $2.2 < E_{strong}(k_*)/E_{cl}(k_*) < 3$ (зеленый), $3 < E_{strong}(k_*)/E_{cl}(k_*) < 4.5$ (синий), $4.5 < E_{strong}(k_*)/E_{cl}(k_*)$ (маджента). Пунктирными линиями показано отношение r - отношение: $r = 0.02$ (зеленой), $r = 0.025$ (синий), $r = 0.032$ (черный), $r = 0.036$ (красный), and $r = 0.04$ (маджента).

Выбирая подходящие значения (χ, n_s) , сразу же получаем конкретную форму масштабного фактора (83) и параметра Хаббла $H = \chi/t$ в системе Джордана для стадии сжатия. Например, $a(t)/d$ и H для $\chi = 0,4$, $n_s = 0,967$ (т.е. для $\mu = 1,0099$) показаны на рис. 7. Также интересно найти соответствующий параметр Хаббла в системе Эйнштейна. Параметр Хаббла в системе Эйнштейна равен

$$H_E \equiv \frac{1}{a_E} \frac{da_E}{dt_E} = \left(\frac{\mu - \chi}{\mu - 1} \right) \frac{1}{t_E}.$$

Эти масштабный фактор и параметр Хаббла с $\chi = 0,4$ и $n_s = 0,967$ ($\mu = 1,0099$) в системе Эйнштейна показаны на рис. 8.

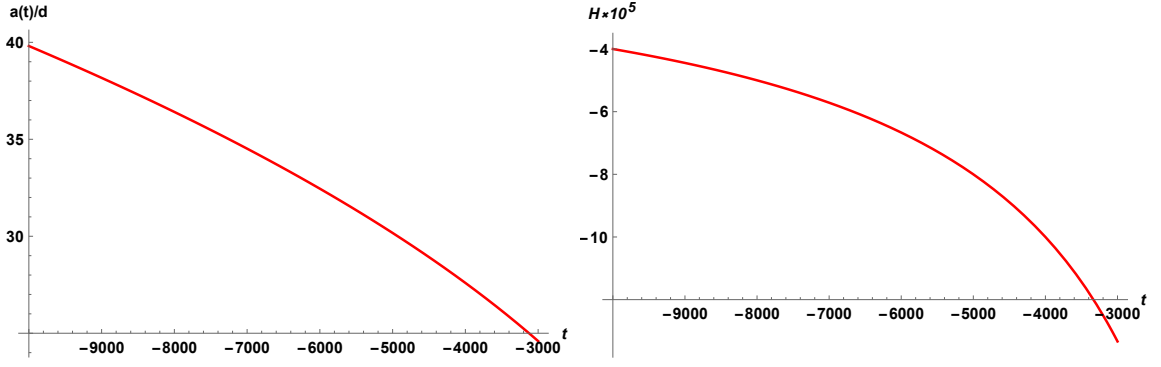


Рис. 7: Масштабный фактор $a(t)$, деленный на d (левый график), и параметр Хаббла $H(t)$ (правый график) в системе Джордана для модели с $\chi = 0.4$, $n_S = 0.967$ (и при $\mu = 1.0099$).

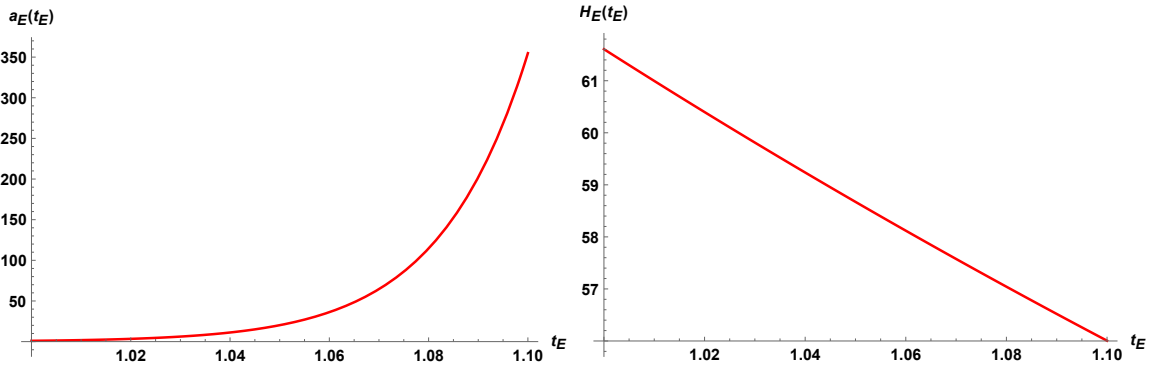


Рис. 8: Масштабный фактор $a_E(t_E)$ (левый график) и параметр Хаббла $H_E(t_E)$ (правый график) в системе Эйнштейна в модели с $\chi = 0.4$, $n_S = 0.967$ (и $\mu = 1.0099$).

Наконец, в приложении J я привожу явный численный пример стабильной эволюции, где сжатие описанное в этом раздела заканчивается и начинается расширение (отскок), затем Вселенная переходит на стадию первичного разогрева в будущем. В этой модели действие Эйнштейна-Гильберта для гравитации восстанавливается на стадии первичного разогрева, и, таким образом, все фоновые величины, такие как энергетические масштабы, параметр Хаббла, могут быть рассчитаны обычным способом. Аналогичная процедура была выполнена в работе [83], где различные модели Вселенной с отскоком и генезиса переходят в общую теорию относительности с обычным безмассовым скалярным полем, которое управляет расширением Вселенной в будущем. Предполагается, что

эта эпоха заканчивается повторным разогревом Вселенной, например, с помощью одного из механизмов описанных в работах [13, 102]. Я также показываю на конкретном численном примере (в том же приложении J), что предлагаемая эволюция физически релевантна, поскольку можно добиться около 60 e -фолдов сжатия, так что длина волны первичных флуктуаций растягивается на 60 масштабов Хаббла в конце фазы сжатия.

4.6.2 $\mu = 1, n_S = 1$

Теперь рассмотрим случай $\mu = 1, n_S = 1$, согласующийся с ранней идеей темной энергии из работ [103, 104]. Наша модель по-прежнему определяется функциями (127), с $\mu = 1$. В отличие от раздела 4.6.1, здесь гарантируется, что $f_S \ll 1$, и, следовательно, скалярная скорость звука мала, выбрав

$$d_3 = -2 + \epsilon, \quad \epsilon \ll 1.$$

Тогда

$$f_S = \frac{2\epsilon}{2 - 2\chi - \epsilon},$$

$$g_S = \frac{6(2 - \epsilon)^2}{(2 - 2\chi - \epsilon)^2},$$

с θ и λ_ζ даваемых выражениями (135). Также $\epsilon > 0$, так как $f_S > 0$.

Фоновые уравнения движения снова являются алгебраическими, и их решение таково

$$\chi = \frac{(2 - \epsilon) \left(1 + 6\epsilon\rho - \sqrt{1 - 12(1 - \epsilon)\rho} \right)}{2(1 + 3\epsilon^2\rho)},$$

$$N = \frac{3(2 - \epsilon) \left(2 - \epsilon(1 - \sqrt{1 - 12(1 - \epsilon)\rho}) \right)}{2\kappa(1 + 3\epsilon^2\rho)},$$

с $\kappa = 3c_3 - d_2$, $\rho = c_2/\kappa^2$. Для данного ϵ мы снова можем заменить параметр ρ на χ , следовательно, двумя соответствующими параметрами теперь являются χ и ϵ . Располагая всеми приведенными выше формулами, становится понятен,

какой диапазон r -отношения согласуется с режимом слабой связи. Вспоминая (100) and (125), и выбирая $\nu = 3/2$ находим

$$r = \frac{16\epsilon^{3/2}}{[3(2 - 2\chi - \epsilon)]^{1/2}(2 - \epsilon)},$$

$$\frac{E_{strong}}{E_{class}} = \tilde{B} \cdot \left(\frac{r^{8/3}}{\mathcal{A}_\zeta} \right)^{1/6},$$

где коэффициент \tilde{B} дается выражением

$$\tilde{B} = 6^{1/18}(1 - \chi) \left(\frac{[\frac{2-2\chi-\epsilon}{2-\epsilon}]^{4/3}}{4\pi} \right)^{1/6} = 0.7 \cdot (1 - \chi) \left(\frac{2 - 2\chi - \epsilon}{2 - \epsilon} \right)^{2/9}.$$

На рис. ?? показываються $\frac{E_{strong}}{E_{class}}$ и r на плоскости двух параметров ϵ и χ . Можно заметить, что в модели с $\mu = 1$ легче получить малое отношение тензорной амплитуды к скалярной, при условии, что генерация возмущений происходит в режиме слабой связи. Тем не менее, значение r - отношение не может быть намного меньше 0,01, в противном случае можно было бы столкнуться с проблемой сильной связи.

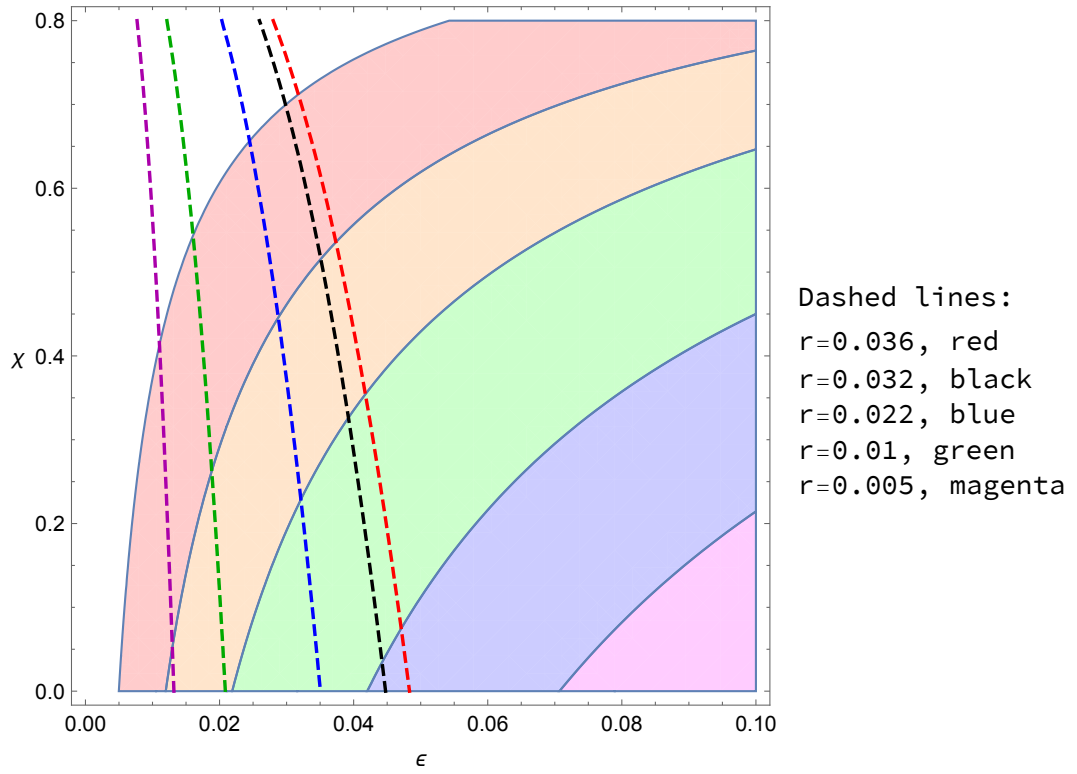


Рис. 9: Пространство параметров для ϵ и χ в случае $\mu = 1$. Цветные полосы соответствуют различным отношениям масштаба сильной связи к классическому масштабу: $1 < E_{strong}/E_{cl} < 1.8$ (красный), $1.8 < E_{strong}/E_{cl} < 2.7$ (оранжевый), $2.7 < E_{strong}/E_{cl} < 4.2$ (зеленый), $4.2 < E_{strong}/E_{cl} < 6$ (синий), $6 < E_{strong}/E_{cl}$ (маджента). Пунктирными линиями показано r - отношение: $r = 0.005$ (маджента), $r = 0.01$ (зеленый), $r = 0.022$ (синий), $r = 0.032$ (черный), and $r = 0.036$ (красный).

Наконец, выбрав подходящее значение χ в этом случае, можно легко найти масштабный фактор (83) и параметра Хаббла $H = \chi/t$ в системе Джордана. Например, $a(t)/d$ и H для $\chi = 0.1$ показаны на рис. 10.

Здесь мы также приводим масштабный фактор и параметр Хаббла в системе Эйнштейна

$$a_E = \frac{g_1}{(1-\chi)} d^{1/\chi} e^{(1-\chi) \frac{t_E}{g_1}},$$

$$H_E = \frac{da_E}{a_E dt_E} = \frac{1-\chi}{g_1},$$

с $g_1 \equiv \frac{\sqrt{g}}{M_{Pl}}$ и t_E является космическим временем в системе Эйнштейна. Все свя-

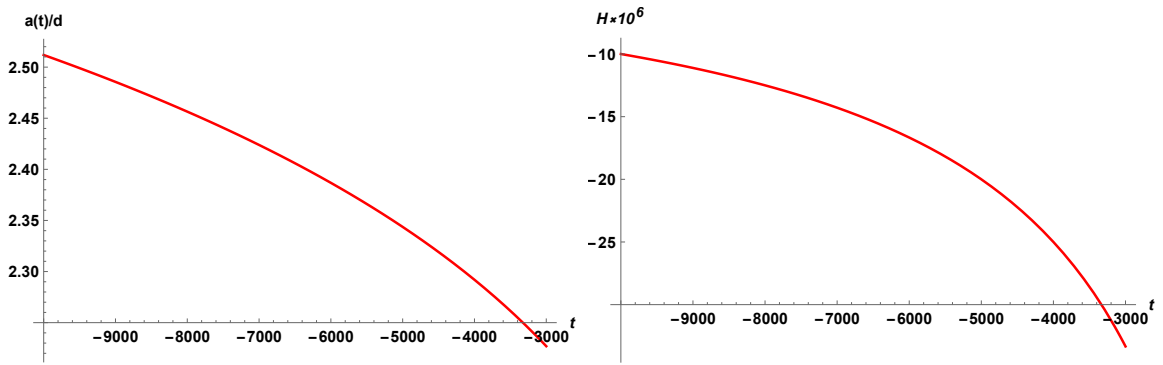


Рис. 10: Масштабный фактор $a(t)$, деленный на d (левый график), и параметр Хаббла $H(t)$ (правый график) в системе Джордана в модели с $\chi = 0.1$, $n_S = 1$, и $\mu = 1$.

занные вычисления этих масштабных факторов и параметра Хаббла в системе Эйнштейна обсуждаются в приложении I. Масштабный фактор в системе Эйнштейна (с точностью до множителя) с выбранным $\chi = 0.1$ показан на рис. 11.

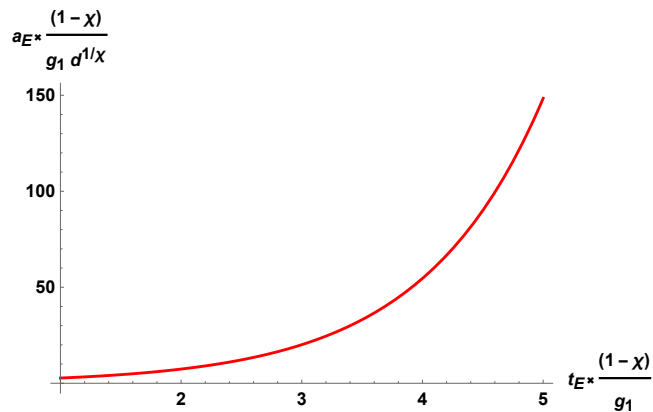


Рис. 11: Масштабный фактор $a_E(t_E)$ (с точностью до множителя) в системе Эйнштейна в модели с $\chi = 0.1$, $n_S = 1$, и $\mu = 1$.

4.7 Основные результаты

В данном разделе изучались, в рамках теории Хорндески, космологическую стадию сжатия, которая впоследствии может перейти через отскок к реалистичному космологическому расширению, как подробно обсуждается, например, в работе [83]. Этот этап способен обеспечить экспериментально согласован-

ный скалярный спектр мощности и достаточно малое отношение r - отношение. Малое значение $(1 - n_S)$ получается за счет небольшой подстройки параметров модели, в то время как малое r требует малой скалярной скорости звука, $r \sim u_S^3$. Последнее свойство находится в потенциальном противоречии с требованием слабой связи во время генерации скалярных возмущений: малые u_S увеличивают парциальные амплитуды и изменяют соотношение унитарности, которое нарушается при энергиях, опасно близких к энергетическому масштабу классической эволюции. Таким образом, очень малые значения r невозможны в данном классе моделей.

В то время как мотивация проистекает из интереса к построению полных, свободных от сингулярностей космологий, начальная стадия Вселенной с отскоком конформно эквивалентна быстро расширяющейся Вселенной, и, действительно, красный спектр получается в модели, конформно эквивалентной G -инфляции [17]. Это наблюдение важности проблемы квантовой сильной связи может иметь отношение к моделям G -инфляции и, возможно, также к инфляции.

Заключение

В диссертации изучались теории со старшими производными и их применение к построению космологических решений без начальной сингулярности. Одним из важных вопросов при построении несингулярных сценариев является вопрос самосогласованности классического описания на ранних этапах эволюции Вселенной.

Также были построены векторные аналоги теории Хорндески. Для этих новых моделей была исследована возможность существования устойчивого фонового решения, нарушающего NEC, а также на основе этих моделей была построена начальная стадия космологического генезиса.

Был разработан метод, который позволяет оценить масштаб сильной свя-

зи во всех порядках по теории возмущений. Данный метод был применен для сценария генезиса, построенного в рамках теории Хорндески.

Также в диссертации были изучены, в рамках теории Хорндески, космологическая стадия, которая впоследствии, через стадию отскока, переходит к реалистичному космологическому расширению. Было обнаружено, что этот этап способен обеспечить экспериментально согласованный скалярный спектр и достаточно малое тензорно-скалярное r - отношение. В построенной модели малое значение r - отношения требует малой скалярной скорости звука. Последнее свойство находится в потенциальном противоречии с требованием слабой связи во время генерации скалярных возмущений. Таким образом, очень малые значения r - отношения недостижимы для построенной модели. Это свойство иллюстрируется на численных примерах, которые были построены в рамках теории Хорндески.

Получены следующие результаты:

1. Построены новые модели, содержащие векторные поля. Данные модели являются аналогами обобщенных галилеонов и представляют интерес для построения различных космологических сценариев. Также в рамках данной модели возможно существование фоновых решений, которые стабильны, несмотря на отсутствие калибровочной инвариантности. Некоторые из этих фоновых решений нарушают нулевое условие энергодоминантности.
2. В рамках класса моделей с векторными аналогами обобщенных галилеонов построена ранняя стадия космологического генезиса, для которой фоновое решение является устойчивым и находится вне режима сильной связи.
3. Для модели космологического генезиса с сильной гравитацией в прошлом проведен анализ проблемы сильной связи для всех порядков теории возмущений. Найдено условие отсутствия сильной связи в данной модели.

4. Построена модель Вселенной с отскоком в рамках теории Хорндески. В рамках этой модели показано, что спектры космологических возмущений, совпадающие с экспериментальными, могут быть сгенерированы на ранней стадии сжатия. Малость r -отношения определяется малостью скалярной скорости звука. Произвольно малые значения r -отношения запрещены в этой модели из-за условия отсутствия сильной связи в прошлом. Тем не менее, показано, что возможно генерировать возмущения контролируемым образом, т.е. в режиме, где фоновая эволюция и возмущения закономерно описываются в рамках классической теории поля и слабосвязанной квантовой теории.

В заключение автор хотел бы выразить свою искреннюю признательность научному руководителю Валерию Анатольевичу Рубакову за постоянное внимание к работе, ценные замечания и указание, неиссякаемые идеи и неизменную поддержку. Автор выражает и огромную признательность научному руководителю Сергею Андреевичу Миронову за постоянную помощь в работе, частые и содержательные обсуждения научных вопросов, готовность помочь и всестороннюю поддержку.

Автор выражает признательность своему соавтору и коллеге Юлии Агеевой как за совместную работу, так и за прочтение данной рукописи и ценные замечания. Автор признателен коллегам Виктории Волковой, Владиславу Баринову, Булату Фархтдинову, Петру Сатунину, Павлу Демидову за обсуждения, в ходе которых всегда удавалось разобраться в поставленных вопросах, глубже понять физику обсуждаемых явлений и процессов, а также за дружескую атмосферу в коллективе.

Автор благодарен всем сотрудникам Отдела теоретической физики Института ядерных исследований РАН за уникальную творческую атмосферу и доброжелательность.

Список литературы

- [1] Guth A. H. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems // *Phys. Rev. D.* — 1981. — Vol. 23. — P. 347–356.
- [2] Starobinsky A. A. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity // *Phys. Lett. B.* — 1980. — Vol. 91. — P. 99–102.
- [3] Sato K. First Order Phase Transition of a Vacuum and Expansion of the Universe // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 1981. — Vol. 195. — P. 467–479.
- [4] Linde A. D. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems // *Phys. Lett. B.* — 1982. — Vol. 108. — P. 389–393.
- [5] Albrecht A., Steinhardt P. J. Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking // *Phys. Rev. Lett.* — 1982. — Vol. 48. — P. 1220–1223.
- [6] Hawking S. W. The Development of Irregularities in a Single Bubble Inflationary Universe // *Phys. Lett. B.* — 1982. — Vol. 115. — P. 295.
- [7] Starobinsky A. A. Dynamics of Phase Transition in the New Inflationary Universe Scenario and Generation of Perturbations // *Phys. Lett. B.* — 1982. — Vol. 117. — P. 175–178.
- [8] Guth A. H., Pi S. Y. Fluctuations in the New Inflationary Universe // *Phys. Rev. Lett.* — 1982. — Vol. 49. — P. 1110–1113.
- [9] Bardeen J. M., Steinhardt P. J., Turner M. S. Spontaneous Creation of Almost Scale - Free Density Perturbations in an Inflationary Universe // *Phys. Rev. D.* — 1983. — Vol. 28. — P. 679.
- [10] Adams F. C., Freese K. Double field inflation // *Phys. Rev. D.* — 1991. — Vol. 43. — P. 353–361. — hep-ph/0504135.

- [11] Natural inflation: Particle physics models, power law spectra for large scale structure, and constraints from COBE / Adams F. C., Bond J. R., Freese K., Frieman J. A., and Olinto A. V. // Phys. Rev. D. — 1993. — Vol. 47. — P. 426–455. — hep-ph/9207245.
- [12] Peebles P. J. E., Vilenkin A. Quintessential inflation // Phys. Rev. D. — 1999. — Vol. 59. — P. 063505. — astro-ph/9810509.
- [13] Armendariz-Picon C., Damour T., Mukhanov V. F. k - inflation // Phys. Lett. B. — 1999. — Vol. 458. — P. 209–218. — hep-th/9904075.
- [14] Dvali G. R., Shafi Q., Solganik S. D-brane inflation // 4th European Meeting From the Planck Scale to the Electroweak Scale. — 2001. — 5. — hep-th/0105203.
- [15] Alishahiha M., Silverstein E., Tong D. DBI in the sky // Phys. Rev. D. — 2004. — Vol. 70. — P. 123505. — hep-th/0404084.
- [16] Boussekeur L., Lyth D. H. Hilltop inflation // JCAP. — 2005. — Vol. 07. — P. 010. — hep-ph/0502047.
- [17] Kobayashi T., Yamaguchi M., Yokoyama J. G-inflation: Inflation driven by the Galileon field // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105. — P. 231302. — 1008.0603.
- [18] Higgs G-inflation / Kamada K., Kobayashi T., Yamaguchi M., and Yokoyama J. // Phys. Rev. D. — 2011. — Vol. 83. — P. 083515. — 1012.4238.
- [19] Higgs inflation: consistency and generalisations / Bezrukov F., Magnin A., Shaposhnikov M., and Sibiryakov S. // JHEP. — 2011. — Vol. 01. — P. 016. — 1008.5157.
- [20] Germani C., Kehagias A. New Model of Inflation with Non-minimal Derivative Coupling of Standard Model Higgs Boson to Gravity // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105. — P. 011302. — 1003.2635.

- [21] Germani C., Kehagias A. Cosmological Perturbations in the New Higgs Inflation // JCAP. — 2010. — Vol. 05. — P. 019. — [Erratum: JCAP 06, E01 (2010)]. 1003.4285.
- [22] Germani C., Kehagias A. UV-Protected Inflation // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 106. — P. 161302. — 1012.0853.
- [23] Kobayashi T., Yamaguchi M., Yokoyama J. Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations // Prog. Theor. Phys. — 2011. — Vol. 126. — P. 511–529. — 1105.5723.
- [24] Aghanim N. et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters // Astron. Astrophys. — 2020. — Vol. 641. — P. A6. — [Erratum: Astron.Astrophys. 652, C4 (2021)]. 1807.06209.
- [25] Hawking S. W., Ellis G. F. R. The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. — Cambridge University Press, 2023. — 2. — ISBN: 978-1-00-925316-1, 978-1-00-925315-4, 978-0-521-20016-5, 978-0-521-09906-6, 978-0-511-82630-6, 978-0-521-09906-6.
- [26] Penrose R. Gravitational collapse and space-time singularities // Phys. Rev. Lett. — 1965. — Vol. 14. — P. 57–59.
- [27] Tipler F. J. Energy conditions and spacetime singularities // Phys. Rev. D. — 1978. — Vol. 17. — P. 2521–2528.
- [28] Aref'eva I. Y., Volovich I. V. On the null energy condition and cosmology // Theor. Math. Phys. — 2008. — Vol. 155. — P. 503–511. — hep-th/0612098.
- [29] Rubakov V. A. The Null Energy Condition and its violation // Phys. Usp. — 2014. — Vol. 57. — P. 128–142. — 1401.4024.
- [30] Garriga J., Mukhanov V. F. Perturbations in k-inflation // Phys. Lett. B. — 1999. — Vol. 458. — P. 219–225. — hep-th/9904176.

- [31] Horndeski G. W. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space // *Int. J. Theor. Phys.* — 1974. — Vol. 10. — P. 363–384.
- [32] General second order scalar-tensor theory, self tuning, and the Fab Four / Charmousis C., Copeland E. J., Padilla A., and Saffin P. M. // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 108. — P. 051101. — 1106.2000.
- [33] Libanov M., Mironov S., Rubakov V. Generalized Galileons: instabilities of bouncing and Genesis cosmologies and modified Genesis // *JCAP.* — 2016. — Vol. 08. — P. 037. — 1605.05992.
- [34] Kobayashi T. Generic instabilities of nonsingular cosmologies in Horndeski theory: A no-go theorem // *Phys. Rev. D.* — 2016. — Vol. 94, no. 4. — P. 043511. — 1606.05831.
- [35] Zumalacárregui M., García-Bellido J. Transforming gravity: from derivative couplings to matter to second-order scalar-tensor theories beyond the Horndeski Lagrangian // *Phys. Rev. D.* — 2014. — Vol. 89. — P. 064046. — 1308.4685.
- [36] Healthy theories beyond Horndeski / Gleyzes J., Langlois D., Piazza F., and Vernizzi F. // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 114, no. 21. — P. 211101. — 1404.6495.
- [37] Exploring gravitational theories beyond Horndeski / Gleyzes J., Langlois D., Piazza F., and Vernizzi F. // *JCAP.* — 2015. — Vol. 02. — P. 018. — 1408.1952.
- [38] Fairlie D. B., Govaerts J. Universal field equations with reparametrization invariance // *Phys. Lett. B.* — 1992. — Vol. 281. — P. 49–53. — hep-th/9202056.
- [39] Fairlie D. B., Govaerts J. Euler hierarchies and universal equations // *J. Math. Phys.* — 1992. — Vol. 33. — P. 3543–3566. — hep-th/9204074.

- [40] Nicolis A., Rattazzi R., Trincherini E. The Galileon as a local modification of gravity // Phys. Rev. D. — 2009. — Vol. 79. — P. 064036. — 0811.2197.
- [41] From k-essence to generalised Galileons / Deffayet C., Gao X., Steer D. A., and Zahariade G. // Phys. Rev. D. — 2011. — Vol. 84. — P. 064039. — 1103.3260.
- [42] Deffayet C., Esposito-Farese G., Vikman A. Covariant Galileon // Phys. Rev. D. — 2009. — Vol. 79. — P. 084003. — 0901.1314.
- [43] A no-go theorem for generalized vector Galileons on flat spacetime / Deffayet C., Gümrukçüoğlu A. E., Mukohyama S., and Wang Y. // JHEP. — 2014. — Vol. 04. — P. 082. — 1312.6690.
- [44] Deffayet C., Deser S., Esposito-Farese G. Arbitrary p -form Galileons // Phys. Rev. D. — 2010. — Vol. 82. — P. 061501. — 1007.5278.
- [45] Classifying Galileon p -form theories / Deffayet C., Garcia-Saenz S., Mukohyama S., and Sivanesan V. // Phys. Rev. D. — 2017. — Vol. 96, no. 4. — P. 045014. — 1704.02980.
- [46] Tasinato G. Cosmic Acceleration from Abelian Symmetry Breaking // JHEP. — 2014. — Vol. 04. — P. 067. — 1402.6450.
- [47] Cosmology in generalized Proca theories / De Felice A., Heisenberg L., Kase R., Mukohyama S., Tsujikawa S., and Zhang Y.-l. // JCAP. — 2016. — Vol. 06. — P. 048. — 1603.05806.
- [48] Gripaios B. M. Modified gravity via spontaneous symmetry breaking // JHEP. — 2004. — Vol. 10. — P. 069. — hep-th/0408127.
- [49] Libanov M. V., Rubakov V. A. More about spontaneous Lorentz-violation and infrared modification of gravity // JHEP. — 2005. — Vol. 08. — P. 001. — hep-th/0505231.

- [50] Causality, analyticity and an IR obstruction to UV completion / Adams A., Arkani-Hamed N., Dubovsky S., Nicolis A., and Rattazzi R. // JHEP. — 2006. — Vol. 10. — P. 014. — hep-th/0602178.
- [51] de Rham C., Fasiello M., Tolley A. J. Galileon Duality // Phys. Lett. B. — 2014. — Vol. 733. — P. 46–51. — 1308.2702.
- [52] Creminelli P., Nicolis A., Trincherini E. Galilean Genesis: An Alternative to inflation // JCAP. — 2010. — Vol. 11. — P. 021. — 1007.0027.
- [53] Subluminal Galilean Genesis / Creminelli P., Hinterbichler K., Khoury J., Nicolis A., and Trincherini E. // JHEP. — 2013. — Vol. 02. — P. 006. — 1209.3768.
- [54] DBI Realizations of the Pseudo-Conformal Universe and Galilean Genesis Scenarios / Hinterbichler K., Joyce A., Khoury J., and Miller G. E. J. // JCAP. — 2012. — Vol. 12. — P. 030. — 1209.5742.
- [55] Dirac-Born-Infeld Genesis: An Improved Violation of the Null Energy Condition / Hinterbichler K., Joyce A., Khoury J., and Miller G. E. J. // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Vol. 110, no. 24. — P. 241303. — 1212.3607.
- [56] Nishi S., Kobayashi T. Generalized Galilean Genesis // JCAP. — 2015. — Vol. 03. — P. 057. — 1501.02553.
- [57] Kobayashi T., Yamaguchi M., Yokoyama J. Galilean Creation of the Inflationary Universe // JCAP. — 2015. — Vol. 07. — P. 017. — 1504.05710.
- [58] Nicolis A., Rattazzi R., Trincherini E. Energy's and amplitudes' positivity // JHEP. — 2010. — Vol. 05. — P. 095. — [Erratum: JHEP 11, 128 (2011)]. 0912.4258.
- [59] Wang Y., Brandenberger R. Scale-Invariant Fluctuations from Galilean Genesis // JCAP. — 2012. — Vol. 10. — P. 021. — 1206.4309.

- [60] Cosmological matching conditions and galilean genesis in Horndeski's theory / Nishi S., Kobayashi T., Tanahashi N., and Yamaguchi M. // JCAP. — 2014. — Vol. 03. — P. 008. — 1401.1045.
- [61] Nishi S., Kobayashi T. Scale-invariant perturbations from null-energy-condition violation: A new variant of Galilean genesis // Phys. Rev. D. — 2017. — Vol. 95, no. 6. — P. 064001. — 1611.01906.
- [62] Cosmological bounce and Genesis beyond Horndeski / Kolevatov R., Mironov S., Sukhov N., and Volkova V. // JCAP. — 2017. — Vol. 08. — P. 038. — 1705.06626.
- [63] Mironov S., Rubakov V., Volkova V. Genesis with general relativity asymptotics in beyond Horndeski theory // Phys. Rev. D. — 2019. — Vol. 100, no. 8. — P. 083521. — 1905.06249.
- [64] Mironov S., Rubakov V., Volkova V. Cosmological scenarios with bounce and Genesis in Horndeski theory and beyond: An essay in honor of I.M. Khalatnikov on the occasion of his 100th birthday. — 2019. — 6. — 1906.12139.
- [65] Petrov P. Galileon-like vector fields // Phys. Rev. D. — 2019. — Vol. 100, no. 2. — P. 025006. — 1812.11134.
- [66] Toward evading the strong coupling problem in Horndeski genesis / Ageeva Y., Evseev O., Melichev O., and Rubakov V. // Phys. Rev. D. — 2020. — Vol. 102, no. 2. — P. 023519. — 2003.01202.
- [67] Fairlie D. B., Govaerts J., Morozov A. Universal field equations with covariant solutions // Nucl. Phys. B. — 1992. — Vol. 373. — P. 214–232. — hep-th/9110022.
- [68] Nicolis A., Rattazzi R. Classical and quantum consistency of the DGP model // JHEP. — 2004. — Vol. 06. — P. 059. — hep-th/0404159.

- [69] Luty M. A., Porrati M., Rattazzi R. Strong interactions and stability in the DGP model // JHEP. — 2003. — Vol. 09. — P. 029. — hep-th/0303116.
- [70] Imperfect Dark Energy from Kinetic Gravity Braiding / Deffayet C., Pujolas O., Sawicki I., and Vikman A. // JCAP. — 2010. — Vol. 10. — P. 026. — 1008.0048.
- [71] Padilla A., Sivanesan V. Covariant multi-galileons and their generalisation // JHEP. — 2013. — Vol. 04. — P. 032. — 1210.4026.
- [72] Kobayashi T. Horndeski theory and beyond: a review // Rept. Prog. Phys. — 2019. — Vol. 82, no. 8. — P. 086901. — 1901.07183.
- [73] The Effective Field Theory of nonsingular cosmology / Cai Y., Wan Y., Li H.-G., Qiu T., and Piao Y.-S. // JHEP. — 2017. — Vol. 01. — P. 090. — 1610.03400.
- [74] Stability of Geodesically Complete Cosmologies / Creminelli P., Pirtskhalava D., Santoni L., and Trincherini E. // JCAP. — 2016. — Vol. 11. — P. 047. — 1610.04207.
- [75] Cai Y., Piao Y.-S. A covariant Lagrangian for stable nonsingular bounce // JHEP. — 2017. — Vol. 09. — P. 027. — 1705.03401.
- [76] Langlois D., Noui K. Degenerate higher derivative theories beyond Horndeski: evading the Ostrogradski instability // JCAP. — 2016. — Vol. 02. — P. 034. — 1510.06930.
- [77] Langlois D. Dark energy and modified gravity in degenerate higher-order scalar-tensor (DHOST) theories: A review // Int. J. Mod. Phys. D. — 2019. — Vol. 28, no. 05. — P. 1942006. — 1811.06271.
- [78] Essential Building Blocks of Dark Energy / Gleyzes J., Langlois D., Piazza F., and Vernizzi F. // JCAP. — 2013. — Vol. 08. — P. 025. — 1304.4840.

- [79] Fasiello M., Renaux-Petel S. Non-Gaussian inflationary shapes in G^3 theories beyond Horndeski // JCAP. — 2014. — Vol. 10. — P. 037. — 1407.7280.
- [80] De Felice A., Tsujikawa S. Primordial non-Gaussianities in general modified gravitational models of inflation // JCAP. — 2011. — Vol. 04. — P. 029. — 1103.1172.
- [81] Gao X., Steer D. A. Inflation and primordial non-Gaussianities of 'generalized Galileons' // JCAP. — 2011. — Vol. 12. — P. 019. — 1107.2642.
- [82] Nishi S., Kobayashi T. Reheating and Primordial Gravitational Waves in Generalized Galilean Genesis // JCAP. — 2016. — Vol. 04. — P. 018. — 1601.06561.
- [83] Ageeva Y., Petrov P., Rubakov V. Nonsingular cosmological models with strong gravity in the past // Phys. Rev. D. — 2021. — Vol. 104, no. 6. — P. 063530. — 2104.13412.
- [84] Lifshitz E. M., Khalatnikov I. M. Investigations in relativistic cosmology // Adv. Phys. — 1963. — Vol. 12. — P. 185–249.
- [85] Belinsky V. A., Khalatnikov I. M., Lifshitz E. M. Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology // Adv. Phys. — 1970. — Vol. 19. — P. 525–573.
- [86] Belinskii V. A., Lifshitz E. M., Khalatnikov I. M. On a general cosmological solution of the einstein equations with a time singularity // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1972. — Vol. 62. — P. 1606–1613.
- [87] Kasner and mixmaster behavior in universes with equation of state $w \geq 1$ / Erickson J. K., Wesley D. H., Steinhardt P. J., and Turok N. // Phys. Rev. D. — 2004. — Vol. 69. — P. 063514. — hep-th/0312009.

- [88] Ade P. A. R. et al. Improved Constraints on Primordial Gravitational Waves using Planck, WMAP, and BICEP/Keck Observations through the 2018 Observing Season // *Phys. Rev. Lett.* — 2021. — Vol. 127, no. 15. — P. 151301. — 2110.00483.
- [89] Tristram M. et al. Improved limits on the tensor-to-scalar ratio using BICEP and Planck data // *Phys. Rev. D.* — 2022. — Vol. 105, no. 8. — P. 083524. — 2112.07961.
- [90] Mukhanov V. F., Vikman A. Enhancing the tensor-to-scalar ratio in simple inflation // *JCAP.* — 2006. — Vol. 02. — P. 004. — astro-ph/0512066.
- [91] Primordial fluctuations and non-Gaussianities in multi-field DBI inflation / Langlois D., Renaux-Petel S., Steer D. A., and Tanaka T. // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 101. — P. 061301. — 0804.3139.
- [92] Horndeski Genesis: strong coupling and absence thereof / Ageeva Y. A., Evseev O. A., Melichev O. I., and Rubakov V. A. // *EPJ Web Conf.* — 2018. — Vol. 191. — P. 07010. — 1810.00465.
- [93] Ageeva Y., Petrov P., Rubakov V. Horndeski genesis: consistency of classical theory // *JHEP.* — 2020. — Vol. 12. — P. 107. — 2009.05071.
- [94] Primordial non-Gaussianities of gravitational waves in the most general single-field inflation model / Gao X., Kobayashi T., Yamaguchi M., and Yokoyama J. // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 107. — P. 211301. — 1108.3513.
- [95] De Felice A., Tsujikawa S. Inflationary non-Gaussianities in the most general second-order scalar-tensor theories // *Phys. Rev. D.* — 2011. — Vol. 84. — P. 083504. — 1107.3917.
- [96] Full bispectra from primordial scalar and tensor perturbations in the most general single-field inflation model / Gao X., Kobayashi T., Shiraishi M.,

- Yamaguchi M., Yokoyama J., and Yokoyama S. // PTEP. — 2013. — Vol. 2013. — P. 053E03. — 1207.0588.
- [97] Oller J. A. Coupled-channel approach in hadron–hadron scattering // Prog. Part. Nucl. Phys. — 2020. — Vol. 110. — P. 103728. — 1909.00370.
- [98] Lacour A., Oller J. A., Meissner U. G. Non-perturbative methods for a chiral effective field theory of finite density nuclear systems // Annals Phys. — 2011. — Vol. 326. — P. 241–306. — 0906.2349.
- [99] Gülmez D., Meißner U. G., Oller J. A. A chiral covariant approach to $\rho\rho$ scattering // Eur. Phys. J. C. — 2017. — Vol. 77, no. 7. — P. 460. — 1611.00168.
- [100] Ageeva Y. A., Petrov P. K. Unitarity relation and unitarity bounds for scalars with different sound speeds // Phys. Usp. — 2023. — Vol. 66, no. 11. — P. 1134–1141. — 2206.03516.
- [101] Grojean C. New approaches to electroweak symmetry breaking // Phys. Usp. — 2007. — Vol. 50. — P. 1–35.
- [102] Bazrafshan Moghaddam H., Brandenberger R., Yokoyama J. Note on Reheating in G-inflation // Phys. Rev. D. — 2017. — Vol. 95, no. 6. — P. 063529. — 1612.00998.
- [103] Ye G., Hu B., Piao Y.-S. Implication of the Hubble tension for the primordial Universe in light of recent cosmological data // Phys. Rev. D. — 2021. — Vol. 104, no. 6. — P. 063510. — 2103.09729.
- [104] Jiang J.-Q., Piao Y.-S. Toward early dark energy and $n_s=1$ with Planck, ACT, and SPT observations // Phys. Rev. D. — 2022. — Vol. 105, no. 10. — P. 103514. — 2202.13379.
- [105] Rubakov V. A., Gorbunov D. S. Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot

big bang theory. — Singapore : World Scientific, 2017. — ISBN: 978-981-320-987-9,
978-981-320-988-6, 978-981-322-005-8.

А Анализ структуры лагранжианов для векторных галилеонов

Как мы обсуждали в разделе 2, у нас есть 7 возможных структур функций $K^{\mu\nu\rho}$:

1. $K^{\mu\nu\rho} = L^{\mu\nu}{}_{\varkappa}(A_\sigma, A_{\tau;\lambda})A^{\varkappa;\rho}$
2. $K^{\mu\nu\rho} = f^\mu(A_\sigma, A_{\tau;\lambda})\eta^{\nu\rho}$
3. $K^{\mu\nu\rho} = B^{\mu\nu}(A_\sigma, A_{\tau;\lambda})A^\rho$
- 4.1. $K^{\mu\nu\rho} = T^\mu(A_\sigma, A_{\tau;\lambda})A^{\rho;\nu}$
- 4.2. $K^{\mu\nu\rho} = X^{\mu\nu}{}_\alpha(A_\sigma, A_{\tau;\lambda})A^{\alpha;\varkappa}A^{\rho;\varkappa}$
- 4.3. $K^{\mu\nu\rho} = Z^{\mu\nu}{}_\alpha(A_\sigma, A_{\tau;\lambda})A_{\varkappa;\alpha}A^{\rho;\varkappa}$
- 4.4. $K^{\mu\nu\rho} = V^{\mu\nu}(A_\sigma, A_{\tau;\lambda})A_{\varkappa}A^{\rho;\varkappa}$.

Случай 1.

Рассмотрим случай 1, и найдем, что условие (7) эквивалентно условию

$$A^{\varkappa;\rho}\frac{\partial L^{\mu\nu}{}_{\varkappa}}{\partial A_{\sigma;\lambda}} - A^{\varkappa;\sigma}\frac{\partial L^{\mu\nu}{}_{\varkappa}}{\partial A_{\rho;\lambda}} + L^{(\mu\nu)\sigma}\eta^{\rho\lambda} - L^{(\mu\nu)\rho}\eta^{\sigma\lambda} = 0, \quad (\text{A.1})$$

где круглые скобки обозначают симметризацию. $L^{\mu\nu\tau}$ является одночленным, так что $L^{(\mu\nu)\tau}$ может быть представлен в следующем виде:

$$L^{(\mu\nu)\rho} = (A_{\tau}^{\tau})^n \tilde{L}^{(\mu\nu)\rho},$$

где n является неотрицательным целым числом, и \tilde{L} не содержит A_{τ}^{τ} . Таким образом, уравнение (A.1) имеет вид

$$\eta^{\rho\lambda} \left(-A^{\varkappa;\sigma} n (A_{\tau}^{\tau})^{n-1} \tilde{L}^{(\mu\nu)}{}_{\varkappa} + (A_{\tau}^{\tau})^n \tilde{L}^{(\mu\nu)\sigma} \right) + \dots = 0, \quad (\text{A.2})$$

где опущенные члены не содержат структур, пропорциональных $\eta^{\rho\lambda}$. Мы видим, что (A.2) не может быть выполнено, поскольку два члена в круглых скобках имеют разные степени A_{τ}^{τ} . Таким образом, опция 1 не работает.

Случай 2.

Рассматривая случай 2, мы находим, что требование (7) эквивалентно:

$$\frac{1}{2} \left(\eta^{\rho\nu} \frac{\partial f^{\mu}}{\partial A_{\tau;\lambda}} + \eta^{\rho\mu} \frac{\partial f^{\nu}}{\partial A_{\tau;\lambda}} - \eta^{\tau\nu} \frac{\partial f^{\mu}}{\partial A_{\rho;\lambda}} - \eta^{\tau\mu} \frac{\partial f^{\nu}}{\partial A_{\rho;\lambda}} \right) = 0. \quad (\text{A.3})$$

У нас есть три возможности для функции f^{μ} :

$$2\text{a. } f^{\mu} = A^{\mu} h(A_{\sigma}, A_{\nu;\lambda})$$

$$2\text{b. } f^{\mu} = A^{\mu;\varkappa} v_{\varkappa}(A_{\sigma}, A_{\nu;\lambda})$$

$$2\text{c. } f^{\mu} = A^{\varkappa;\mu} v_{\varkappa}(A_{\sigma}, A_{\nu;\lambda})$$

В случае 2a мы получаем, что (A.3) эквивалентно уравнению

$$\eta^{\nu\rho} \frac{\partial h}{\partial A_{\tau;\lambda}} = \eta^{\nu\tau} \frac{\partial h}{\partial A_{\rho;\lambda}},$$

которое может быть выполнено в единственном случае $h = h(A_{\sigma})$, так что

$$f^{\mu} = A^{\mu} h(A_{\sigma}).$$

Однако соответствующий лагранжиан $L = h(A_{\sigma}) A^{(\mu} \eta^{\nu)\rho} A_{\rho;\mu\nu}$, не содержит производных второго порядка после интегрирования по частям.

В случае 2b мы находим, что (A.3) эквивалентно

$$A^{\mu;\varkappa} \eta^{\nu\rho} \frac{\partial v_{\varkappa}}{\partial A_{\tau;\lambda}} = A^{\mu;\varkappa} \eta^{\nu\tau} \frac{\partial v_{\varkappa}}{\partial A_{\rho;\lambda}}.$$

Это возможно только в том случае, если $v_{\varkappa} = v_{\varkappa}(A_{\sigma})$. Это приводит к следующему лагранжиану:

$$L = A_{\varkappa}(A^{\tau} A_{\tau})^n \eta^{\rho(\nu} A^{\mu);\varkappa} A_{\rho;\mu\nu}.$$

Он может быть сведен путем интегрирования по частям к лагранжиану, включающему только первые производные:

$$A_{\varkappa}(A^{\tau}A_{\tau})^n\eta^{\rho(\nu}A^{\mu);\varkappa}A_{\rho;\mu\nu} = A_{\varkappa}(A^{\tau}A_{\tau})^n\frac{1}{2}(\eta^{\rho\nu}A^{\mu;\varkappa} + \eta^{\rho\mu}A^{\nu;\varkappa})A_{\rho;\mu\nu}$$

$$\Rightarrow -(A^{\tau}A_{\tau})^nA^{\varkappa}A^{\mu};_{\mu\varkappa}A^{\rho};_{\rho} + \dots \Rightarrow \frac{1}{2}\left((A^{\tau}A_{\tau})^nA_{\varkappa}\right);_{\varkappa}(A^{\rho};_{\rho})^2 + \dots = 0 + \dots,$$

где опущенные члены не содержат вторых производных, а стрелки обозначают интегрирование по частям.

Наконец, в случае 2с уравнение (А.3) эквивалентно

$$v^{\rho}\eta^{\mu\tau}\eta^{\nu\lambda} = -\eta^{\mu\tau}A^{\varkappa;\nu}\frac{\partial v_{\varkappa}}{\partial A_{\rho;\lambda}}.$$

Это уравнение не может быть выполнено.

Подводя итог, мы видим, что параметр 2 не приводит к желаемым лагранжианам.

Случай 3

Давайте рассмотрим вариант 3. Удобно классифицировать функции $B^{\mu\nu}$ в соответствии с "происхождением" индексов μ, ν . Таким образом, мы получаем 9 возможностей (другие варианты дают то же самое $S^{\mu\nu\rho}$ при подстановки в уравнение (4)):

$$3a. B^{\mu\nu} = h(A_{\theta}, A_{\tau;\lambda})A^{\mu}A^{\nu}$$

$$3b. B^{\mu\nu} = h(A_{\theta}, A_{\tau;\lambda})\eta^{\mu\nu}$$

$$3c. B^{\mu\nu} = h(A_{\theta}, A_{\tau;\lambda})A^{\mu;\nu}$$

$$3d. B^{\mu\nu} = v_{\xi}(A_{\theta}, A_{\tau;\lambda})A^{\mu;\xi}A^{\nu}$$

$$3e. B^{\mu\nu} = v_{\xi}(A_{\theta}, A_{\tau;\lambda})A^{\xi;\mu}A^{\nu}$$

$$3f. B^{\mu\nu} = L_{\xi\phi}(A_{\theta}, A_{\tau;\lambda})A^{\mu;\xi}A^{\nu;\phi}$$

$$3g. B^{\mu\nu} = L_{\xi\phi}(A_\theta, A_{\tau;\lambda}) A^{\xi;\mu} A^{\phi;\nu}$$

$$3h. B^{\mu\nu} = L_{\xi\phi}(A_\theta, A_{\tau;\lambda}) A^{\xi;\mu} A^{\nu;\phi}$$

$$3i. B^{\mu\nu} = L_{\xi\phi}(A_\theta, A_{\tau;\lambda}) A^{\mu;\xi} A^{\phi;\nu}$$

Случаи 3а и 3б.

В случаях 3а, 3б мы получаем, что требование (7) эквивалентно

$$A^\rho \frac{\partial h}{\partial A_{\tau;\lambda}} - A^\tau \frac{\partial h}{\partial A_{\rho;\lambda}} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Это возможно только в том случае, если

$$h = (F)^l (D)^n (B)^k,$$

где n , l и k - неотрицательные целые числа и

$$F = A^\rho A_\rho,$$

$$D = A^\nu A^\lambda A_{\nu;\lambda},$$

$$B = A^\nu A_\mu A^{\mu;\lambda} A_{\nu;\lambda}.$$

Таким образом, этот вариант приводит к следующим лагранжианам:

$$L_1 = (F)^{l_1} (D)^{n_1} (B)^{k_1} A^\mu A^\nu A^\rho A_{\rho;\mu\nu}, \quad (\text{A.5})$$

$$L_2 = (F)^{l_2} (D)^{n_2} (B)^{k_2} \eta^{\mu\nu} A^\rho A_{\rho;\mu\nu}, \quad (\text{A.6})$$

где $l_{1,2}$, $k_{1,2}$, $n_{1,2}$ - неотрицательные целые числа. Мы рассмотрим эти лагранжианы, наряду с другими случаями, в конце этого приложения, чтобы выяснить, какие из них независимы.

Случай 3с.

В случае (1.3) мы получаем следующую функцию $S^{\mu\nu\rho}$:

$$S^{\mu\nu\rho} = \frac{\hbar}{2}(A^{\mu;\nu} + A^{\nu;\mu})A^\rho, \quad (\text{A.7})$$

Используя (A.7), мы находим, что требование (7) эквивалентно:

$$\eta^{\tau(\mu}\eta^{\nu)\lambda}\hbar A^\rho - \eta^{\rho(\mu}\eta^{\mu)\lambda}\hbar A^\tau + A^{(\mu;\nu)}\left(\frac{\partial(\hbar A^\rho)}{\partial A_{\tau;\lambda}} - \frac{\partial(\hbar A^\tau)}{\partial A_{\rho;\lambda}}\right) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Мы видим, что (A.8) не может быть выполнено, потому что первый член в (A.8) не может быть сокращен другими членами. Таким образом, случай 3с не работает.

Случай 3д.

В случае 3д мы получаем следующую функцию $S^{\mu\nu\rho}$:

$$S^{\mu\nu\rho} = \frac{v_\varkappa}{2}(A^{\mu;\varkappa}A^\nu + A^{\nu;\varkappa}A^\mu)A^\rho. \quad (\text{A.9})$$

Используя (A.9), мы замечаем, что требование (7) эквивалентно

$$\left(\frac{\partial(A^\rho v_\varkappa)}{\partial A_{\tau;\lambda}} - \frac{\partial(A^\tau v_\varkappa)}{\partial A_{\rho;\lambda}}\right)A^{(\mu;\nu)} + A^\rho v^\lambda A^{(\nu}\eta^{\mu)\tau} - A^\tau v^\lambda A^{(\nu}\eta^{\mu)\rho} = 0.$$

Мы видим, что (A.9) не может быть выполнено, потому что третий член в (A.9) не может быть сокращен другими членами. Таким образом, случай 3д не приводит к желаемым лагранжианам.

Случай 3е.

В случае 3е мы получаем следующую функцию $S^{\mu\nu\rho}$:

$$S^{\mu\nu\rho} = \frac{v_\varkappa}{2}(A^{\varkappa;\mu}A^\nu + A^{\varkappa;\nu}A^\mu)A^\rho.$$

Тогда требование (7) эквивалентно

$$\frac{\partial(A^\rho v_\varkappa)}{\partial A_{\tau;\lambda}} - \frac{\partial(A^\tau v_\varkappa)}{\partial A_{\rho;\lambda}} = 0, \quad (\text{A.10})$$
$$A^\rho v_\varkappa = A_\varkappa v^\rho.$$

Используя второе уравнение в (A.10), мы находим, что v^{\varkappa} должно иметь следующий вид:

$$v_{\varkappa} = A_{\varkappa} h(A_{\sigma}, A_{\mu;\nu}).$$

Из этого мы получаем, что h должен подчиняться уравнению. (A.4), таким образом, мы получаем лагранжиан

$$L_3 = (F)^{l_3} (D)^{n_3} (B)^{k_3} A_{\varkappa} A^{\varkappa;(v} A^{\mu)} A^{\rho} A_{\rho;\mu\nu}, \quad (\text{A.11})$$

где l_3 , k_3 , n_3 являются неотрицательными целыми числами. Мы рассмотрим этот лагранжиан в конце приложения.

Случай 3f.

В случае 3 мы получаем следующую функцию $S^{\mu\nu\rho}$:

$$S^{\mu\nu\rho} = L_{(\varkappa\tau)} A^{\mu;\varkappa} A^{\nu;\sigma} A^{\rho}, \quad (\text{A.12})$$

Используя (A.12), мы обнаруживаем, что требование (7) эквивалентно

$$\begin{aligned} \left(\frac{(\partial A^{\rho} L_{(\varkappa\tau)})}{\partial A_{\sigma;\lambda}} - \frac{\partial(A^{\sigma} L_{(\varkappa\tau)})}{\partial A_{\rho;\lambda}} \right) A^{\mu;\varkappa} A^{\nu;\tau} + A^{\rho} (L^{(\lambda\varkappa)} \eta^{\sigma\nu} A^{\mu; \xi} + L^{(\lambda\varkappa)} \eta^{\sigma\mu} A^{\nu; \varkappa}) \\ - A^{\sigma} (L^{(\lambda\varkappa)} \eta^{\rho\nu} A^{\mu; \varkappa} + L^{(\lambda\varkappa)} \eta^{\rho\mu} A^{\nu; \varkappa}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Мы видим, что (A.13) не может быть выполнено, потому что третий член в (A.13) не может быть сокращен другими членами. Таким образом, случай 3f не приводит к желаемым лагранжианам.

Случай 3g.

В случае 3g мы находим следующую функцию $S^{\mu\nu\rho}$:

$$S^{\mu\nu\rho} = L_{(\varkappa\tau)} A^{\varkappa;\mu} A^{\tau;\nu} A^{\rho}, \quad (\text{A.14})$$

Используя (A.14), мы получаем, что требование (7) эквивалентно

$$\begin{aligned} A^\rho L^{(\varkappa\tau)} &= A^\tau L^{(\varkappa\rho)}, \\ \frac{\partial(A^\rho L^{(\varkappa\tau)})}{A_{\sigma;\lambda}} - \frac{\partial(A^\sigma L^{(\varkappa\tau)})}{A_{\rho;\lambda}} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Используя первое уравнение в (A.15), мы находим, что $L^{\mu\nu}$ должно иметь следующий вид:

$$L^{\mu\nu} = A^\mu A^\nu h(A_\theta, A_{\xi;\tau}).$$

Из этого мы получаем, что h должно удовлетворять уравнению. (A.4), а лагранжиан равен

$$L_4 = (F)^{l_4} (D)^{n_4} (B)^{k_4} A_{\varkappa} A_\lambda A^{\varkappa;\mu} A^{\lambda;\nu} A^\rho A_{\rho;\mu\nu}, \quad (\text{A.16})$$

где l_4, k_4, n_4 числа.

Случай 3h.

В этом случае мы получаем следующую функцию $S^{\mu\nu\rho}$:

$$S^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} L_{\varkappa\tau} (A^{\varkappa;\mu} A^{\nu;\tau} + A^{\varkappa;\nu} A^{\mu;\tau}) A^\rho, \quad (\text{A.17})$$

Используя (A.17), мы обнаруживаем, что требование (7) эквивалентно

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (A^{\varkappa;\mu} A^{\nu;\tau} + A^{\varkappa;\nu} A^{\mu;\tau}) \left(A^\rho \frac{\partial(L_{\varkappa\tau})}{\partial A_{\sigma;\lambda}} - A^\theta \frac{\partial(L_{\varkappa\tau})}{\partial A_{\rho;\lambda}} \right) \\ + A^\rho L_{\varkappa\tau} (\eta^{\lambda(\mu} A^{\nu);\tau} \eta^{\varkappa\sigma} + A^{\varkappa;(\mu} \eta^{\nu)\sigma} \eta^{\tau\lambda}) - A^\sigma L_{\varkappa\tau} (\eta^{\lambda(\mu} A^{\nu);\tau} \eta^{\varkappa\rho} + A^{\varkappa;(\mu} \eta^{\nu)\rho} \eta^{\tau\lambda}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Это уравнение не может быть удовлетворено, поскольку член $A^\rho L_{\varkappa\tau} A^{\varkappa;(\mu} \eta^{\nu)\sigma} \eta^{\tau\lambda}$ в (A.18) не может быть сокращен другими членами. Таким образом, случай 3h не работает.

Случай 3i.

Этот случай аналогичен предыдущему, и поэтому он не приводит к желаемым лагранжианам.

Подводя итог, мы видим, что вариант 3 приводит к четырем лагранжианам (A.5), (A.6), (A.11), (A.16).

Случай 4.1.

Рассматривая случай 4.1, мы обнаруживаем, что требование (7) эквивалентно

$$A^{\rho;\mu} \frac{\partial T^\nu}{\partial A_{\tau;\lambda}} = A^{\tau;\nu} \frac{\partial T^\mu}{\partial A_{\rho;\lambda}}. \quad (\text{A.19})$$

У нас есть три возможности для функции T^μ :

$$4.1a. \quad T^\mu = A^\mu h(A_\sigma, A_{\nu;\lambda})$$

$$4.1b. \quad T^\mu = A^{\mu;\varkappa} v_\varkappa(A_\sigma, A_{\nu;\lambda})$$

$$4.1c. \quad T^\mu = A^{\varkappa;\mu} v_\varkappa(A_\sigma, A_{\nu;\lambda})$$

В случае 4.1a мы получаем, что (A.19) эквивалентно

$$A^{\rho;\mu} A^\nu \frac{\partial h}{\partial A_{\tau;\lambda}} = A^{\tau;\nu} A^\mu \frac{\partial h}{\partial A_{\rho;\lambda}},$$

которое выполняется в единственном случае $h = h(A_\sigma)$, так что

$$T^\mu = A^\mu h(A_\sigma).$$

Однако соответствующий лагранжиан $L = h(A_\sigma) A^{\rho;(\nu} A^{\mu)} A_{\rho;\mu\nu}$ не содержит производных второго порядка после интегрирования по частям.

В случае 4.1b мы находим, что (A.19) эквивалентно

$$A^{\rho;\mu} \left(\eta^{\nu\tau} v^\lambda + A^{\nu;\varkappa} \frac{\partial v_\varkappa}{\partial A_{\tau;\lambda}} \right) = A^{\tau;\nu} \left(\eta^{\mu\rho} v^\lambda + A^{\mu;\varkappa} \frac{\partial v_\varkappa}{\partial A_{\rho;\lambda}} \right). \quad (\text{A.20})$$

Мы видим, что (A.20) не может быть удовлетворено, поскольку первый член $A^{\rho;\mu} \eta^{\nu\tau} v^\lambda$ в (A.20) не может быть сокращен другими членами.

Наконец, в случае 4.1c мы получаем, что (A.19) эквивалентно

$$A^{\rho;\mu} \left(\eta^{\nu\lambda} v^\tau + A^{\varkappa;\nu} \frac{\partial v_\varkappa}{\partial A_{\tau;\lambda}} \right) = A^{\tau;\nu} \left(\eta^{\mu\lambda} v^\rho + A^{\varkappa;\mu} \frac{\partial v_\varkappa}{\partial A_{\rho;\lambda}} \right). \quad (\text{A.21})$$

Мы видим, что (A.21) не может быть удовлетворено, поскольку первый член $A^{\rho;\mu}\eta^{\nu\lambda}v^\tau$ in (A.21) не может быть сокращен другими членами.

Подводя итог, мы видим, что случай 4.1 не работает.

Случай 4.2.

Рассматривая вариант 4.2, мы обнаруживаем, что требование (7) эквивалентно

$$L^{(\mu\nu)\sigma} A^{\rho;\lambda} + A^{\tau;\varkappa} A^{\rho;\varkappa} \frac{\partial L^{(\mu\nu)\tau}}{\partial A_{\sigma;\lambda}} - L^{(\mu\nu)\rho} A^{\sigma;\lambda} - A^{\tau;\varkappa} A^{\sigma;\varkappa} \frac{\partial L^{(\mu\nu)\tau}}{\partial A_{\rho;\lambda}} = 0. \quad (\text{A.22})$$

$L^{\mu\nu\sigma}$ является мономом, значит $L^{(\mu\nu)\sigma}$ может быть представлен в следующем виде:

$$L^{(\mu\nu)\sigma} = (A^{\varkappa;\tau} A_{\varkappa;\tau})^n \tilde{L}^{(\mu\nu)\sigma},$$

где n натуральное число, и $\tilde{L}^{(\mu\nu)\sigma}$ не содержит $(A^{\rho;\tau} A_{\rho;\tau})$. А значит уравнение (A.22) имеет вид

$$((A^{\varkappa;\tau} A_{\varkappa;\tau})^n \tilde{L}^{(\mu\nu)\sigma} - 2n A^{\tau;\varkappa} A^{\sigma;\varkappa} \tilde{L}^{(\mu\nu)\tau} (A^{\varkappa;\tau} A_{\varkappa;\tau})^{n-1}) A^{\rho;\lambda} + \dots = 0, \quad (\text{A.23})$$

где пропущенные члены не содержат структур, пропорциональных $A^{\rho;\lambda}$. Мы видим, что (A.23) не может быть выполнено, поскольку два члена в круглых скобках имеют разную степень $(A^{\varkappa;\tau} A_{\varkappa;\tau})$. Таким образом, случай 4.2 не работает.

Случай 4.3.

Рассматривая вариант 4.3, мы обнаруживаем, что требование (7) эквивалентно

$$A^{\rho;\tau} L^{(\mu\nu)\lambda} + A^{\rho;\varkappa} A_{\varkappa;\sigma} \frac{\partial L^{(\mu\nu)\sigma}}{\partial A_{\tau;\lambda}} - A^{\tau;\rho} L^{(\mu\nu)\lambda} - A^{\tau;\varkappa} A_{\varkappa;\sigma} \frac{\partial L^{(\mu\nu)\sigma}}{\partial A_{\rho;\lambda}} = 0. \quad (\text{A.24})$$

Мы видим, что (A.24) не может быть выполнено, потому что первый член в (A.24) не может быть сокращен другими членами в (A.24). Таким образом, параметр 4.3 не приводит к желаемым лагранжианам.

Случай 4.4.

Теперь мы рассмотрим вариант 4.4. Удобно классифицировать функции $Z^{\mu\nu}$ в соответствии с "происхождением" индексов μ, ν . Таким образом, мы получаем 9 возможностей (другие варианты дают тот же самый вклад $S^{\mu\nu\rho}$ в (4)):

$$4.4a. \quad Z^{\mu\nu} = h(A_\theta, A_{\tau;\lambda}) A^\mu A^\nu$$

$$4.4b. \quad Z^{\mu\nu} = h(A_\theta, A_{\tau;\lambda}) \eta^{\mu\nu}$$

$$4.4c. \quad Z^{\mu\nu} = h(A_\theta, A_{\tau;\lambda}) A^{\mu;\nu}$$

$$4.4d. \quad Z^{\mu\nu} = v_\xi(A_\theta, A_{\tau;\lambda}) A^{\mu;\xi} A^\nu$$

$$4.4e. \quad Z^{\mu\nu} = v_\xi(A_\theta, A_{\tau;\lambda}) A^{\xi;\mu} A^\nu$$

$$4.4f. \quad Z^{\mu\nu} = L_{\xi\phi}(A_\theta, A_{\tau;\lambda}) A^{\mu;\xi} A^{\nu;\phi}$$

$$4.4g. \quad Z^{\mu\nu} = L_{\xi\phi}(A_\theta, A_{\tau;\lambda}) A^{\xi;\mu} A^{\phi;\nu}$$

$$4.4h. \quad Z^{\mu\nu} = L_{\xi\phi}(A_\theta, A_{\tau;\lambda}) A^{\xi;\mu} A^{\nu;\phi}$$

$$4.4i. \quad Z^{\mu\nu} = L_{\xi\phi}(A_\theta, A_{\tau;\lambda}) A^{\mu;\xi} A^{\phi;\nu}$$

Случаи 4.4a и 4.4b.

В случаях 4.4a, 4.4b мы обнаруживаем, что требование (7) эквивалентно

$$A^{\rho;\varkappa} A_{\varkappa} \frac{\partial h}{\partial A_{\tau;\lambda}} - A^{\tau;\varkappa} A_{\varkappa} \frac{\partial h}{\partial A_{\rho;\lambda}} = 0,$$

который может быть удовлетворен в единственном случае $h = (F)^l (A^{\mu;\tau} A_\tau A^\rho A_{\mu;\rho})^n$, таким образом, мы имеем следующий лагранжиан:

$$L_5 = (F)^{l_3} (C)^{n_5} A^\mu A^\nu A^{\rho;\varkappa} A_{\varkappa} A_{\rho;\mu\nu}, \quad (\text{A.25})$$

$$L_6 = (F)^{l_6} (C)^{n_6} \eta^{\mu\nu} A^{\rho;\varkappa} A_{\varkappa} A_{\rho;\mu\nu}, \quad (\text{A.26})$$

где $l_{5,6}$, $n_{5,6}$ являются неотрицательными целыми числами, и

$$C = A^{\mu;\tau} A_\tau A^\rho A_{\mu;\rho}.$$

Мы обсуждаем лагранжианы (A.25), (A.26) в конце этого приложения.

Случай 4.4с.

В случае 4.4с мы получаем следующую функцию $S^{\mu\nu\rho}$:

$$S^{\mu\nu\rho} = \frac{\hbar}{2}(A^{\mu;\nu} + A^{\nu;\mu})A^\rho. \quad (\text{A.27})$$

Используя (A.27), мы обнаруживаем, что требование (7) эквивалентно

$$\eta^{\tau(\mu}\eta^{\nu)\lambda} \hbar A^{\rho;\varkappa} A_{\varkappa} - \eta^{\rho(\mu}\eta^{\mu)\lambda} \hbar A^{\tau;\varkappa} A_{\varkappa} + A^{(\mu;\nu)} \left(\frac{\partial(\hbar A^{\rho;\varkappa} A_{\varkappa})}{\partial A_{\tau;\lambda}} - \frac{\partial(\hbar A^{\tau;\varkappa} A_{\varkappa})}{\partial A_{\rho;\lambda}} \right) = 0. \quad (\text{A.28})$$

Мы видим, что (A.28) не может быть выполнено, потому что первый член в (A.28) не может быть сокращен другими членами. Таким образом, вариант 4.4с не работает.

Случай 4.4d.

В случае 4.4d мы получаем следующую функцию $S^{\mu\nu\rho}$:

$$S^{\mu\nu\rho} = \frac{v_\varkappa}{2}(A^{\mu;\varkappa} A^\nu + A^{\nu;\varkappa} A^\mu)A^\rho, \quad (\text{A.29})$$

Используя (A.29), мы обнаруживаем, что требование (7) эквивалентно

$$\left(\frac{\partial(A^{\rho;\sigma} A_\sigma v_\varkappa)}{\partial A_{\tau;\lambda}} - \frac{\partial(A^{\tau;\sigma} A_\sigma v_\varkappa)}{\partial A_{\rho;\lambda}} \right) A^{(\mu;\nu)} + A^{\rho;\sigma} A_\sigma v^\lambda A^{(\nu}\eta^{\mu)\tau} - A^{\tau;\sigma} A_\sigma v^\lambda A^{(\nu}\eta^{\mu)\rho} = 0. \quad (\text{A.30})$$

Мы видим, что (A.30) не может быть выполнено, потому что третий член в (A.30) не может быть сокращен другими членами. Таким образом, вариант 4.4d не приводит к желаемым лагранжианам.

Случай 4.4e.

В случае 4.4e мы приходим к следующей функции $S^{\mu\nu\rho}$:

$$S^{\mu\nu\rho} = \frac{v_{\varkappa}}{2} (A^{\varkappa;\mu} A^\nu + A^{\varkappa;\nu} A^\mu) A^{\rho;\sigma} A_\sigma.$$

Тогда требование (7) эквивалентно

$$\frac{\partial(A^{\rho;\sigma} A_\sigma v_{\varkappa})}{\partial A_{\tau;\lambda}} - \frac{\partial(A^{\tau;\sigma} A_\sigma v_{\varkappa})}{\partial A_{\rho;\lambda}} = 0, \quad (A.31)$$

$$A^{\rho;\sigma} A_\sigma v_{\varkappa} = A_{\varkappa;\sigma} A_\sigma v^\rho.$$

Используя второе уравнение в (A.31), мы находим, что v_{\varkappa} должно иметь следующий вид:

$$v_{\varkappa} = A_{\varkappa;\sigma} A^\sigma h(A_\tau, A_{\mu;\nu}).$$

Значит уравнение (A.31) имеет вид

$$A_{\varkappa}{}^{;\nu} A^\mu \left(A^{\rho;\tau} A_\tau A^{\varkappa;\tau} A_\tau \frac{\partial h}{\partial A_{\sigma;\lambda}} + A^{\rho;\tau} A^\lambda h A_\tau \eta^{\varkappa\sigma} - A^{\sigma;\tau} A_\tau A^{\varkappa;\tau} A_\tau \frac{\partial h}{\partial A_{\rho;\lambda}} - A^{\sigma;\tau} A^\lambda h A_\tau \eta^{\varkappa\rho} \right) = 0 \quad (A.32)$$

Это уравнение не может быть выполнено, потому что второй член в (A.32) не может быть сокращен другими членами. Таким образом, случай 4.4e не работает.

Случай 4.4f.

В случае 4.4f мы находим, что (7) эквивалентно

$$\left(\frac{\partial(A^{\rho;\sigma} A_\sigma L_{(\varkappa\tau)})}{\partial A_{\alpha;\lambda}} - \frac{\partial(A^{\alpha;\sigma} A_\sigma L_{(\varkappa\tau)})}{\partial A_{\rho;\lambda}} \right) A^{\mu;\varkappa} A^{\nu;\tau} + A^{\rho;\sigma} A_\sigma (L^{(\lambda\varkappa)} \eta^{\alpha\nu} A^{\mu;\varkappa} + L^{(\lambda\varkappa)} \eta^{\alpha\mu} A^{\nu;\varkappa}) - A^{\alpha;\sigma} A_\sigma (L^{(\lambda\varkappa)} \eta^{\rho\nu} A^{\mu;\varkappa} + L^{(\lambda\varkappa)} \eta^{\rho\mu} A^{\nu;\varkappa}) = 0. \quad (A.33)$$

Мы видим, что (A.33) не может быть выполнено, потому что третий член в уравнении. (A.33) не может быть сокращен другими членами. Таким образом, этот вариант не приводит к желаемым лагранжианам.

Случай 4.4g.

В случае 4.4g мы получаем, что (7) эквивалентно

$$f^\rho L^{(\kappa\tau)} = f^\tau L^{(\kappa\rho)},$$

$$\frac{\partial(f^\rho L^{(\kappa\tau)})}{A_{\sigma;\lambda}} - \frac{\partial(f^\sigma L^{(\kappa\tau)})}{A_{\rho;\lambda}} = 0, \quad (\text{A.34})$$

где $f^\rho = A^{\rho;\mu} A_\mu$. Это возможно только в том случае, если $L^{\mu\nu} = f^\mu f^\nu h(A_\sigma, A_{\kappa;\tau})$.

Исходя из этого, мы находим, что (A.34) эквивалентно

$$A^{\rho;\tau} A_\tau A^{\kappa;\sigma} A_\sigma A^{\alpha;\mu} A_\mu \left(\frac{\partial h}{A_{\nu;\lambda}} \right) - A^{\nu;\tau} A_\tau A^{\kappa;\sigma} A_\sigma A^{\alpha;\mu} A_\mu \left(\frac{\partial h}{A_{\rho;\lambda}} \right)$$

$$+ h \left(A^{\alpha;\mu} A_\mu A^{\rho;\tau} A_\tau \eta^{\kappa\nu} A^\lambda - A^{\alpha;\mu} A_\mu A^{\nu;\tau} A_\tau \eta^{\kappa\rho} A^\lambda + A^{\kappa;\mu} A_\mu A^{\rho;\tau} A_\tau \eta^{\alpha\nu} A^\lambda \right.$$

$$\left. - A^{\kappa;\mu} A_\mu A^{\nu;\tau} A_\tau \eta^{\alpha\rho} A^\lambda \right) = 0. \quad (\text{A.35})$$

Мы видим, что (A.35) не может быть выполнено, потому что третье слагаемое в уравнении. (A.35) не может быть соерращено другими слагаемыми. Таким образом, случай 4.4g не работает.

Случай 4.4h.

В случае 4.4h мы получаем, что (7) эквивалентно

$$\frac{1}{2} (A^{\kappa;\mu} A^{\nu;\tau} + A^{\kappa;\nu} A^{\mu;\tau}) \left(f^\rho \frac{\partial(L_{\kappa\tau})}{\partial A_{\alpha;\lambda}} - f^\alpha \frac{\partial(L_{\kappa\tau})}{\partial A_{\rho;\lambda}} \right)$$

$$+ f^\rho L_{\kappa\tau} (\eta^{\lambda(\mu} A^{\nu);\tau} \eta^{\kappa\alpha} + A^{\kappa;(\mu} \eta^{\nu)\alpha} \eta^{\tau\lambda}) - f^\alpha L_{\kappa\tau} (\eta^{\lambda(\mu} A^{\nu);\tau} \eta^{\kappa\rho} + A^{\kappa;(\mu} \eta^{\nu)\rho} \eta^{\tau\lambda}) = 0, \quad (\text{A.36})$$

где $f^\rho = A^{\rho;\sigma} A_\sigma$. Мы видим, что (A.36) не может быть удовлетворено, поскольку член $A^{\kappa;(\mu} \eta^{\nu)\alpha} \eta^{\tau\lambda}$ в (A.36) не может быть сокращен другими членами. Таким образом, этот случай не приводит к желаемым лагранжианам.

Случай 4.4i.

Этот случай аналогичен предыдущему 4.4i и поэтому не приводит к желаемым лагранжианам.

Независимые лагранжианы.

Подводя итог, мы пришли к шести лагранжианам (A.5), (A.6), (A.11), (A.16), (A.25), (A.26). Мы пишем их здесь снова:

$$L_1 = (F)^{l_1}(D)^{n_1}(B)^{k_1} A^\mu A^\nu A^\rho A_{\rho;\mu\nu}, \quad (\text{A.37})$$

$$L_2 = (F)^{l_2}(D)^{n_2}(B)^{k_2} \eta^{\mu\nu} A^\rho A_{\rho;\mu\nu}, \quad (\text{A.38})$$

$$L_3 = (F)^{l_3}(D)^{n_3}(B)^{k_3} A_{\varkappa} A^{\varkappa;(\nu} A^{\mu)} A^\rho A_{\rho;\mu\nu}, \quad (\text{A.39})$$

$$L_4 = (F)^{l_4}(D)^{n_4}(B)^{k_4} A_{\varkappa} A_\sigma A^{\varkappa;\mu} A^{\sigma;\nu} A^\rho A_{\rho;\mu\nu}, \quad (\text{A.40})$$

$$L_5 = (F)^{l_5}(C)^{n_5} A^\mu A^\nu A^{\rho;\varkappa} A_{\varkappa} A_{\rho;\mu\nu}, \quad (\text{A.41})$$

$$L_6 = (F)^{l_6}(C)^{n_6} \eta^{\mu\nu} A^{\rho;\varkappa} A_{\varkappa} A_{\rho;\mu\nu}, \quad (\text{A.42})$$

При интегрировании по частям некоторые из этих лагранжианов сводятся к лагранжиану, содержащему только первые производные. Наша цель здесь выяснить, какие из этих лагранжианов с точностью до интегрирования по частям не сводятся к лагранжианам первого порядка.

Лагранжиан (A.41) может быть сведен путем интегрирования по частям к лагранжиану, включающему только первые производные:

$$\begin{aligned} L_5 &= (F)^{l_5}(C)^{n_5} A^\mu A^\nu A^{\rho;\varkappa} A_{\varkappa} A_{\rho;\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}(F)^{l_5}(C)^{n_5} A^\nu C_{;\nu} + \dots = \frac{1}{2(n_5 + 1)}(F)^{l_5}((C)^{n_5+1})_{;\nu} A^\nu + \dots \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2(n_5 + 1)}(F)^{l_5}(C)^{n_5+1} A^{\nu; \nu} + \dots = 0 + \dots, \end{aligned}$$

где, как и прежде, опущенные члены не содержат вторых производных, а стрелка обозначает интегрирование по частям.

После интегрирования по частям и добавления членов, содержащих только первые производные, оставшиеся лагранжианы (A.37) – (A.40), (A.42) могут быть выражены через три лагранжиана (A.38), (A.40), (A.42). Действительно,

лагранжиан (А.37) может быть выражен через лагранжиан (А.39):

$$\begin{aligned}
L_1 &= (F)^{l_1} (D)^{n_1} (B)^{k_1} A^\mu A^\nu A^\rho A_{\rho;\mu\nu} + \dots = \frac{1}{2} (F)^{l_1} (D)^{n_1} (B)^{k_1} A^\nu D_{;\nu} + \dots \\
&\Rightarrow -\frac{k_1}{2(n_1 + 1)} ((F)^{l_1} (D)^{n_1+1} (B)^{k_1-1}) F^{;\nu} D_{;\nu} + \dots \\
&= -\frac{k_1}{(n_1 + 1)} (F)^{l_1} (D)^{n_1+1} (B)^{k_1-1} A_{\alpha} A^{\alpha;\nu} A^\mu A^\rho A_{\rho;\mu\nu} + \dots
\end{aligned}$$

Лагранжиан (А.39), в свою очередь, может быть выражен через два лагранжиана (А.38) и (А.40):

$$\begin{aligned}
L_3 &= (F)^{l_3} (D)^{n_3} (B)^{k_3} A_{\alpha} A^{\alpha;\nu} A^\mu A^\rho A_{\rho;\mu\nu} + \dots = \frac{1}{2} (F)^{l_3} (D)^{n_3} (B)^{k_3} D_{;\mu} F^{;\mu} + \dots \\
&\Rightarrow -\frac{1}{2(n_3 + 1)} (F)^{l_3} (D)^{n_3+1} (B)^{k_3} \square F - \frac{k_3}{2(n_3 + 1)} (F)^{l_3} (D)^{n_3+1} (B)^{k_3-1} B_{;\nu} F^{;\nu} + \dots \\
&= -\frac{1}{(n_3 + 1)} (F)^{l_3} (D)^{n_3+1} (B)^{k_3} \eta^{\mu\nu} A^\rho A_{\rho;\mu\nu} - \\
&- \frac{2k_3}{(n_3 + 1)} (F)^{l_3} (D)^{n_3+1} (B)^{k_3-1} A_{\alpha} A_{\tau} A^{\alpha;\mu} A^{\tau;\nu} A^\rho A_{\rho;\mu\nu} + \dots
\end{aligned}$$

Существует четыре особых случая, в которых остальные лагранжианы (А.38), (А.40) и (А.42) фактически являются первым порядком или не являются независимыми. Одним из них является лагранжиан (А.38) с $n_2 = 0, 1$ и $k_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
F^{l_2} D \eta^{\mu\nu} A^\rho A_{\rho;\mu\nu} + \dots &= \frac{1}{2} F^{l_2} D \square F + \dots \Rightarrow -\frac{1}{2} F^{l_2} D_{;\nu} F^{;\nu} + \dots \\
&= -\frac{1}{4} F^{l_2} A^\theta F_{;\theta\nu} F^{;\nu} + \dots = -\frac{1}{8} F^{l_2} A^\lambda (F_{;\nu} F^{;\nu})_{;\lambda} + \dots \\
&\Rightarrow \frac{1}{8} (F^{l_2} A^\lambda)_{;\lambda} F_{;\nu} F^{;\nu} + \dots = 0 + \dots
\end{aligned}$$

Другим является лагранжиан (А.40) с $n_4 = 0$ и $k_4 = 0$, который фактически является первым порядком.

Третьим частным случаем является лагранжиан (А.38) с $n_2 = 1$ и произвольным k_2 , который может быть выражен через лагранжиан (А.40):

$$\begin{aligned}
L_2 &= (F)^{l_2} (B)^{k_2} D \eta^{\mu\nu} A^\rho A_{\rho;\mu\nu} = \frac{1}{2} (F)^{l_2} (B)^{k_2} D \square F + \dots \\
&\Rightarrow -\frac{1}{2} (F)^{l_2} ((B)^{k_2} D)_{;\nu} F^{;\nu} + \dots = -\frac{1}{2} (F)^{l_2} (B)^{k_2} D_{;\nu} F^{;\nu} - \frac{k_2}{2} (F)^{l_2} (B)^{k_2-1} D B_{;\nu} F^{;\nu} + \dots \\
&= -\frac{1}{2} (F)^{l_2} (B)^{k_2} B_{;\nu} A^\nu - 2k_2 (F)^{l_2} (B)^{k_2-1} D A_{\alpha} A_{\tau} A^{\alpha;\mu} A^{\tau;\nu} A^\rho A_{\rho;\mu\nu} + \dots \\
&\Rightarrow -2k_2 (F)^{l_2} (B)^{k_2-1} D A_{\alpha} A_{\tau} A^{\alpha;\mu} A^{\tau;\nu} A^\rho A_{\rho;\mu\nu} + \dots,
\end{aligned}$$

Наконец, лагранжиан (A.42) фактически является первым порядком при $n_6 = 0$.

Это завершает анализ, приводящий к результату, приведенному в конце раздела 2, уравнениям (8) – (18).

В Разложение $\sqrt{-g}\mathcal{L}$ в переменных $\alpha, \beta, \zeta, N_i^T$ и h_{ij}

В этом приложении мы разлагаем $\sqrt{-g}\mathcal{L}$ по метрическим возмущениям. Мы отбрасываем все числовые коэффициенты и сохраняем только доминирующие члены, как описано в разделах. 3.2 и 3.3.1. По этой причине мы используем символ \supset вместо знака равенства.

Квадратичное действие уже известно, поэтому мы концентрируемся на кубических членах и членах более высокого порядка. Мы начнем с выражения для трехмерного символа Кристоффеля ${}^{(3)}\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\gamma^{ka}(\gamma_{ai,j} + \gamma_{aj,i} - \gamma_{ij,a})$. Мы подставляем $\gamma_{ij} = a^2 e^{2\zeta} (e^h)_{ij}$ здесь и вычислим производную:

$$(e^h)_{ij,l} = h_{ij,l} + \frac{1}{2}h_{ik,l} h_{kj} + \frac{1}{2}h_{ik} h_{kj,l} + \dots .$$

В итоге мы приходим к

$$\begin{aligned} {}^{(3)}\Gamma_{ij}^k \supset & (e^{-h})^{ka} e^{-2\zeta} [((e^h)_{ai} e^{2\zeta} \partial_j \zeta + (e^h)_{aj} e^{2\zeta} \partial_i \zeta - (e^h)_{ij} e^{2\zeta} \partial_a \zeta) \\ & + (e^{2\zeta} \partial_j h_{ai} + e^{2\zeta} \partial_i h_{aj} - e^{2\zeta} \partial_a h_{ij}) \\ & + (e^{2\zeta} h_{ab} \partial_j h_{bi} + e^{2\zeta} h_{bi} \partial_j h_{ab} + e^{2\zeta} h_{ab} \partial_i h_{bj} + e^{2\zeta} h_{bj} \partial_i h_{ab} - e^{2\zeta} h_{ib} \partial_a h_{bj} - e^{2\zeta} h_{bj} \partial_a h_{ib}) \\ & + \dots], \end{aligned}$$

где точки обозначают члены более высокого порядка в h_{ij} . Так как $(e^h)_{ik} (e^{-h})^{kj} = \delta_i^j$, мы записываем символы Кристоффеля схематически следующим образом

$$\begin{aligned} {}^{(3)}\Gamma_{ij}^k \supset & (\delta_{ki} \partial_j \zeta + \delta_{kj} \partial_i \zeta - \delta_{ij} \partial_k \zeta) \\ & + (\partial_i h_{kj} + \partial_j h_{ik} - \partial_k h_{ij}) + (\partial h^2 + \partial h^3 + \dots)_{kij} . \end{aligned}$$

где $(\partial h^2 + \partial h^3 + \dots)_{kij}$ включает члены $h_{ab}\partial_j h_{bi}$, $h_{bi}\partial_j h_{ab}$, и т.д. Мы сохраняем тензорную структуру линейных членов здесь и в соответствующих местах ниже, поскольку мы столкнемся с сокращениями, связанными с ней.

Лагранжиан (47) включает внешнюю кривизну, которую мы записываем как

$$K_{ij} = \frac{E_{ij}}{N},$$

где

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\dot{\gamma}_{ij} - {}^{(3)}\nabla_i N_j - {}^{(3)}\nabla_j N_i \right),$$

с ${}^{(3)}\nabla_i N_j \equiv \partial_i N_j - {}^{(3)}\Gamma_{ij}^k N_k$, и $N_i = \partial_i \beta + N_i^T$. Член $\dot{\gamma}_{ij}$ имеет вид

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} \left(a^2 e^{2\zeta} (e^h)_{ij} \right) \supset H e^{2\zeta} (e^h)_{ij} + \dot{\zeta} e^{2\zeta} (e^h)_{ij} + e^{2\zeta} (\dot{h}_{ij} + h_{ik} \dot{h}_{kj} + h_{kj} \dot{h}_{ik} + \dots),$$

где точки снова обозначают члены более высокого порядка по h_{ij} .

В обозначениях из секции 3.3.1 мы имеем

$$\dot{\gamma}_{ij} \supset (H + {}^{-1}\zeta) (e^h)_{ij} e^{2\zeta} + {}^{-1}(h + h^2 + h^3 + \dots)_{ij} e^{2\zeta}.$$

Мы предпринимаем аналогичные шаги в отношении условий ${}^{(3)}\nabla_i N_j + {}^{(3)}\nabla_j N_i$ and obtain

$$\begin{aligned} E_j^i \supset & (H + {}^{-1}\zeta) \delta_j^i + {}^{-1}(h + h^2 + \dots)_{ij} \\ & + (1 + \zeta + \zeta^2 + \dots) \left((1 + h + h^2 + \dots)_{ik} \partial_k \partial_j \beta + (1 + h + h^2 + \dots)_{lj} {}^{(3)}\Gamma_{il}^k \partial_k \beta \right. \\ & \left. + (1 + h + h^2 + \dots)_{ik} (\partial_k N_j^T + \partial_j N_k^T) + (1 + h + h^2 + \dots)_{lj} {}^{(3)}\Gamma_{il}^k N_k^T \right). \end{aligned}$$

При вычислении следа $E \equiv E_i^i$ и сокращения $E_i^j E_i^j$ мы столкнемся с сокращениями из-за свойств $h_{ii} = \partial_i h_{ij} = 0$ и $\partial_i N^{Ti} = 0$.

Теперь мы готовы разложить различные члены в $(-t)^{2\mu} \sqrt{-g} \mathcal{L}$ по метрическим возмущениям (причина удержания фактора $(-t)^{2\mu}$ объясняется в разделе 3.3.2). Коэффициент $N e^{3\zeta}$ в левой части ниже приходит из $\sqrt{-g}$. Мы получаем следующее:

- $\sqrt{-g}A_2$. Этот член непосредственно вычисляется путем разложения по α функции $a_2(N)$, которая имеет вид (51a):

$$(-t)^{2\mu} N e^{3\zeta} A_2 \supset^{-2-\delta} (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots)(1 + \zeta + \zeta^2 + \dots) .$$

- $\sqrt{-g}A_3K$. Используя разложение функции $a_3(N)$, заданное (51b), мы записываем

$$\begin{aligned} E \equiv K \cdot N \supset H +^{-1} \zeta +^{-1} (h^2 + \dots) \\ +^{-2} \beta(1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots) \\ +^{-1} N^T(1 + \zeta + \dots)(h + \dots) +^{-1} N^T(\zeta + \dots), \end{aligned}$$

и находим

$$\begin{aligned} (-t)^{2\mu} N e^{3\zeta} A_3 K \supset^{-1-\delta} (1 + \alpha + \dots) \left[^{-1-\delta} 1 +^{-1} (\zeta + \dots) +^{-1} (1 + \zeta + \dots)(h^2 + \dots) \right. \\ \left. +^{-2} \beta(1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots) +^{-1} N^T(1 + \zeta + \dots)(h + \dots) +^{-1} N^T(\zeta + \dots) \right], \end{aligned}$$

где член $^{-1-\delta} 1$ приходит из параметра Хаббла $H \propto (-t)^{-1-\delta}$.

- $\sqrt{-g}A_4(K^2 - K_j^i K_i^j)$. Простой расчет дает

$$\begin{aligned} E^2 \supset^{-2-2\delta} 1 +^{-2} \zeta^2 +^{-2-\delta} (h^2 + h^3) +^{-2} (h^4 + \dots) +^{-2-\delta} \zeta +^{-2} \zeta(h^2 + \dots) \\ +^{-4} \beta^2(1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots) \\ +^{-2} (N^T)^2(h^2 + \dots) +^{-2} (N^T)^2(\zeta + \dots)(h + \dots) +^{-2} (N^T)^2(\zeta^2 + \dots) \\ +^{-3} \beta(\zeta + \dots)(1 + h + \dots) +^{-3-\delta} \beta +^{-3} \beta(1 + \zeta + \dots)(h^2 + \dots) \\ +^{-2-\delta} N^T \zeta +^{-2} N^T(\zeta^2 + \dots) \\ +^{-2-\delta} N^T(h + h^2) +^{-2} N^T(h^3 + \dots) +^{-2} N^T(\zeta + \dots)(h + \dots) \\ +^{-3} \beta N^T(h + \dots) +^{-3} \beta N^T(\zeta + \dots) +^{-3} \beta N^T(\zeta + \dots)(h + \dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_j^i E_i^j \supset &^{-2-2\delta} 1 +^{-2} \zeta^2 +^{-2} (h^2 + \dots) +^{-2-\delta} \zeta +^{-2} \zeta (h^2 + \dots) \\
&+^{-4} \beta^2 (1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots) +^{-2} (N^T)^2 (1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots) \\
&+^{-3} \beta (1 + \zeta + \dots)(h + \dots) +^{-3-\delta} \beta +^{-3} \beta (\zeta + \dots) \\
&+^{-2-\delta} N^T \zeta +^{-2} N^T (\zeta^2 + \dots) +^{-2} N^T (1 + \zeta + \dots)(h + \dots) \\
&+^{-3} \beta N^T (1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots) .
\end{aligned}$$

Существует некоторая разница между E^2 и $E_j^i E_i^j$. В частности, E^2 содержит $^{-2-\delta}(h^2 + h^3) +^{-2}(h^4 + \dots)$, где $E_j^i E_i^j$ включает в себя другую структуру $^{-2}(h^2 + \dots)$. Это происходит из-за того, что h_{ij} является бесследовым и поперечным. Вместе эти два выражения имеют вид

$$\begin{aligned}
E^2 - E_j^i E_i^j \supset &^{-2-2\delta} 1 +^{-2} \zeta^2 +^{-2} (h^2 + \dots) +^{-2-\delta} \zeta +^{-2} \zeta (h^2 + \dots) \\
&+^{-4} \beta^2 (1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots) +^{-2} (N^T)^2 (1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots) \\
&+^{-3} \beta (1 + \zeta + \dots)(h + \dots) +^{-3-\delta} \beta +^{-3} \beta (\zeta + \dots) \\
&+^{-2-\delta} N^T \zeta +^{-2} N^T (\zeta^2 + \dots) +^{-2} N^T (1 + \zeta + \dots)(h + \dots) \\
&+^{-3} \beta N^T (1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots) ,
\end{aligned}$$

и мы получаем

$$\begin{aligned}
(-t)^{2\mu} N e^{3\zeta} A_4 (K^2 - K_j^i K_i^j) \supset &(1 + \alpha + \dots) \left[^{-2-2\delta} 1 \right. \\
&+^{-2-\delta} \zeta +^{-2} (\zeta^2 + \dots) +^{-2} (1 + \zeta + \dots)(h^2 + \dots) \\
&+^{-4} \beta^2 (1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots) \\
&+^{-2} (N^T)^2 (1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots) \\
&+^{-3} \beta (1 + \zeta + \dots)(h + \dots) +^{-3-\delta} \beta +^{-3} \beta (\zeta + \dots) \\
&+^{-2-\delta} N^T \zeta +^{-2} N^T (\zeta^2 + \dots) +^{-2} N^T (1 + \zeta + \dots)(h + \dots) \\
&\left. +^{-3} \beta N^T (1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots) \right] .
\end{aligned}$$

- $\sqrt{-g} B_4$ $^{(3)}R$. Мы снова используем тот факт, что h_{ij} является бесследовым и поперечным, и находим

$$(-t)^{2\mu} N e^{3\zeta} B_4$$
 $^{(3)}R \supset (1 + \alpha) \left[^{-2} (1 + \zeta + \dots)(h^2 + \dots) +^{-2} (\zeta + \dots) \right] .$

Обратите внимание, что в отличие от других членов, этот член содержит коэффициент $(1 +)$ вместо полной серии $(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots)$. Причина в том, что как $B_4 = B_4(t)$, так и ${}^{(3)}R$ не зависят от N .

Собирая все члены вместе, мы находим

$$\begin{aligned}
(-t)^{2\mu}(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{H.O.} \supset & \left[{}^{-2}(1 + \alpha)(\zeta + \dots) + {}^{-2-\delta}(\alpha^2 + \dots)\zeta \right. \\
& + (1 + \alpha + \dots)({}^{-2-\delta}1 + {}^{-3-\delta}\beta + {}^{-2-\delta}\zeta N^T + {}^{-2}(\zeta^2 + \dots) + {}^{-2}(1 + \zeta + \dots)(h^2 + \dots) \\
& + {}^{-3}\beta(1 + \zeta + \dots)(h + \dots) + {}^{-3}\beta(\zeta + \dots) + {}^{-2}N^T(\zeta^2 + \dots) + {}^{-2}N^T(1 + \zeta + \dots)(h + \\
& + {}^{-4}\beta^2(1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots) + {}^{-2}(N^T)^2(1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots) \\
& \left. + {}^{-3}\beta N^T(1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots) \right]^{H.O.}.
\end{aligned}$$

Это выражение упрощается путем использования (62), т.е. удалением δ из всех верхних индексов и использования (63) в первом члене в квадратных скобках. Результат дается формулой (64).

С Решение уравнений связи

В этом приложении мы решаем уравнения связи (59) и находим нединамические переменные α , β and N_i^T в виде рядов по ζ и h_{ij} .

Мы начинаем с уравнения. (59b). Расчет вариаций (64) и (65) относительно

β прост и дает (далее мы не пишем общий коэффициент $(-t)^{2\mu}$)

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{H.O.}}{\delta\beta} &= {}^{-3}(\alpha^2 + \dots) + {}^{-3}(h^2 + \dots) + {}^{-3}(\zeta^2 + \dots) \\ &+ {}^{-3}(\alpha + \dots)(h + \dots) + {}^{-3}(\alpha + \dots)(\zeta + \dots) + {}^{-3}(\zeta + \dots)(h + \dots) \\ &+ {}^{-3}(\alpha + \dots)(h + \dots)(\zeta + \dots) \\ &+ ({}^{-3}N^T + {}^{-4}\beta)[(\alpha + \dots) + (\zeta + \dots) + (h + \dots) \\ &+ (h + \dots)(\alpha + \dots) + (h + \dots)(\zeta + \dots) + (\alpha + \dots)(\zeta + \dots) \\ &+ (\alpha + \dots)(\zeta + \dots)(h + \dots)], \end{aligned} \quad (C.1)$$

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{(2)}}{\delta\beta} = {}^{-3-\delta}\alpha + {}^{-3}\zeta, \quad (C.2)$$

В линейном порядке соответствующее уравнение имеет вид (C.2), and we immediately get

$$\alpha_{(pq)} = {}^{\delta}\zeta, \quad p + q = 1. \quad (C.3)$$

Далее мы берем вариацию от действия относительно α и записываем

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{H.O.}}{\delta\alpha} &= {}^{-2}(\alpha^2 + \dots) + {}^{-2}(\zeta^2 + \dots) + {}^{-2}(\alpha + \dots)(\zeta + \dots) \\ &+ {}^{-2}(1 + \alpha + \dots)(1 + \zeta + \dots)(h^2 + \dots) \\ &+ {}^{-3}\beta(h + \dots) + {}^{-3}\beta(\zeta + \dots) + {}^{-3}\beta(\alpha + \dots) \\ &+ {}^{-3}\beta(\alpha + \dots)(\zeta + \dots) + {}^{-3}\beta(h + \dots)(\zeta + \dots) + {}^{-3}\beta(\alpha + \dots)(h + \dots) \\ &+ {}^{-3}\beta(\alpha + \dots)(\zeta + \dots)(h + \dots) \\ &+ {}^{-2}N^T(1 + \alpha + \dots)(\zeta + \dots) + {}^{-2}N^T(1 + \alpha + \dots)(1 + \zeta + \dots)(h + \dots) \\ &+ {}^{-4}\beta^2(1 + \alpha + \dots)(1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots) \\ &+ {}^{-2}(N^T)^2(1 + \alpha + \dots)(1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots) \\ &+ {}^{-3}\beta N^T(1 + \alpha + \dots)(1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots), \end{aligned} \quad (C.4)$$

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{(2)}}{\delta\alpha} = {}^{-2-\delta}\alpha + {}^{-3-\delta}\beta + {}^{-2}\zeta. \quad (C.5)$$

Снова рассматривая линейный порядок и используя (C.5) и (C.3), мы находим

$$\beta_{(pq)} = {}^{\delta+1}\zeta, \quad p + q = 1. \quad (C.6)$$

Наконец, мы переходим к вариации действия по отношению к N^T :

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{H.O.}}{\delta N^T} = & -^2(\zeta^2 + \dots) + ^{-2}(\alpha + \dots)(\zeta + \dots) \\ & + (^{-2}h + ^{-3}\beta + ^{-2}N^T)[(h + \dots) + (\zeta + \dots) + (\alpha + \dots)] \\ & + (\alpha + \dots)(h + \dots) + (\zeta + \dots)(h + \dots) + (\alpha + \dots)(\zeta + \dots) \\ & + (\alpha + \dots)(\zeta + \dots)(h + \dots)], \end{aligned} \quad (C.7)$$

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{(2)}}{\delta N^T} = ^{-2}N^T, \quad (C.8)$$

так что в линейном порядке мы имеем

$$N_{(pq)}^T = 0, \quad p + q = 1. \quad (C.9)$$

Решение линейного порядка имеют вид (66).

Получение пертурбативного решения в принципе несложно: чтобы найти решение порядка $p + q = n$, нужно записать неизвестный член n -го порядка в переменных α , β и N^T в линейных частях уравнений связи (C.2), (C.5), (C.8), потом использовать известные выражения более низкого порядка для α , β и N^T в нелинейных частях выражений (C.1), (C.4), (C.7), и вычислить эти выражения до n -го порядка, а потом решить получившиеся уравнения. Для квадратичного порядка мы используем (C.3), (C.6), (C.9) в квадратичных частях уравнений связи. В качестве примера, запишем уравнение (59b) в квадратичном порядке

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{(2)}}{\delta\beta} \right|_{(pq)} + \left. \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{H.O.}}{\delta\beta} \right|_{(pq)} = \\ & = ^{-3-\delta}\alpha_{(pq)} + ^{-3+2\delta}\zeta^2 + ^{-3}h^2 + ^{-3}\zeta^2 + ^{-3+\delta}\zeta h + ^{-3+\delta}\zeta^2 + ^{-3}\zeta h = 0, \quad p + q = 2. \end{aligned}$$

Мы сохраняем доминирующие члены (с наибольшими значениями надстрочных индексов) и получаем результат второго порядка

$$\alpha_{(pq)} = ^{3\delta}\zeta^2 + ^{\delta}h^2 + ^{2\delta}\zeta h, \quad p + q = 2.$$

Аналогичная процедура используется для нахождения с известным значением второго порядка α выражения для второго порядка β из уравнения (59a),

$$\beta_{(pq)} = ^{3\delta+1}\zeta^2 + ^{\delta+1}h^2 + ^{2\delta+1}\zeta h, \quad p + q = 2,$$

и, наконец, квадратичного порядка для N^T из уравнения (59с),

$$(N^T)_{(pq)} = {}^{2\delta}\zeta^2 + h^2 + {}^\delta\zeta h.$$

Из-за алгебраических сокращений, а также свойств N_i^T и h_{ij} некоторые члены в приведенных выше выражениях могут, и не присутствовать. Тем не менее, мы сохраняем все члены, поскольку проводим наивный анализ, при котором мы не учитываем возможные сокращения. На самом деле эти сокращения могут привести лишь к ослаблению финального условия. Решение для квадратичного порядка кратко изложено в (67).

Давайте покажем по индукции, что члены k -го порядка в решениях уравнений связи имеет вид

$$\alpha_{(pq)} = {}^{(2p+q-1)\delta}\zeta^p h^q, \quad p + q = k, \quad (\text{C.10})$$

$$\beta_{(pq)} = {}^1\alpha_{(pq)}, \quad p + q = k, \quad (\text{C.11})$$

$$N_{(pq)}^T = {}^{-\delta}\alpha_{(pq)} = {}^{-\delta-1}\beta_{(pq)}, \quad p + q = k, \quad k > 1. \quad (\text{C.12})$$

Это верно для $k = 2$. Давайте предположим, что это также верно и для $k \leq n-1$ и покажем, что те же формулы справедливы для $k = n$.

Общая идея заключается в том, что n -й порядок нелинейных частей уравнений связи включает только $\alpha_{(pq)}$, $\beta_{(pq)}$ и $N_{(pq)}^T$ в порядках $p + q \leq n - 1$, которые известны по предположению индукции. Таким образом, доказательство сводится к оценке этой нелинейной части (C.1), (C.4), (C.7).

Одна из формул, которую мы используем в дальнейшем, такова

$$\begin{aligned} (\alpha^m)_{(pq)} &= \left[\left({}^\delta\zeta + ({}^{3\delta}\zeta^2 + {}^{2\delta}\zeta h + {}^\delta h^2) + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + ({}^{(2l-1)\delta}\zeta^l + {}^{(2(l-1)+1-1)\delta}\zeta^{l-1} h + \dots + {}^{(l-1)\delta} h^l) + \dots \right)^m \right]_{(pq)} \\ &= {}^{(2p+q-m)\delta}\zeta^p h^q, \quad m > 1, \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

который справедлив для p и q , таких что $2p + q \geq 2m$ (в противном случае левая часть обращается в нуль) и, по предположению индукции, $p + q \leq n$. Мы

также выводим другую полезную формулу, для случая $m > r + s$:

$$\begin{aligned}
(\alpha^{m-r-s} \zeta^r h^s)_{(pq)} &= \sum_{p_1, q_1} (\alpha^{m-r-s})_{(p_1 q_1)} (\zeta^r h^s)_{(p-p_1, q-q_1)} \\
&= \sum_{p_1, q_1} (\delta_{p-p_1}^r \delta_{q-q_1}^s \zeta^{p-p_1} h^{q-q_1}) \left((2p_1+q_1-m+r+s)^\delta \zeta^{p_1} h^{q_1} \right) \Big|_{2(m-k-r) \leq 2p_1+q_1; r \leq p; s \leq q} \\
&= 2^{(p-r)+(q-s)-m+s+r} \zeta^p h^q \Big|_{2(m-s-r) \leq 2p-2r+q-s; r \leq p; s \leq q} \\
&= (2p+q-m-r)^\delta \zeta^p h^q \Big|_{2p+q \geq 2m-s; r \leq p; s \leq q}, \tag{C.14}
\end{aligned}$$

Здесь $r \leq p$, $s \leq q$ и $2p+q \geq 2m-s$, в противном случае левая часть обращается в нуль. Мы также имеем $p+q \leq n$ по предположению индукции.

Используя формулы (C.13) и (C.14), мы можем сравнивать различные члены с одной и той же структурой $\zeta^p h^q$ в уравнениях связи (C.1), (C.4), (C.7) и сохранить только те, у которых наибольшее значение $(d-c)$. С этой целью мы исследуем каждый член в (C.1) один за другим.

- Мы начинаем с первого слагаемого в уравнении (C.1):

$$^{-3}(\alpha^2 + \alpha^3 + \dots)_{(pq)} = \underbrace{^{-3+(2p+q-2)\delta} \zeta^p h^q}_{\text{from } (\alpha^2)_{(pq)}} + \underbrace{^{-3+(2p+q-3)\delta} \zeta^p h^q}_{\text{from } (\alpha^3)_{(pq)}} + \dots \tag{C.15}$$

Из (C.13) мы наблюдаем, что члены с минимальной степенью α приводят к вкладам с наибольшим значением $(d-c)$ для каждого (p, q) . Итак, доминирующим членом является $(\alpha^2)_{(pq)}$, и мы пишем

$$^{-3}(\alpha^2 + \alpha^3 + \dots)_{(pq)} = ^{-3}(\alpha^2)_{(pq)}, \quad p+q \leq n,$$

где

$$(\alpha^2)_{(pq)} = (2p+q-2)^\delta \zeta^p h^q, \quad 2p+q \geq 4.$$

Обратите внимание, что член (C.15) не имеет вкладов порядка h^2 и h^3 , потому что α , по крайней мере, квадратичен по h .

- Следующие два члена $^{-3}(h^2 + \dots)$ и $^{-3}(\zeta^2 + \dots)$ в (C.1) дают вклады с меньшим значением $(d-c)$ по сравнению с (C.15), за исключением случаев

$q = 2, p = 0$ и $q = 3, p = 0$. Нас не интересуют квадратичные члены, поскольку мы уже изучили квадратичный порядок. Итак, из этих двух членов мы (временно) сохраняем только $^{-3}h^3$.

- Следующий член равен $^{-3}(\alpha + \dots)(h + \dots)$. Используя формулу (С.14), мы наблюдаем, что член с минимальным значением m обеспечивает вклад с наибольшим значением $(d - c)$ для каждого (p, q) . Следовательно,

$$^{-3}((\alpha + \dots)(h + \dots))_{(pq)} = ^{-3} \left(\sum_{m=2} \sum_{s=1}^{s=m-1} \alpha^{m-s} h^s \right)_{(pq)} = ^{-3} (\alpha h)_{(pq)}, \quad q \geq 1.$$

В соответствии с (С.10), мы имеем

$$(\alpha h)_{(pq)} = {}^{(2p+q-2)\delta} \zeta^p h^q, \quad 2p + q \geq 3, \quad q \geq 1,$$

так что для произвольного (p, q) этот член содержится в α^2 , что следует из уравнения (С.15), за исключением того, что существуют также члены порядка ζh и h^3 . Последний на самом деле является доминирующим кубическим членом порядка $^{-3+\delta}h^3$.

- Следуя той же логике, что и выше, мы записываем для следующего члена $^{-3}((\alpha + \dots)(\zeta + \dots))_{(pq)} = ^{-3}(\alpha \zeta)_{(pq)}$. Однако, используя (С.14) мы находим, что

$$^{-3}(\alpha \zeta)_{(pq)} = ^{-3} (\alpha^{2-1} \zeta^1)_{(pq)} = ^{-3+(2p+q-3)\delta} \zeta^p h^q,$$

и, следовательно, этот член дает более слабый вклад, чем (С.15).

- Следующий член $^{-3}(\zeta + \dots)(h + \dots)$ очевидно, не является доминантным по сравнению с (С.15).
- Снова применяя ту же логику, мы получаем $^{-3}(\alpha + \dots)(\zeta + \dots)(h + \dots) = ^{-3}\alpha \zeta h$. Вклады, связанные с этим членом, снова не являются доминантными.

- Наконец, существуют члены в (С.1) которые имеют форму $(-^3N^T + ^{-4}\beta)[\dots]$, где $[\dots]$ denotes $[(\alpha + \dots) + (\zeta + \dots) + (h + \dots) + (h + \dots)(\alpha + \dots) + (h + \dots)(\zeta + \dots) + (\alpha + \dots)(\zeta + \dots) + (\alpha + \dots)(\zeta + \dots)(h + \dots)]$. Мы используем предположение индукции (С.11) и (С.12). После этого мы приходим к

$$\left((-^3N^T + ^{-4}\beta)[\dots] \right)_{(pq)} = \left((-^{3-\delta}\alpha + ^{-4+1}\alpha)[\dots] \right)_{(pq)} = \left((-^3\alpha)[\dots] \right)_{(pq)},$$

$$p + q \leq n .$$

Тогда этот набор членов включает в себя точно такие же структуры, что и некоторые из уже рассмотренных выше членов, так что этот вклад не дает ничего нового.

Подводя итог, можно сказать, что нелинейный член уравнений связи (С.1) имеет часть с фиксированным (p, q) , в котором доминирует вклад

$$\left. \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{H.O.}}{\delta\beta} \right|_{(pq)} \supset -^{3+(2p+q-2)\delta} \zeta^p h^q .$$

Вспомним форму линейной части, уравнение (С.2), и перепишем уравнение для $\alpha_{(pq)}$ при $p + q = n$,

$$^{-3-\delta} \alpha_{(pq)} = ^{-3+(2p+q-2)\delta} \zeta^p h^q .$$

Это приводит к

$$\alpha_{(pq)} = ^{(2p+q-1)\delta} \zeta^p h^q , \quad p + q = n \geq 3 ,$$

.

Анализ нелинейных частей других уравнений связи, а именно уравнения (С.4) и уравнения (С.7), по существу такой же, как и выше. Мы получаем

$$\left. \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{H.O.}}{\delta\alpha} \right|_{(pq)} \supset ^{-2+(2p+q-2)\delta} \zeta^p h^q ,$$

$$p + q \leq n$$

$$\left. \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})^{H.O.}}{\delta N^T} \right|_{(pq)} \supset ^{-2+(2p+q-2)\delta} \zeta^p h^q , \quad p + q \leq n .$$

С линейными членами в уравнениях связи (С.5) и (С.8), это приводит к (С.11) и (С.12).

Д Отрешанное действие

Таким образом, линейные части нединамических переменных α , β , N^T задаются формулой (С.3), (С.6), (С.9), в то время как части более высокого порядка записываются в виде (С.10), (С.11) и (С.12). Мы подставляем эти выражения в члены (64) и (65) в исходное действие и таким образом получаем отрешанное действие и выделяем доминирующие члены. Мы делаем это и для действия более высокого порядка (64) явно, в то время как процедура для квадратичного действия аналогична (и проще). Напомним, что здесь нас интересуют только кубические члены и члены более высокого порядка.

Сначала мы выражаем β и N_i^T через α , используя (С.11) и (С.12) мы приходим к:

$$(-t)^{2\mu}(\sqrt{-g}\mathcal{L})_{(pq)}^{H.O.} \supset \left\{ (1 + \alpha + \dots) \left[\underbrace{-^2(1 + \zeta + \dots)}_{I.} + \underbrace{-^2(1 + \zeta + \dots)(h^2 + \dots)}_{II.} \right. \right. \\ \left. \left. + \underbrace{-^2\alpha(1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots)}_{III.} \right. \right. \\ \left. \left. + \underbrace{-^2\alpha^2(1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots)}_{IV.} \right] \right\}_{(pq)}^{H.O.},$$

где верхний индекс *H.O.* по-прежнему означает, что мы сохраняем только кубические члены и члены более высокого порядка в исходных переменных α , β , N^T , ζ и h .

Давайте рассмотрим каждый член отдельно, используя (С.13) и (С.14) для выделения доминирующих вкладов. Простой подсчет степеней, аналогичный

тому, который используется в приложении С дает

$$\begin{aligned}
I. \quad & \{(1 + \alpha + \dots)(1 + \zeta + \dots)\}_{(pq)}^{H.O.} \\
& \supset (\zeta^3 + \dots)_{(pq)} + (\alpha^3 + \dots)_{(pq)} + [(\alpha^2 + \dots)(\zeta + \dots)]_{(pq)} \\
& + [(\alpha + \dots)(\zeta^2 + \dots)]_{(pq)} \\
& \supset (\alpha^3)_{(pq)},
\end{aligned}$$

Аналогично, мы находим для других трех членов:

$$II. \quad \{(1 + \alpha + \dots)(1 + \zeta + \dots)(h^2 + \dots)\}_{(pq)}^{H.O.} \supset (\alpha h^2)_{(pq)} + (h^3)_{(pq)}.$$

$$III. \quad \{(\alpha + \dots)(1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots)\}_{(pq)}^{H.O.} \supset (\alpha^3)_{(pq)} + (\alpha h^2)_{(pq)} + (\alpha^2 h)_{(pq)},$$

$$IV. \quad \{(\alpha^2 + \dots)(1 + \zeta + \dots)(1 + h + \dots)\}_{(pq)}^{H.O.} \supset (\alpha^3)_{(pq)} + (\alpha^2 h)_{(pq)}.$$

Объединяя их, мы получаем

$$(-t)^{2\mu} (\sqrt{-g}\mathcal{L})_{(pq)}^{H.O.} \supset ({}^{-2}\alpha^3 + {}^{-2}\alpha h^2 + {}^{-2}\alpha^2 h + {}^{-2}h^3)_{(pq)}, \quad p + q \geq 3. \quad (D.1)$$

Каждый член в этом выражении отличен от нуля в определенном диапазоне p и q , смотрите уравнения (С.13) и (С.14). А именно, мы имеем ($p + q \geq 3$ везде)

$$\begin{aligned}
(\alpha^3)_{(pq)} &= ({}^{2p+q-3}\delta) \zeta^p h^q, \quad \text{где } 2p + q \geq 6, \\
(\alpha h^2)_{(pq)} &= ({}^{2p+q-3}\delta) \zeta^p h^q, \quad \text{где } 2p + q \geq 4, \quad q \geq 2, \\
(\alpha^2 h)_{(pq)} &= ({}^{2p+q-3}\delta) \zeta^p h^q, \quad \text{где } 2p + q \geq 5, \quad q \geq 1.
\end{aligned}$$

Тем не менее, линейная комбинация этих членов вместе с h^3 при подстановке в (D.1) приводит к

$$(-t)^{2\mu} (\sqrt{-g}\mathcal{L})_{(pq)}^{H.O.} \supset -2 + ({}^{2p+q-3}\delta) \zeta^p h^q \Big|_{p+q \geq 3},$$

которая является нашей формулой (69). Аналогичный анализ квадратичной части действия дает (70).

Е Общие выражения в модели Хорндески

Здесь приводятся явные формулы для теории с действием (74). Уравнения движения для пространственно плоского фонового решения, в метрики Фридмана имеют вид [23]

$$(NA_2)_N + 3NA_{3N}H + 6N^2(N^{-1}A_4)_NH^2 = 0, \quad (\text{E.1a})$$

$$A_2 - 6A_4H^2 - \frac{1}{N} \frac{d}{dt} (A_3 + 4A_4H) = 0, \quad (\text{E.1b})$$

где $H = (Na)^{-1}(da/d\hat{t})$ параметр Хаббла. Функции коэффициентов в квадратичных действиях для возмущений (80) задаются формулами [57]

$$\mathcal{G}_T = -2A_4, \quad (\text{E.2a})$$

$$\mathcal{F}_T = 2B_4, \quad (\text{E.2b})$$

и

$$\mathcal{F}_S = \frac{1}{aN} \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{\Theta} \mathcal{G}_T^2 \right) - \mathcal{F}_T, \quad (\text{E.3a})$$

$$\mathcal{G}_S = \frac{\Sigma}{\Theta^2} \mathcal{G}_T^2 + 3\mathcal{G}_T, \quad (\text{E.3b})$$

с

$$\Sigma = NA_{2N} + \frac{1}{2}N^2A_{2NN} + \frac{3}{2}N^2A_{3NN}H + 3(2A_4 - 2NA_{4N} + N^2A_{4NN})H^2, \quad (\text{E.4a})$$

$$\Theta = 2H \left(\frac{NA_{3N}}{4H} - A_4 + NA_{4N} \right). \quad (\text{E.4b})$$

Ф Спектр для возмущений

В этом приложении я привожу, для полноты картины, расчет спектров для возмущений. Квадратичные действия для возмущений приведены в (85), где масштабный фактор дается выражением (83) а коэффициенты задаются уравнениями (86), (88).

Здесь приводятся расчеты для скалярных возмущений; тензорные возмущения получаются аналогичным образом. Мы вводим канонически нормированное поле ψ посредством

$$\zeta = \frac{1}{(2\mathcal{G}_S a^3)^{1/2}} \cdot \psi ,$$

так что квадратичное действие имеет вид

$$\mathcal{S}_{\psi\psi}^{(2)} = \int d^3x dt \left[\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} \psi^2 - \frac{u_S^2}{2a^2} (\vec{\nabla} \psi)^2 \right] ,$$

где

$$\alpha = (2\mathcal{G}_S a^3)^{1/2} = \frac{\text{const}}{(-t)^{\frac{2\mu-3\chi}{2}}} .$$

Как только выполняется неравенство (93), второй член в подынтегральном выражении на ранних этапах пренебрежимо мал $t \rightarrow -\infty$, и поле ψ может быть рассмотрено в приближении WKБ. Правильно нормированное WKБ решение с отрицательной частотой является

$$\psi_{WKБ} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \cdot e^{-i \int \omega dt} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{d}{2u_S k}} (-t)^{\chi/2} \cdot e^{i \frac{u_S}{d} \frac{k}{1-\chi} (-t)^{1-\chi}} ,$$

где

$$\omega = \frac{u_S k}{a} = \frac{u_S \cdot k}{d(-t)^\chi} ,$$

Теперь мы решаем полное уравнение (92) для возмущения ζ с асимптотикой в прошлом $\zeta \rightarrow \zeta_{WKБ} = (2\mathcal{G}_S a^3)^{-1/2} \psi_{WKБ}$ and obtain

$$\zeta = \mathfrak{C} \cdot (-t)^\delta \cdot H_\nu^{(2)} (\beta(-t)^{1-\chi}) ,$$

где

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1 + 2\mu - 3\chi_1}{2} , \\ \beta &= \frac{u_S k}{d(1-\chi)} , \\ \nu &= \frac{\delta}{\gamma} = \frac{1 + 2\mu - 3\chi}{2(1-\chi)} , \end{aligned}$$

и нормировочный коэффициент \mathfrak{C} определяется путем сшивки с WKB решением; с точностью до нерелевантной фазы, не зависящей от времени, мы имеем

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{(gg_S)^{1/2}} \frac{1}{2^{5/2}\pi(1-\chi)^{1/2}} \frac{1}{d^{3/2}}.$$

В более поздние моменты времени (формально на временах $|t| \rightarrow 0$) это решение не зависит от времени,

$$\zeta = (-i) \frac{\mathfrak{C}}{\sin(\nu\pi)} \frac{(1-\chi)^\nu}{u_S^\nu \Gamma(1-\nu)} \left(\frac{2d}{k}\right)^\nu.$$

Он определяет скалярный спектр мощности с помощью

$$\mathcal{P}_\zeta = 4\pi k^3 \zeta^2.$$

Собирая все коэффициенты, мы получаем результат, указанный в (96).

Тензорный спектр получается путем замены $2\mathcal{G}_S \rightarrow \mathcal{G}_T/4$ (т.е., $g_S \rightarrow 1/4$) и $u_S \rightarrow u_T = 1$, и умножением на 2 из-за наличия двух поляризаций у тензора. Это дает результат для \mathcal{P}_T , приведенный в (96).

G Наибольшие слагаемые в кубическом действии

В этом приложении приводятся выражения для кубического действия, которые содержат наибольшее количество *пространственных* производных. Как обсуждается в основном тексте, рассматривается случай вне массовой поверхности, т.е. не используются уравнения движения для динамических возмущений ζ , h_{ij} при оценке отрешанного кубического действия. Здесь используются только фоновые уравнения движения и выполняется интегрирование по частям. Это именно то, что делается в работах [66, 80, 81]. При таком подходе никакие коэффициенты в кубическом действии не усиливаются обратными степенями u_S . Члены с наибольшим числом пространственных производных легко извлекаются из лагранжиана, приведенного в работе [66]. Здесь я использую лагранжиан (73) с $G_5 = 0$, или, что эквивалентно, действия (74); кроме того, в нашем наборе

моделей мы имеем $G_4 = G_4(\phi)$, или, что эквивалентно:

$$A_4 = -B_4 = -B_4(\hat{t}) ,$$

В данный момент времени я переопределяю пространственные координаты, чтобы $a = 1$, по аналогии с разделом 4.4. Также вычисления производятся в космическом времени с $N = 1$.

Будем рассматривать различные кубические члены по очереди.

G1. Кубическое действие для ζ

В чисто скалярном секторе максимальное число пространственных производных в кубическом действии равно 4, а соответствующие члены, приведены в работе [66], и они даются выражениями

$$\mathcal{S}_{\zeta\zeta\zeta}^{(3)} = \int dt d^3x \left[\Lambda_7 \dot{\zeta} (\partial^2 \zeta)^2 + \Lambda_8 \zeta (\partial^2 \zeta)^2 + \Lambda_9 \partial^2 \zeta (\partial_i \zeta)^2 + \Lambda_{10} \dot{\zeta} (\partial_i \partial_j \zeta)^2 + \Lambda_{11} \zeta (\partial_i \partial_j \zeta)^2 \right] ,$$

где $\partial^2 = \partial_i \partial_i$ is the spatial Laplacian, and

$$\Lambda_8 = -\Lambda_{11} = -\frac{3\mathcal{G}_T^3}{2\Theta^2} , \quad (\text{G.1a})$$

$$\Lambda_9 = -\frac{2\mathcal{G}_T^3}{\Theta^2} , \quad (\text{G.1b})$$

с $\Lambda_7 = -\Lambda_{10}$. Функция Θ , входящая в (G.1), задается уравнением (E.4b).

Можно заметить, что члены с Λ_7 и Λ_{10} сокращаются при интегрировании по частям (используя $\Lambda_7 = -\Lambda_{10}$ и пренебрегая членами порядка $\dot{\Lambda}_{10} \partial_i \partial_j \zeta \partial_i \zeta \partial_j \zeta$). Более того, среди оставшихся трех одночленов только два являются независимыми после интегрирования по частям, поскольку

$$\int d^3x \zeta (\partial_i \partial_j \zeta)^2 = \int d^3x \left[\zeta (\partial^2 \zeta)^2 + \frac{3}{2} \partial^2 \zeta (\partial_i \zeta)^2 \right] .$$

Используя (G.1a), можно обнаружить, что соответствующая часть действия с ζ в кубе имеет только один член

$$\mathcal{S}_{\zeta\zeta\zeta}^{(3)} = \int dt d^3x \Lambda_\zeta \partial^2 \zeta (\partial_i \zeta)^2 , \quad (\text{G.2})$$

где

$$\Lambda_\zeta = \Lambda_9 - \frac{3}{2}\Lambda_8 = \frac{\mathcal{G}_T^3}{4\Theta^2} .$$

G2. Действие для $h\zeta\zeta$, $hh\zeta$, hhh

В общей теории Хорндески с $G_5 \neq 0$ и/или $G_4 = G_4(\phi, X)$ кубическое действие $h\zeta\zeta$ имеет следующий общий вид (см. работу [96] где даны явные выражения)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\zeta\zeta h}^{(3)} = \int dt d^3x & \left[c_1 h_{ij} \zeta_{,i} \zeta_{,j} + c_2 \dot{h}_{ij} \zeta_{,i} \zeta_{,j} + c_3 \dot{h}_{ij} \zeta_{,i} \psi_{,j} \right. \\ & \left. + c_4 \partial^2 h_{ij} \zeta_{,i} \psi_{,j} + c_5 \partial^2 h_{ij} \zeta_{,i} \zeta_{,j} + c_6 \partial^2 h_{ij} \psi_{,i} \psi_{,j} \right] , \end{aligned}$$

где

$$\psi = \partial^{-2} \partial_t \zeta .$$

Член с c_5 включает в себя 4 пространственные производные. Однако в рассматриваемом частном случае, $G_5 = 0$, $G_4 = G_4(\phi)$:

$$c_4 = c_5 = 0 .$$

Итак, кубическое действие с $h\zeta\zeta$ включает только 2 пространственные производные.

Общая структура кубического действия ζhh такова [96]

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\zeta hh}^{(3)} = \int dt d^3x & \left[d_1 \zeta \dot{h}_{ij}^2 + \frac{d_2}{a^2} \zeta h_{ij,k} h_{ij,k} + d_3 \psi_{,k} \dot{h}_{ij} h_{ij,k} + d_4 \zeta \dot{h}_{ij}^2 \right. \\ & \left. + \frac{d_5}{a^2} \partial^2 \zeta \dot{h}_{ij}^2 + d_6 \psi_{,ij} \dot{h}_{ik} \dot{h}_{jk} + \frac{d_7}{a^2} \zeta_{,ij} \dot{h}_{ik} \dot{h}_{jk} \right] , \end{aligned}$$

и в рассматриваемом случае

$$d_4 = d_5 = d_6 = d_7 = 0 .$$

Кубическое действие ζhh также включает в себя не более 2 пространственных производных.

Кубическое действие только с тензорными возмущениями задается (105). Оно также включает не более 2 пространственных производных.

Н Ковариантный лагранжиан

В этом приложении мы приводим конкретные выражения для ковариантных функций G_2 , G_3 и G_4 на стадии сжатия(81) с (127). Начнем с полученных формул (103). Подставляя конкретные выражения для a_2 и a_3 в уравнение. (103), мы приходим к

$$A_2 = \hat{g}e^{(2\mu+2)\phi}a_2\left(\frac{e^\phi}{\sqrt{2X}}\right) = \hat{g}e^{(2\mu+2)\phi}(c_2 + \sqrt{2X}d_2e^{-\phi}), \quad (\text{H.1a})$$

$$A_3 = \hat{g}e^{(2\mu+1)\phi}a_3\left(\frac{e^\phi}{\sqrt{2X}}\right) = \hat{g}e^{(2\mu+1)\phi}(c_3 + \sqrt{2X}d_3e^{-\phi}), \quad (\text{H.1b})$$

$$A_4 = -\frac{\hat{g}}{2}e^{2\mu\phi}. \quad (\text{H.1c})$$

Связь между функциями лагранжиана в ковариантном формализме и ADM задается формулами (75) и (77). Для полноты картины записываем выражение для F_X :

$$F_X = -\frac{\hat{g}e^{2\mu\phi}\left(\sqrt{2}c_3e^\phi + 2(d_3 + 2\mu)\sqrt{X}\right)}{4X^{3/2}}.$$

Подставляя последнюю формулу вместе с (H.1) в формулы (75), приходим к следующим ковариантным функциям лагранжиана

$$G_2 = \hat{g}e^{2\mu\phi}\left[e^\phi(c_2e^\phi + \sqrt{2}(d_2 - c_3 - 2c_3\mu)\sqrt{X}) + 2\mu(d_3 + 2\mu)X\ln X\right], \quad (\text{H.2a})$$

$$G_3 = \frac{1}{2}\hat{g}e^{2\mu\phi}(d_3 + 2\mu)(2 + \ln X), \quad (\text{H.2b})$$

$$G_4 = \frac{1}{2}\hat{g}e^{2\mu\phi}. \quad (\text{H.2c})$$

Далее находим функции лагранжиана в системе Эйнштейна. С этой целью будем использовать формулы из работы [105]. Используя аналогичные обозначения, как в работе [105], перепишем конформное преобразование метрики следующим образом

$$g_{\mu\nu}(E) = e^{2K(\phi)}g_{\mu\nu}, \quad (\text{H.3})$$

Здесь будем рассматривать действие (73), но с $G_4 \equiv G_4(\phi)$ в системе Джордана,

в то время как в системе Эйнштейна требуем

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g^{(E)}} \left\{ G_2^{(E)}(\phi, X_{(E)}) - G_3^{(E)}(\phi, X_{(E)}) (\square\phi)^{(E)} + \frac{M_P^2}{2} R_{(E)} \right\}, \quad (\text{H.4})$$

где (E) - это просто дополнительный или надстрочный индекс, означающий систему Эйнштейна. Это приводит к

$$X_{(E)} = -\frac{1}{2} g_{(E)}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = e^{-2K} X, \quad (\text{H.5})$$

и

$$\sqrt{-g^{(E)}} = e^{4K} \sqrt{-g}. \quad (\text{H.6})$$

Далее приходим к

$$(\square\phi)^{(E)} = g_{(E)}^{\mu\nu} \nabla_\mu^{(E)} \partial_\nu \phi = e^{-2K} [\square\phi + 2g^{\mu\nu} \partial_\mu K \partial_\nu \phi], \quad (\text{H.7})$$

где мы используем формулу для соотношения между символами Кристоффеля из работы [105]. Соотношение между скалярными кривизнами в системе Эйнштейна и системе Джордана также приведены в работе [105]. Наконец, в результате подстановки этих выражений (H.5)-(H.7) в уравнение (H.4) я прихожу к

$$\begin{aligned} G_2^{(E)} &= \frac{M_P^4 G_2(\phi, X)}{(2G_4)^2} - \frac{4M_P^4}{(2G_4)^3} G_3(\phi, X) G_{4\phi} X + 12M_P^2 \frac{G_{4\phi}^2}{(2G_4)^3} X, \\ G_3^{(E)} &= M_P^2 \frac{G_3(\phi, X)}{2G_4(\phi)}, \\ G_4^{(E)} &= \frac{M_{Pl}^2}{2}. \end{aligned}$$

Стоит подчеркнуть, что при расчете формул для $G_2^{(E)}$, $G_3^{(E)}$, и $G_4^{(E)}$ было получено, что $K(\phi)$ из уравнения (H.3) равна

$$K(\phi) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2G_4}{M_P^2} \right),$$

что совпадает с уравнением (91). Если $\frac{M_P^2}{2} = 1$, то выражения приобретают следующую форму

$$G_2^{(E)} = \frac{G_2}{G_4^2} - 2\frac{G_{4\phi}}{G_4^3}G_3X + 3\frac{G_{4\phi}^2}{G_4^3}X, \quad (\text{H.8a})$$

$$G_3^{(E)} = \frac{G_3}{G_4}, \quad (\text{H.8b})$$

$$G_4^{(E)} = 1. \quad (\text{H.8c})$$

Подставляя функции в системе Джордана (H.2) в (H.8), мы находим искомые функции лагранжиана в системе Эйнштейна

$$G_2^{(E)} = \frac{4e^{-2\mu\phi}}{\hat{g}}(c_2e^{2\phi} + \sqrt{2X}d_2e^\phi - \sqrt{2X}c_3(2\mu + 1)e^\phi - 4d_3\mu X - 2\mu^2X),$$

$$G_3^{(E)} = (d_3 + 2\mu)(2 + \ln X).$$

I Масштабный фактор и параметр Хаббла в системе Эйнштейна

В этом приложении показываются точные расчеты масштабного фактора и параметра Хаббла в случае модели с $\mu = 1$ из раздела 4.6.2 в системе Эйнштейна.

После конформного преобразования метрики, заданной (91) масштабный фактор в системе Эйнштейна имеет вид

$$a_E = a\sqrt{\frac{2B_4}{M_{Pl}^2}} = (-t)^{\chi-1}\frac{d\sqrt{g}}{M_{Pl}} \equiv (-t)^{\chi-1}dg_1 = \frac{g_1}{(1-\chi)(-\eta)},$$

где a - это масштабный фактор в системе Джордана. Для последнего равенства используем более точную (чем формула из раздела ??) формулу для соотношения между космическим временем в системе Джордана и конформным временем:

$$(-t) = [d(1-\chi)(-\eta)]^{\frac{1}{1-\chi}}.$$

Здесь введена новая константа $g_1 \equiv \frac{\sqrt{g}}{M_{Pl}}$. Обратите внимание, что размерность

последнего равна -1 . Далее мы находим космическое время в системе Эйнштейна

$$t_E = \int_{-\infty}^0 a_E d\eta = -\frac{g_1}{(1-\chi)} \ln(-d^{1/\chi}\eta),$$

и

$$(-\eta) = \frac{1}{d^{1/\chi}} e^{-(1-\chi)\frac{t_E}{g_1}}.$$

Наконец, масштабный фактор в системе Эйнштейна в терминах космического времени t_E равен

$$a_E = \frac{g_1}{(1-\chi)} d^{1/\chi} e^{(1-\chi)\frac{t_E}{g_1}}.$$

Этот масштабный фактор $\frac{a_E(1-\chi)}{g_1 d^{1/\chi}}$ как функция $\frac{t_E(1-\chi)}{g_1}$ показан на графике 11.

Параметр Хаббла в системе Эйнштейна задается формулой

$$H_E \equiv \frac{da_E}{a_E dt_E} = \frac{1-\chi}{g_1}.$$

В этом случае действительно получается экспоненциальное расширение Вселенной в системе Эйнштейна.

Ж Стабильное космологическое решение: сжатие, отскок и первичный разогрев

В этом приложении приводится численный пример стабильной и эволюции от стадии сжатия до отскока, а затем до первичного разогрева. Основная идея состоит в том, чтобы "сшить" уже построенную модель здорового отскока из раздела 4.6.1 с последующей эпохой первичного разогрева из [83], со стадией сжатия из этой работы, заданной лагранжианом (81), (127a), (127b). В этой модели действие Эйнштейна-Гильберта для гравитации восстанавливается в эпоху первичного разогрева. С этой целью, следуя работе [83], я получаю следующий

пример функций лагранжиана:

$$A_2(\hat{t}, N) = U_2(\hat{t}) \cdot \hat{g} \cdot f(\hat{t})^{-2\mu-2} a_2(N) + \frac{1}{2} (1 - U_2(\hat{t})) f_1(\hat{t})^{-2\mu_1-2} \left(\frac{x(\hat{t})}{N(\hat{t})^2} + \frac{v(\hat{t})}{N(\hat{t})^4} \right), \quad (\text{J.1a})$$

$$A_3(\hat{t}, N) = U_3(\hat{t}) \cdot \hat{g} \cdot f(\hat{t})^{-2\mu-1} a_3(N) + \frac{1}{2} (1 - U_3(\hat{t})) f_1(\hat{t})^{-2\mu_1-1} \frac{y(\hat{t})}{N(\hat{t})^3} + \frac{V_3(\hat{t})}{N(\hat{t})^2}, \quad (\text{J.1b})$$

$$A_4(\hat{t}) = -B_4(\hat{t}) = -\frac{1}{2} U_4(\hat{t}) \cdot \hat{g} \cdot f(\hat{t})^{-2\mu} - \frac{1}{2} (1 - U_4(\hat{t})) f_1(\hat{t})^{-2\mu_1} + V_4(\hat{t}). \quad (\text{J.1c})$$

Эти функции строятся, следуя той же логике, что и в работе [83]. Также для простоты полагаем

$$\hat{g} = 1.$$

Далее следует выбрать такие n_S и χ из пространства параметров на рис. ??, которые удовлетворяют необходимым условиям (134) и (136) из раздела 4.6.1. Я выбираю следующие параметры

$$n_S = 0.967, \quad \chi = 0.4,$$

и используя (97) я нахожу

$$\mu = 1.0099.$$

Будем использовать то же значение μ_1 , что и в работе [83]

$$\mu_1 = 0.8.$$

Функции U_2 , U_3 и U_4 в уравнениях (J.1) задаются с помощью

$$U_2(\hat{t}) = 1 + \ln \left(\frac{e^{3.4s(-\hat{t}-55)} + e}{e^{3.4s(-\hat{t}-55)} + e^2} \right), \quad (\text{J.2a})$$

$$U_3(\hat{t}) = 1 + \ln \left(\frac{e^{5s(-\hat{t}-28)} + e}{e^{5s(-\hat{t}-28)} + e^2} \right), \quad (\text{J.2b})$$

$$U_4(\hat{t}) = 1 + \ln \left(\frac{e^{4s(-\hat{t}-50)} + e}{e^{4s(-\hat{t}-50)} + e^2} \right), \quad (\text{J.2c})$$

которые снова были сконструированы таким же образом, как и в работе [83] и выбраны таким образом, чтобы обеспечить стабильное фоновое решение и отсутствие сверхсветовых возмущений, на всех временах эволюции: сжатие при больших отрицательных временах, затем отскок и первичный разогрев при больших положительных временах. В уравнениях (J.2) мы выбираем значение $s = 1/500$. Функция $f(\hat{t})$ в уравнениях (J.1с) задается формулой

$$f(\hat{t}) = \frac{1}{2} \left((-\hat{t} + 500) + \frac{\ln(2\cosh(s(\hat{t} - 500)))}{s} \right) + c,$$

с $c = 7$. Далее, функция f_1 равна (по аналогии с работой [83])

$$f_1(\hat{t}) = \frac{c_1}{2} \left(-\hat{t} + \frac{\ln(2\cosh(s\hat{t}))}{s} \right) + 1,$$

и $c_1 = 4 \cdot 10^{-3}$. Функции $x(\hat{t})$, $v(\hat{t})$ и $y(\hat{t})$ такие же как и в работе [83]

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(1 - U_x(t)) + \frac{4}{3((t + 2000)^2 + (t - 5000)^2)} \cdot U_x(t), \\ v(t) &= v_0(1 - U_x(t)) + \frac{v_2}{(|t| + 2000)^5} \cdot U_x(t), \\ y(t) &= y_0(1 - U_y(t)) + \frac{y_2}{(|t| + 2000)^5} \cdot U_y(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} U_x(t) &= \ln\left(\frac{e^{-1.5 \cdot s \cdot (t-80)} + e^2}{e^{-1.5 \cdot s \cdot (t-80)} + e}\right), \\ U_y(t) &= \ln\left(\frac{e^{-3.8 \cdot s \cdot (t+180)} + e^2}{e^{-3.8 \cdot s \cdot (t+180)} + e}\right), \end{aligned}$$

с параметрами

$$\begin{aligned} x_0 &= -1.6 \cdot 10^{-5}, & y_0 &= -1.2 \cdot 10^{-3}, \\ v_0 &= 5.19 \cdot 10^{-6}, \\ v_2 &= 1.04 \cdot 10^8, & y_2 &= 9.6 \cdot 10^{10}. \end{aligned}$$

Также, вводим две вспомогательные функции V_3 и V_4 в уравнениях (J.1) следующим образом

$$V_3(\hat{t}) = -1.5 \left[1 + \ln \left(\frac{e^{5.15s(-\hat{t}-2100)} + e}{e^{5.15s(-\hat{t}-2100)} + e^2} \right) \right] \left[1 + \ln \left(\frac{e^{5.2s(\hat{t}-70)} + e}{e^{5.2s(\hat{t}-70)} + e^2} \right) \right],$$

$$V_4(\hat{t}) = -1.5 \cdot 10^4 \left[1 + \ln \left(\frac{e^{5.15s(-\hat{t}-2300)} + e}{e^{5.15s(-\hat{t}-2300)} + e^2} \right) \right] \left[1 + \ln \left(\frac{e^{5.2s(\hat{t}-70)} + e}{e^{5.2s(\hat{t}-70)} + e^2} \right) \right],$$

которые необходимы для обеспечения стабильного поведения фонового решения вблизи точки отскока.

Решая уравнений (E.1) с выбранными функциями (J.1) и полагая

$$\kappa = 1, \quad c_3 = -5, \quad d_3 = -2,$$

здесь параметры выбраны таким образом, чтобы удовлетворять необходимым условиям (134) и (136) из раздела 4.6.1. Можно также получить, используя формулы (131), (132) и (133) из раздела 4.6.1, следующие

$$\rho = 0.053, \quad N_{\text{init}} = \frac{2}{\kappa} (1 + 2\mu - 2(\mu - 1)\chi) = 6.024.$$

Задав функции лагранжиана и все параметры, я нахожу параметр Хаббла $H(\hat{t})$ и функцию сдвига $N(\hat{t})$. Обратите внимание, что начальными условиями являются

$$N(\hat{t}_1) = N_{\text{init}}, \quad H(\hat{t}_1) = \frac{\chi}{N_{\text{init}}\hat{t}_1},$$

где \hat{t}_1 является некоторым большим и отрицательным временем. Поведение параметра Хаббла и функции сдвига при сжатии, отскоке и первичном разогреве показано на графике 12. Коэффициенты \mathcal{F}_S и \mathcal{G}_S (E.3) показаны на графике 13 и скалярная скорость звука в квадрате $u_S^2 \equiv \frac{\mathcal{F}_S}{\mathcal{G}_S}$ (90) показана на графике 14 (правый график); Также построены графики тензорных коэффициентов в квадратичном лагранжиане \mathcal{F}_T (E.2) см. 14 (левый график). Также $\mathcal{F}_T = \mathcal{G}_T$ (E.2) и $c_T = 1$ на всех временах эволюции.

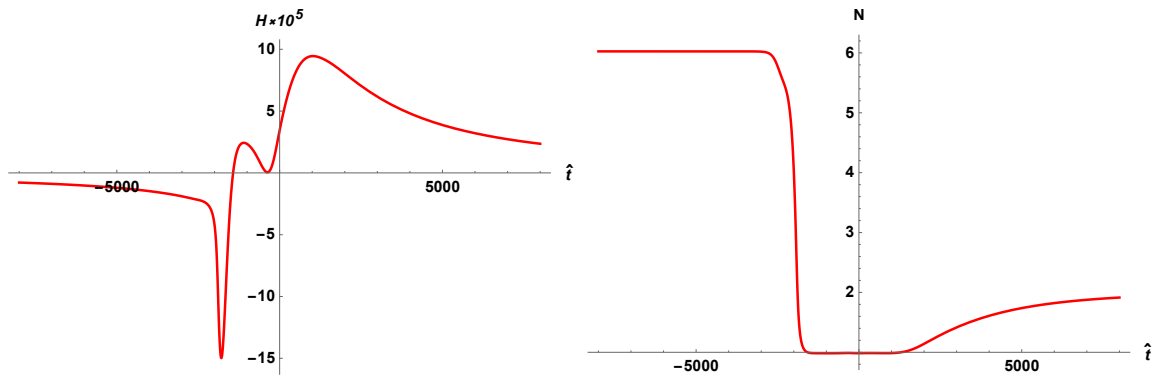


Рис. 12: Параметр Хаббла (левый график) и функция сдвига (правый график): сжатие, отскок и последующий первичный разогрев.

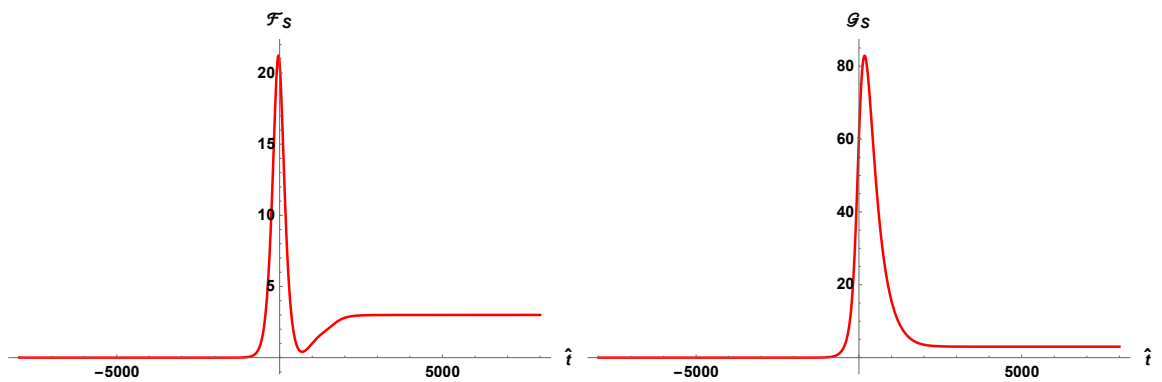


Рис. 13: Коэффициенты \mathcal{F}_S (левый график) и \mathcal{G}_S (правый график): сжатие, отскок и последующий первичный разогрев.

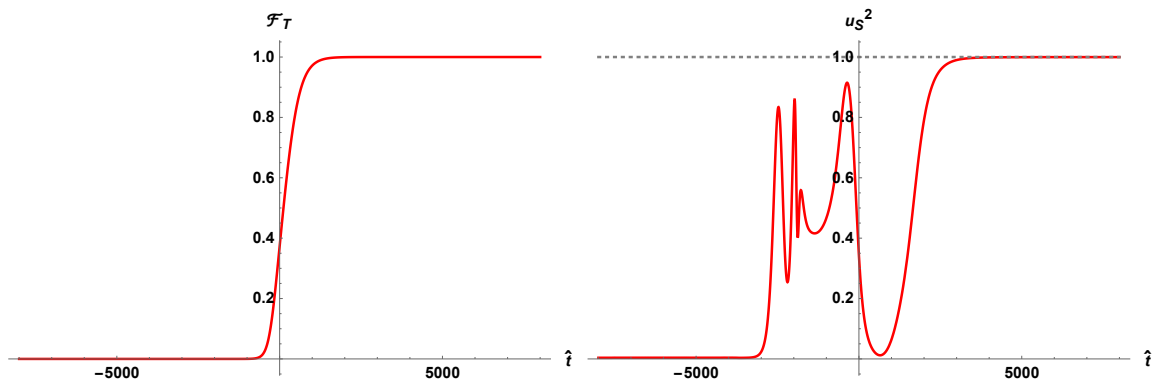


Рис. 14: Коэффициенты \mathcal{F}_T (левый график) и u_S^2 (правый график): сжатие, отскок и последующий первичный разогрев.

Заметим, что при $\hat{t} \rightarrow +\infty$ имеем следующее асимптотическое поведение A_4 в выражение (J.1c)

$$A_4 \rightarrow -\frac{1}{2},$$

т.е. $M_P = 1$, что означает, что общая теория относительности восстанавливается в будущем в этой модели.

Наконец, можно убедиться, что длина волны первичных флуктуаций достаточно возрастает в конце фазы сжатия. С этой целью вычислим количество e -фолдов.

Рассмотрим моды, импульсы которых $p_0 \sim H_0$. Предположим, что отскок происходит при масштабном факторе равном $a = a_b$, а до этого масштабный фактор уменьшается как (83). Таким образом,

$$a_b = d|t_b|^\chi,$$

где t_b - конец стадии сжатия. Выход мода за горизонт с конформным импульсом $k = p_0/a_0$ происходит в (см. уравнение (94)) в момент времени

$$|t_f| \sim \left(\frac{d}{k}\right)^{\frac{1}{1-\chi}},$$

где опускаем зависимость от скорости звука u_S . Далее можно записать

$$k = p_0 a_0 = p_0 \frac{a_0}{a_b} d|t_b|^\chi,$$

и получаем

$$|t_f| \sim \left(\frac{1}{p_0 \frac{a_0}{a_b} |t_b|^\chi}\right)^{\frac{1}{1-\chi}}.$$

Теперь используем тот факт, что в сжатия имеем $H(t) \sim 1/|t|$ и получаем

$$|t_f| \sim |t_b| \cdot \left(\frac{H_b a_b}{p_0 a_0}\right)^{\frac{1}{1-\chi}},$$

что для $p_0 \sim H_0$, приводит к

$$|t_f| \sim |t_b| \cdot \left(\frac{H_b a_b}{H_0 a_0}\right)^{\frac{1}{1-\chi}}.$$

Если $(H_0 a_0)/(H_b a_b) \ll 1$ выполняется для модели, то выход за горизонт происходит задолго до отскока. Таким образом, оцениваем значение $(H_0 a_0)/(H_b a_b)$

в модели с функциями лагранжиана (J.1). Во-первых, можно сразу записать значения параметров Хаббла

$$H_0 \sim 10^2 \cdot \text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1} \sim 10^{-61},$$

$$H_b \sim 4.2 \cdot 10^{-5},$$

здесь $M_P = 1$. Для H_0 выбираем некоторое приблизительное оценочное значение, а H_b получается численно при $\hat{t}_b \approx -2000$. Обратите внимание, что я определяю этот момент времени \hat{t}_b как момент, начиная с которого формула для параметра Хаббла $H \sim 1/|\hat{t}|$ перестает работать. Далее находим a_0 . Его можно приблизительно оценить как

$$a_0 \approx a_e \frac{T_{reh}}{T_0},$$

где a_e - масштабный фактор в конце отскока, и предполагается, что разогрев происходит почти мгновенно после отскока. Этот a_e задается формулой

$$a_e \approx a_b \left(\int_{\hat{t}_b}^{\hat{t}_{\text{cross}}} NH d\hat{t} + \int_{\hat{t}_{\text{cross}}}^{\hat{t}_e} NH d\hat{t} \right) \equiv a_b (I_1 + I_2),$$

где $\hat{t}_b = -2000$, и $\hat{t}_e = 2000$ (приблизительное время окончания отскока), в то время как $\hat{t}_{\text{cross}} \approx -1450$ момент времени, когда параметр Хаббла меняет знак. Интегралы вычисляются численно и равны

$$I_1 \approx -0.07, \quad I_2 \approx 0.2.$$

После этого я прихожу к

$$\frac{H_b a_b}{H_0 a_0} \approx \frac{H_b \cdot T_0}{H_0 \cdot I \cdot T_{reh}}.$$

Выбирая $T_{reh} = 10^{-12} M_P$, и $T_0 \approx 10^{-32} M_P$ я прихожу к

$$\frac{H_b a_b}{H_0 a_0} \approx 10^{37} \gg 1,$$

итак, видно, что выход за горизонт происходит задолго до отскока.

Давайте оценим количество e - фолдов \mathcal{N} , которые могут быть получены в течение периода сжатия. Используем выражение

$$e^{\mathcal{N}} \equiv \frac{a(t_f)}{a_b} = \frac{|t_f|^\chi}{|t_b|^\chi} = \left(\frac{H_b a_b}{H_0 a_0} \right)^{\frac{\chi}{1-\chi}},$$

и получим

$$\mathcal{N} = \frac{\chi}{1-\chi} \ln \left(\frac{H_b a_b}{H_0 a_0} \right) \approx 58,$$

таким образом, эта модель физически релевантна, т.е. длина волны первичных флуктуаций растягивается на 60 хаббловских масштабов в конце фазы сжатия и до того, как происходит отскок.