ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ РОССИЙСКОЙ
АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Иванова Инна Дмитриевна

Сингулярные гиперповерхности в квадратичной гравитации

1.3.3 – «Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук
Березин Виктор Александрович

Москва — 2024

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Хорошо известно, что любую теорию поля можно описать с помощью вариационного принципа. В общей теории относительности метрический тензор служит динамической переменной и используется для характеристики гравитационного поля. Действие, используемое в данной вариационной формулировке, представляет из себя действие Эйнштейна-Гильберта, которое имеет второй порядок по производным от метрики. Тем не менее, действие Эйнштейна-Гильберта является простейшим из действий, которые могут воспроизвести уравнения Эйнштейна. Теоретически возможны более сложные действия, включающие производные более высокого порядка, которые бы приводили к тем же решениям в частном случае. Например, известно, что все вакуумные решения уравнений Эйнштейна в четырех измерениях являются также вакуумными решениями квадратичной гравитации.

Вскоре после того как Альберт Эйнштейн сформулировал общую теорию относительности в 1915 году, а Давид Гильберт предложил элегантную процедуру, с помощью которой уравнения поля Эйнштейна получаются из вариационного принципа, предпринимались различные попытки расширить и обобщить эту теорию гравитации. Так, уже в 1919 году Герман Вейль выдвинул идею вывести альтернативные уравнения поля для метрики, стартуя с другого действия. Вместо лагранжиана Эйнштейна-Гильберта общей теории относительности Г. Вейль предложил лагранжиан, содержащий произведения двух тензоров Римана и его сверток. Такой лагранжиан является квадратичным по кривизне, соответственно, эта теория гравитации получила название квадратичной гравитации.

Несмотря на то, что подобные классические теории приводят к определенным концептуальным и физическим проблемам, они активно исследуются по настоящее время. Так, в теории струн члены высших порядков по тензору кривизны включены в эффективное действие струны [1; 2]. Квадратичная гравитация также играет важную роль в современных исследованиях релятивистских квантовых теорий поля. Это естественное и достаточно «консервативное» расширение теории Эйнштейна. Квадратичные члены в лагранжиане можно понимать как поправки к общей теории относительности, которые могут играть решающую роль при достаточно высоких энергиях. Соответственно, при поиске последовательной теории квантовой гравитации, которая могла бы быть применима вблизи Большого взрыва или вблизи сингулярности пространства-времени внутри черных дыр, важно понять роль этих поправок высших порядков по кривизне.

Квадратичная гравитация принадлежит к классу теорий с высшими производными, проанализированными еще Остроградским [3], который доказал, что подобные теории подчиняются теореме Остроградского о неустойчивости, которая классифицирует все невырожденные теории с высшими производными как неустойчивые по Ляпунову. Это серьезная проблема, потому что их гамильтониан неограничен снизу, соответственно, такие нестабильные теории обладают состояниями с отрицательной энергией, которые исключаются из квантовых теорий поля. В квадратичной гравитации это проявляется в наличии массивного духа. Тем не менее, важность проблемы квантовой гравитации побуждает физиков продолжать исследовать теории гравитации с высшими производными, кроме того, в последнее время был достигнут некоторый прогресс в проблеме духов. Так, например, в публикации [2] показано, что гравитация с лагранжианом, пропорциональным R^2 не содержит духов, а К. М. Бендер и Ф. Д. Мангейм в статьях [4; 5] получили аналогичный результат для конформной гравитации. При этом большая часть проделанной до сих пор работы была посвящена проблеме духов в рамках конечномерных квантово-механических моделей, и поэтому случай релятивистской теории поля и квадратичной гравитации, в частности, остается важной целью будущих исследований.

Другой потенциальной проблемой квадратичной гравитации является конфликт между стабильностью, понимаемой как отсутствие тахионов, и отсутствием полюсов Ландау. В работах [6; 7] показано, что всякий раз при подборе параметров для обеспечения стабильности, в теории возмущений фигурировал полюс Ландау. Тем не менее, в решении этой проблемы также появились некоторые продвижения. В статье [8] было продемонстрировано, что квадратичная гравитация, связанная с перенормируемой квантовой теорией поля, может выдерживать бесконечные энергии при условии, что все константы связи стремятся к фиксированной ультрафиолетовой точке, а гравитационная часть стремится к конформной гравитации. Требование, связанное с фиксированной ультрафиолетовой точкой, указывает на присутствие нескольких частиц за пределами Стандартной модели, которые могли бы объяснить уже известные убедительные доказательства новой физики, такие как нейтринные осцилляции, темная материя и т.д. [9].

Известно, что квантовые поправки, возникающие при перенормировке любой квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени, порождают члены, которых нет в действии Эйнштейна-Гильберта. Так, еще в работе [10] было показано, что для устранения логарифмической расходимости в средних значениях компонент тензора энергии-импульса набора квантованных полей материи, взаимодействующих с классическим гравитационным полем, необходимо добавление квадратичных по тензору Римана поправок к лагранжиану. Затем три группы теоретиков [10—20] в ходе исследования процессов квантового рождения частиц скалярным полем на фонах космологической модели обнаружили, что основную роль в них играет конформная аномалия, которая является следствием процедуры перенормировки. Конформная аномалия может быть включена в интеграл действия, где она состоит из двух частей: локальной и нелокальной. Локальная часть входит в гравитационный лагранжиан как набор контрчленов и в однопетлевом приближении равна сумме членов, квадратичных по тензору кривизны Римана и его сверткам.

А.А. Старобинский [21] использовал эти неизбежные поправки к действию гравитации и заметил, что космологическое решение без сингулярности, которое относится к типу Вселенной де Ситтера, может быть получено путем их учета. Это привело к созданию первой модели инфляции.

Проблема неперенормируемости общей теории относительности на данный момент хорошо изучена. Так, в статье [22] было показано, что общая теория относительности без полей материи перенормируема в однопетлевом приближении, но становится неперенормируемой после включения полей материи. С. Вайнберг [23] и С. Дезер [24] предположили, что квадратичная гравитация перенормируема, т.е. все физические величины можно сделать конечными путем переопределения параметров и перенормировки полей, а несколько лет спустя К. С. Стелле [25] строго обосновал этот факт. Перенормируемость теории крайне важна для ее квантования, поэтому это еще один аргумент в пользу того, что исследование теорий высших производных может дать важные подсказки относительно квантования гравитации.

Роль точных решений в понимании физических явлений трудно переоценить. Поскольку уравнения поля любой теории гравитации сильно нелинейны, поиск решений становится очень непростой задачей, поэтому исследование сингулярных распределений полей материи крайне важно, так как позволяет построить дополнительные классы точных решений на основе уже известных. Как в общей теории относительности, так и в квадратичной гравитации встречаются сингулярные гиперповерхности. В данной работе сингулярная гиперповерхность определяется как гиперповерхность, на которой тензор кривизны Римана имеет сингулярную часть, а именно, скачок и (или) дельта-функцию. Эти гиперповерхности являются важными идеализированными объектами, предназначенными для описания локальной концентрации вещества или энергии на данной гиперповерхности, например, доменных стенок, тонких слоев материи или гравитационных полей, распространения светоподобной материи, гравитационных ударных волн, границ материя-вакуум, каустик, фазовых переходов в вакууме и т.д. Кроме того, при обобщении уравнений для сингулярных гиперповерхностей на произвольные размерности они находят применение в теории струн и супергравитации.

Для квадратичной гравитации сингулярные гиперповерхности впервые были исследованы Дж. М. М. Сеновийей [26—31]. Полученные Дж. М. М. Сеновийей уравнения движения существенно отличаются от уравнений Израэля, прежде всего тем, что могут содержать не только δ-функцию, но и ее производную. Таким образом, они описывают не только тонкие оболочки, возникающие в общей теории относительности, но и принципиально новый тип сингулярных гиперповерхностей - так называемые двойные слои. Для двойного слоя оказываются ненулевыми соответствующие проекции поверхностного тензора энергии-импульса S^{ab}: $S^{ab}\,\partial_a n\,\partial_b n$, $S^a_b\,\partial_a n\,e^b_j\,\gamma^{ij}$ на гиперповерхность $n(x) = 0$. Они также были обнаружены Дж. М. М. Сеновийей, который подчеркивал их значение и назвал, соответственно, «внешним давлением» и «внешним потоком». Очевидно, они не связаны с частью поверхностного тензора энергии-импульса, ответственной за тонкую оболочку. Тем не менее, они так или иначе получаются из лагранжиана материи при предельном переходе от такиих типов несингулярных распределений материи, которые в пределе приводят к появлению тета и дельта-функций.

В статье [32] выдвинуто предположение, что «внешнее давление» и «внешний поток» могут быть ответственны за создание полей материи двойным слоем, в частности, они могут быть связаны с процессами рождения и аннигиляции частиц на фоне специальной конфигурации гравитационного поля, созданного сингулярной гиперповерхностью. Для того, чтобы пояснить их физический смысл, в настоящей работе соответствующие компоненты поверхностного тензора энергии-импульса были получены непосредственно из лагранжиана материи, а именно, из лагранжиана для идеальной жидкости с переменным числом частиц, впервые представленного в работе [33].

Исследование процессов рождения частиц в присутсвии сильных внешних полей играет важную роль как в космологии, так и в физике черных дыр. Наиболее сложной задачей является учет обратного влияния этих процессов на метрику, так как оно включает в себя не только влияние созданных частиц, но и вклад от поляризации вакуума. Основная проблема при учете обратного влияния состоит в том, что для точного решения квантовой задачи необходимы граничные условия, в то время как последние могут быть наложены только после решения уравнений поля с тензором энергии-импульса, получеными соответствующим усреднением из квантовой задачи. Для того, чтобы избежать этих препятствий, в данной работе использована модель идеальной жидкости с переменным числом частиц из [33], описывающая процесс рождения частиц феноменологически на классическом уровне, но с учетом обратного влияния. Помимо исследования поверхностного тензора энергии-импульса для данной модели, в настоящей работе на примере вышеупомянутого действия показано, что сферически симметричные вакуумные решения типа черной дыры в общей теории относительности, а также для некоторых случаев квадратичной гравитации, не могут описывать так называемый «беременный вакуум» [34], т.е. состояние, в котором возможность рождения частиц существует, но не реализуется.

Уравнения Эйнштейна на сингулярной гиперповерхности впервые были получены В. Израэлем [35—37] для времениподобных гиперповерхностей, и затем в работах [38; 39] обобщены также на светоподобные. Пространственноподобные тонкие оболочки в общей теории относительности были использованы, в частности, для феноменологического описания космологических фазовых переходов [40—42] и для описания скачкообразного перехода к фазе де Ситтера внутри черных дыр [43; 44]. Аналог этой модели для квадратичной гравитации исследован в настоящей работе, а именно, пространственноподобный двойной слой, характеризующий фазовый перехода к де Ситтеру под горизонтом черной дыры Шварцшильда. При этом показано, что в случае квадратичной гравитации невозможна сшивка этих метрик с помощью тонкой оболочки в силу условий Лихнеровича.

Как отмечено выше, уравнения движения сингулярной гиперповерхности в квадратичной гравитации впервые появились в наиболее общем виде в статьях Дж. М. М. Сеновийи, при этом отдельные частые случаи были исследованы раньше или параллельно с вышеупомянутыми работами Дж. М. М. Сеновийи. Так тонкие оболочки в квадратичной гравитации были изучены еще в статье Х.Х. фон Боржешковского и В.П. Фролова [45], а сингулярные гиперповерхности для гравитации Гаусса-Бонне - в работах [46; 47] .

В статье [32] было показано, что уравнения движения времениподобной и пространственноподобной сингулярной гиперповехности в квадратичной гравитации можно вывести, используя только принцип наименьшего действия. Основным преимуществом такого метода является отсутствие производной δ-функции в явном виде в ходе вычислений. Данная диссертация обобщает результаты, представленные в публикации [32], на произвольные гиперповерхности, включая светоподобные, а также здесь разобран частный случай сферической симметрии для всех типов гиперповерхностей.

Одно из сочетаний коэффициентов квадратичных членов в лагранжиане квадратичной гравитации крайне примечательно. Это случай конформной гравитации, когда квадратичная часть гравитационного лагранжиана сводится к квадрату тензора Вейля, который является бесследовой частью тензора кривизны. Тензор Вейля инвариантен относительно локального конформного преобразования, при котором весь метрический тензор умножается на некоторую функцию, называемую конформным фактором. Тензор Баха [48], появляюший-ся в гравитационных уравнений движения, при локальном конформном преобразовании умножается на степень конформного фактора, зависящую от размерности. Приведенное выше соображение особенно важно в случае сферической симметрии, поскольку позволяет использовать радиус сферы в качестве конформного фактора. Определенные классы решений сферически-симметричной конформной гравитации были получены в статье [49]. В данной диссертации использованы вакуумные решения и решения типа Вайдья из вышеупомянутой работы для исследования времениподобных и пространственноподобных тонких оболочек и двойных слоев в сферически-симметричной конформной гравитации [50] .

Целью данной работы является изучение сингулярных гиперповерхностей произвольного типа в квадратичной гравитации, сравнении их с аналогами в общей теории относительности и нахождении физической интерпретации принципиальных отличий.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Вывести уравнения движения для сингулярных гиперповерхностей произвольного типа в квадратичной гравитации, основываясь на принципе наименьшего действия.
2. Изучить особенности полученных уравнений, возможные модификации условий Лихнеровича и критерии существования двойного слоя отдельно для времениподобных, пространственноподобных и светоподобных гиперповерхностей, а также для частного случая сферической симметрии.
3. Исследовать сшивки сферически-симметричных решений конформной гравитации, в частности, вакуумных решений и решений типа Вайдья, для всех возможных видов сингулярных гиперповерхностей.
4. Получить поверхностный тензор энергии импульса непосредственно из лагранжиана материи, а именно, лагранжиана идеальной жидкости с переменным числом частиц.
5. Рассмотреть различные варианты закона рождения частиц, включенного в лагранжиан, в частности, в отсутсвии внешних полей и при наличии скалярного поля, а также его влияние на «внешнее давление» и «внешний поток».

Основные положения, выносимые на защиту

1. Получены уравнения движения для сингулярной гиперповерхности произвольного типа в квадратичной гравитации и их ограничение на светоподобный и сферически-симметричный случаи.
2. Найдены критерии существования двойного слоя и возможные модификации условий Лихнеровича.

3. Доказано отсутствие светоподобного двойного слоя в сферически-симметричном случае при выполнении условий Лихнеровича.
4. Проведен сравнительный анализ сингулярных гиперповерхностей, описывающих сшивки сферически-симметричных решений конформной гравитации для времениподобного, пространственноподобного и светоподобного случаев и их аналогов в общей теории относительности.
5. Найдена физическая интерпретация для «внешнего давления» и «внешнего потока» на примере лагранжиана идеальной жидкости с переменным числом частиц.

Научная новизна

1. Впервые уравнения движения сингулярной гиперповерхности в квадратичной гравитации получены в форме, которая применима к произвольному типу гиперповерхностей, включая светоподобные, с помощью принципа наименьшего действия.
2. С помощью оригинального подхода для всех типов гиперповерхностей найдены критерии, которые определяют, является гиперповерхность двойным слоем или сводится к тонкой оболочке.
3. Для светоподобных гиперповерхностей впервые показано отсутствие «внешнего давления», а также выявлены требования, при которых снимаются ограничения, заданные условиями Лихнеровича. Продемонстрирована невозможность существования сферически-симметричного светоподобного двойного слоя в случае выполнения условий Лихнеровича.
4. В отличие от предшествующих работ по этой теме для сферически-симметричных сингулярных гиперповерхностей произвольного типа в квадратичной гравитации показано, что систему уравнений движения, наряду с условиями Лихнеровича, можно записать с помощью инвариантов сферической геометрии, а именно, радиуса, двумерной скалярной кривизны $\widetilde{R}$ и двумерного лапласиана от радиуса $\widetilde{\Box}r$. В этом случае критерием того, что сингулярная гиперповерхность представляет из себя тонкую оболочку, является непрерывность $\widetilde{R}$ и $\widetilde{\Box}r$.
5. Исследованы сферически-симметричные сингулярные гиперповерхности всех типов, разделяющие два решения сферически-симметричной конформной гравитации, не рассматриваемые ранее в литературе по

данной теме, а именно, использованы различные вакуумы и решения типа Вайдья. С помощью сшивок соответствующих решений изучены аналоги для конформной гравитации таких физических моделей, как «горение вакуума», фазовый переход, коллапс сферически-симметричной тонкой оболочки.

6. До настоящего времени не была явно продемонстрирована физическая интерпретация «внешнего давления» и «внешнего потока». В диссертации на примере действия идеальной жидкости с переменным числом частиц показано, что «внешнее давление» присутствует даже в модели с постоянным числом частиц и ответственно за поверхностное давление и поверхностную плотность энергии для времениподобной и пространственноподобной гиперповерхностей соответственно. В то же время «внешний поток» ассоциирован со слагаемым в лагранжиане материи, ответственным за рождение частиц.
7. Феноменологическое описание рождения частиц впервые применяется к сингулярным гиперповерхностям в квадратичной гравитации в данной работе. В частности, показано, что при введении внешнего скалярного поля в закон рождения, процесс рождения может происходить непосредственно на сингулярной гиперповерхности, несмотря на то, что само скалярное поле напрямую не вносит вклад в поверхностный тензор энергии-импульса.

Научная и практическая значимость

Изучение сингулярных распределений материи крайне важно, так как позволяет построить дополнительный класс точных решений на основе метрик, которые являются известными решениями уравнений движения в объеме для соответствующей теории гравитации. Кроме того, сингулярные гиперповерхности применяются при описании широкого класса моделей, характеризующих концентрацию материи или энергии на определенной гиперповерхности, таких как доменные стенки, браны, границы фазовых переходов, гравитационные ударные волны и прочие.

Квадратичная гравитация, в свою очередь, используется при описании инфляции и для учета квантовых эффектов в однопетлевом приближении. Таким образом, полученные в данной работе уравнения движения сингулярной гиперповерхности в квадратичной гравитации и их частные случаи для сферической симметрии и конформной гравитации объединяют в себе значимость обеих вышеупомянутых тем. Более того, практическую ценность имеет предложенная в диссертации методика вывода уравнений движения для сингулярной гиперповерхности произвольного типа, включая светоподобные, так как ее можно применить к произвольной теории гравитации.

Методы исследования

При подготовке диссертации были использованы методы дифференциальной геометрии, уравнений в частных производных и вариационного исчисления.

Апробация работы

Основные результаты диссертации прошли апробацию на следующих научных конференциях и семинарах:

1. XXVIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов». «Светоподобные сингулярные гиперповерхности в квадратичной гравитации» (Москва, 12-23 апреля 2021 г.)
2. XXII Международная научная конференция Физические интерпретации теории относительности - 2021. «Светоподобные тонкие оболочки и двойные слои в квадратичной гравитации» (Москва, 05-09 июля 2021 г.)
3. Symmetry 2021 - The 3rd International Conference on Symmetry. “Lightlike singular hypersurfaces in quadratic gravity” (онлайн, 8-13 августа 2021 г.)
4. XXIX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов». «Сферически-симметричные сингулярные гиперповерхности в конформной гравитации» (Москва, 11-22 апреля 2022 г.)
5. The International Conference on Quantum Field Theory, High-Energy Physics, and Cosmology. “Spherically symmetric black holes and physical vacuum” (Дубна, 18-21 июля 2022 г.)
6. The VII International Conference “Models in Quantum Field Theory” (MQFT-2022). “Phenomenological description of particle production: Riemannian geometry + scalar field” (Санкт-Петербург, 10-14 октября 2022 г.)
7. Семинар кафедры теоретической физики МФТИ. «Сингулярные гиперповерхности в квадратичной гравитации» (Долгопрудный, 2 декабря 2022 г.)

8. Семинар отдела математической физики МИАН. «Сингулярные гиперповерхности в квадратичной гравитации» (Москва, 1 июня 2023 г.)
9. Семинар по гравитации и космологии им. А.Л. Зельманова ГАИШ МГУ. «Сингулярные гиперповерхности в квадратичной гравитации» (Москва, 8 ноября 2023 г.)

Личный вклад

Все представленные в диссертации результаты получены лично автором, при этом постановка большинства задач была выполнена научным руководителем.

Достоверность результатов

Основные статьи по теме диссертации были опубликованы в признанных международных изданиях, пройдя процедуру рецензирования. Достоверность результатов диссертаци подтверждается корректным применением выбранного математического аппарата, а также их соответствием результатам, полученным в работах других исследователей.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 печатных изданиях [50—54], в журналах, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 157 страниц. Список литературы содержит 91 наименование.

Глава 1. Полевые уравнения для пространства-времени с сингулярной гиперповерхностью

1.1 Условия Лихнеровича в квадратичной гравитации

Добавление членов высшего порядка по кривизне является естественным обобщением теории гравитации Эйнштейна. В первом приближении эти поправки дают квадратичные члены, соответственно, действие квадратичной гравитации в общем случае можно представить в виде:

$$\begin{aligned} S_q &= -\frac{1}{16\pi}\int_\Omega \sqrt{-g} L_q \, d^4x = \\ &= -\frac{1}{16\pi}\int_\Omega \sqrt{-g}\left(\alpha_1 R_{abcd}R^{abcd} + \alpha_2 R_{ab}R^{ab} + \alpha_3 R^2 + \alpha_4 R + \alpha_5 \Lambda\right) \, d^4x, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где g - детерминант метрики, компоненты которой в данном случае выступают в качестве динамических переменных, α_i - произвольные константы, $R^a_{\ bcd}$ - тензор Римана:

$$R^a_{\ bcd} = \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^a_{ce}\Gamma^e_{bd} - \Gamma^a_{de}\Gamma^e_{bc}\,, \quad (1.2)$$

$R_{ab} = R^c_{\ acb},\ R = R^a_a$ - тензор Риччи и скалярная кривизна, соответственно, Γ^a_{bc} - компоненты связности.

В данной работе используется сигнатура $(+, -\ , -\ , -)$ и геометрические единицы, в которых $c = G = 1$. Кроме того, рассматриваются исключительно псевдоримановы многообразия с нулевыми кручением и неметричностью: $\nabla_a g_{bc} = 0, \quad \Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{cb} = 0$, то есть, выбранная связность совпадает со связностью Леви-Чивиты: $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}\left(\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}\right)$.

Для определенных задач квадратичную часть лагранжиана удобно представить в виде суммы квадрата тензора Вейля, слагаемого Гаусса-Бонне и квадрата скалярной кривизны:

$$\begin{aligned} L_q = \frac{1}{2}\left(4\alpha_1 + \alpha_2\right) C^2 - \frac{1}{2}\left(2\alpha_1 + \alpha_2\right) GB + \\ + \frac{1}{3}\left(3\alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_2\right) R^2 + \alpha_4 R + \alpha_5 \Lambda\,, \end{aligned} \quad (1.3)$$

здесь использованы обозначения:

$$C^2 = C_{abcd}C^{abcd} = R_{abcd}R^{abcd} - 2R_{ab}R^{ab} + \frac{1}{3}R^2, \tag{1.4}$$

$$GB = R_{abcd}R^{abcd} - 4R_{ab}R^{ab} + R^2. \tag{1.5}$$

Тензор Вейля определяется следующим образом:

$$C_{abcd} = R_{abcd} + \frac{1}{2}\left(R_{ad}\, g_{bc} + R_{bc}\, g_{ad} - R_{ac}\, g_{bd} - R_{bd}\, g_{ac}\right) + \\ + \frac{1}{6} R\left(g_{ac}\, g_{bd} - g_{ad}\, g_{bc}\right). \tag{1.6}$$

Рассмотрим четырехмерное пространство-время Ω, разделенное на две области - Ω^+ и Ω^- - с различной геометрией сингулярной гиперповерхностью Σ_0. Сингулярной гиперповерхностью будем называть гиперповерхность, на которой тензор кривизны Римана имеет сингулярную составляющую. В данной работе рассматриваются случаи, когда тензор Римана содержит слагаемые, пропорциональные θ-функции или δ-функции.

Существует два подхода к определению пространства-времени с сингулярной гиперповерхностью произвольного типа: “Cut-and-paste” формализм, разработанный Р. Пенроузом [55], и теория сшивки Ж. Дармуа [56], которая используется в данной работе.

Пусть $(\Omega^\pm, g^\pm)$ - два ориентируемых псевдоримановых 4-мерных многообразия класса C^5, то есть $g^\pm \in C^4$, (Σ,γ) - 3-мерное ориентируемое многообразие класса C^4, и заданы вложения Σ в $\Omega^\pm$ - $\Phi^\pm : \Sigma \to \Omega^\pm, \quad \Phi^\pm(\Sigma) = \Sigma^\pm, \quad \Phi^\pm \in C^4$, такие, что $\Sigma^\pm \in \partial\Omega^\pm$. При этом локально гиперповерхности $\Phi^\pm(\Sigma)$ также могут быть заданы уравнениями $n^\pm(x^\pm) = 0$, где $n^\pm : \Omega^\pm \to \mathbb{R}$. Вложения $\Phi^\pm$ определяют индуцированную метрику на $\Sigma^\pm$: $\gamma^\pm = \Phi^{\pm *}(g^\pm)$, а также отображения между касательными пространствами:

$$d\Phi^\pm|_p : T_p\Sigma \to T_{\Phi^\pm(p)}\Sigma^\pm, \quad p \in \Sigma,$$

$$d\Phi^\pm|_p\left(\frac{\partial}{\partial y^i}|_p\right) = \frac{\partial \Phi^{\pm a}}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^{\pm a}}|_{\Phi^\pm(p)} \equiv e_i^{\pm a}\frac{\partial}{\partial x^{\pm a}}|_{\Phi^\pm(p)} \equiv \vec{e}_i^{\,\pm}|_{\Phi^\pm(p)},$$

где $\{\frac{\partial}{\partial y^i}|_p\}$ - базис $T_p\Sigma$, $\{\vec{e}_i^{\,\pm}|_{\Phi^\pm(p)}\}$ - базис $T_{\Phi^\pm(p)}\Sigma^\pm$, $i = 1,..,3, \quad a = 0,..,3$.

Отображение $\Phi := \Phi^+ \circ (\Phi^-)^{-1}$ обеспечивает отождествление между точками Σ^+ and Σ^- и, следовательно, между касательными пространствами $T_q\Sigma^-$ и $T_{\Phi(q)}\Sigma^+$, где $q \in \Sigma^-$, $\Phi(q) \in \Sigma^+$. Идентификация полных касательных пространств $T_q\Omega^-$ и $T_{\Phi(q)}\Omega^+$ осуществляется через отождествление векторов $\vec{\xi}^-|_q$ и $\vec{\xi}^+|_{\Phi(q)}$ (riggings), где $\vec{\xi}^{\pm}$ - векторные поля, заданные на $\Sigma^{\pm}$ и всюду трансверсальные $\Sigma^{\pm}$, то есть наборы векторов$\{\vec{\xi}^-|_q,\vec{e_i}^-|_q\}$ и $\{\vec{\xi}^+|_{\Phi(q)},\vec{e_i}^+|_{\Phi(q)}\}$ составляют базисы на $T_q\Omega^-$ и $T_{\Phi(q)}\Omega^+$, соответственно [57; 58]. Для времениподобных и пространственноподобных гиперповерхностей $\Sigma^{\pm}$ $\vec{\xi}^{\pm}$ - нормальные векторные поля к гиперповерхности. Так как существует некоторая свобода при выборе $\vec{\xi}^{\pm}$, то можно также согласовать ориентацию вышеупомянутых базисов. Полученный таким образом, то есть, после отождествления $\Sigma^{\pm}$ и соответсвующих касательных расслоений, объект Ω представляет из себя пространство-время с сингулярной гиперповерхностью $\Sigma_0 \equiv \Sigma^+ = \Phi(\Sigma^-)$.

Как будет показано далее, для того, чтобы лагранжиан гравитации был корректно определен на Ω, как для общей теории относительности, так и для квадратичной гравитации, необходимо, чтобы метрика на Σ_0 была непрерывной:

$$< \vec{e_i}^-,\vec{e_j}^- >_{g^-}=< \vec{e_i}^+,\vec{e_j}^+ >_{g^+}= \gamma_{ij}\,, \quad < \vec{e_i}^-,\vec{\xi}^- >_{g^-}=< \vec{e_i}^+,\vec{\xi}^+ >_{g^+},$$

$$< \vec{\xi}^-,\vec{\xi}^- >_{g^-}=< \vec{\xi}^+,\vec{\xi}^+ >_{g^+},$$

где скобки $<>_g$ обозначают скалярное произведение. Если выполняются данные условия, то существует C^1 атлас на всем Ω. Это означает, что существуют координаты, непрерывные в окрестности гиперповерхности Σ_0, в которых метрика во всем Ω непрерывна на Σ_0. Производные метрики при этом могут испытывать скачок, так в общем случае: $K^+_{ij} = -e^{+a}_i\, e^{+b}_j \nabla^+_a \xi^+_b \neq K^-_{ij}$.

Покажем, что координаты $\{x^a\}$, которые удовлетворяют данным требованиям, всегда можно построить, если рассматриваемая гиперповерхность не меняет тип, то есть, индуцированная метрика Σ_0 не меняет сигнатуры. Случай времениподобных и пространственноподобных гиперповерхностей разобран в работе [42]. Рассмотрим основные моменты доказательства, представленного в данной статье, а также обобщим его на светоподобные гиперповерхности.

Есть две произвольные системы координат $\{x^{\pm a}\}$ в областях $\Omega^{\pm}$. Поверхность Σ_0 задана в $\Omega^{\pm}$ уравнениями:

$$F^{\pm}(x^{\pm a}) = 0, \tag{1.7}$$

или с помощью параметрических соотношений:

$$x^{\pm a} = x^{\pm a}(y^{\pm i}),$$

где $\left\{y^{\pm i}\right\}$ - произвольные внутренние координаты на гиперповерхности Σ_0.

Временно опустим обозначение $\pm$, предполагая, что описанные далее действия и определения выполняются для обеих областей $\Omega^{\pm}$.

Определим нормаль к гиперповерхности Σ_0 следующим образом:

$$N_a = \frac{\partial}{\partial x^a} n(x), \tag{1.8}$$

где функция $n(x)$ равна:

$$n(x) = F^{\pm}(x^{\pm}) \left(|g^{\pm ab} \frac{\partial}{\partial x^{\pm a}} F(x^{\pm}) \frac{\partial}{\partial x^{\pm b}} F(x^{\pm})| \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{1.9}$$

для времениподобной или пространственноподобной гиперповерхности, в то время как для светоподобной гиперповерхности:

$$n^{\pm}(x^{\pm}) = F^{\pm}(x^{\pm}). \tag{1.10}$$

Такое определение вектора нормали необходимо для выполнения условия нормировки:

$$N_a \, N^a = \varepsilon, \tag{1.11}$$

где $\varepsilon = -1$ для времениподобной гиперповерхности, 1 - для пространственноподобной и 0 для светоподобной.

При описании геометрии гиперповерхностей важными характеристиками являются первая и вторая квадратичные формы гиперповерхности, они же индуцированная метрика γ_{ij} и внешняя кривизна K_{ij}:

$$\gamma_{ij} = g_{ab} \, e^a_i \, e^b_j, \quad K_{ij} = -\nabla_a N_b \; e^a_i \, e^b_j = -\left(\pounds_N g_{ab}\right) \, e^a_i \, e^b_j, \quad i,j = 1,..,3, \tag{1.12}$$

где $e^a_i = \frac{\partial x^a}{\partial y^i}$, $\pounds_N$ обозначает производную Ли тензорного поля g_{ab} по направлению векторного поля N^a.

Перейдем в областях $\Omega^{\pm}$ к координатам $\left\{n, y^{\pm i}\right\}$, в которых уравнение поверхности Σ_0 выглядит как: $n^{\pm} = 0$. Поскольку у нас есть четыре произвольных функции преобразования координат в каждой области, для времениподобной или пространственноподобной гиперповерхности мы можем привести метрику к виду:

$$ds^2 = \varepsilon dn^{\pm 2} + \gamma^{\pm}_{ij}\, dy^{\pm i} dy^{\pm j}, \tag{1.13}$$

несложно проверить, что $\gamma^{\pm}_{ij}$ действительно соответствует введенной выше индуцированной метрике на Σ_0 в $\Omega^{\pm}$ для данного случая. Координаты, в которых метрика в окрестности времениподобной (пространственноподобной) гиперповерхности имеет соответствующий вид называются нормальными гауссовыми координатами.

В случае светоподобной гиперповерхности можно воспользоваться тем фактом, что в специальных координатах $\left\{n,\lambda,\theta^A\right\}$ обратная метрика непосредственно на Σ_0 выглядит как:

$$g^{\pm n\lambda} = 1, \quad g^{\pm nn} = 0, \quad g^{\pm nA} = 0, \quad g^{\pm\lambda\lambda} = 2l^{\pm\lambda},$$
$$g^{\pm\lambda A} = l^{\pm A}, \quad g^{\pm AB} = \sigma^{\pm AB}, \quad A,B = 2{,}3. \tag{1.14}$$

Здесь $\left\{y^{\pm i}\right\} = \left\{\lambda^{\pm},\theta^{\pm A}\right\}$ - внутренние координаты на Σ_0. Подробности приведения метрики к виду (1.14) для светоподобной гиперповерхности будут изложены ниже.

Условием непрерывного согласования частей метрики $g^{\pm}_{ab}(n^{\pm},y^{\pm})$ на рассматриваемой времениподобной (пространственноподобной) гиперповерхности является существование замены координат $y^{+} = y^{+}(y^{-})$, такой, что:

$$\gamma^{+}_{ij}(0,y^{+}) = \gamma^{-}_{lk}(0,y^{-})\frac{\partial y^{-k}}{\partial y^{+i}}\frac{\partial y^{-l}}{\partial y^{+j}}. \tag{1.15}$$

Такую замену всегда можно построить, если в каждой точке $p \in \Sigma_0$ по обе стороны от гиперповерхности привести индуцированную метрику γ_{ij} к нормальному виду. Затем общую для окрестностей Σ_0 в $\Omega^{\pm}$ координату n всегда можно сконструировать, непрерывно соединяя $n^{\pm}$, так как $n^{+} = n^{-} = 0$ на гиперповерхности, а в качестве оставшихся координат выбрать $\left\{y^{+i}\right\}$ или $\left\{y^{-i}\right\}$. Таким образом, получим систему координат $\{x^a\} = \left\{n,y^i\right\}$, непрерывную в окрестности рассматриваемой гиперповерхности, в которой также непрерывны компоненты метрики непосредственно на Σ_0 .

Для светоподобной гиперповерхности можно записать аналогичные (1.15) уравнения для обратной метрики:

$$g^{+ij}(0, y^+) = g^{-kl}(0, y^-) \frac{\partial y^{+i}}{\partial y^{-l}} \frac{\partial y^{+j}}{\partial y^{-k}}, \tag{1.16}$$

соответственно, построение искомой системы координат все также возможно, если матрицы $g^{\pm ij}$ являются невырожденными. Невырожденнность соответствующих матриц всегда можно обеспечить за счет того, что вспомогательный светоподобный вектор l^a определен неоднозначно, а именно, как показано в [59], этот вектор сохраняет требуемые свойства при сдвиге:

$$l^a \to \widetilde{l}^a = l^a + c\,N^a + c^A\,e^a_A\,,$$

где $c = \frac{1}{2}\,c_A\,c^A$, c^A - произвольный двумерный вектор.

Существование координат, непрерывных в окрестности гиперповерхности, в которых метрика непрерывна на Σ_0 означает, что Ω, несмотря на присутствие сингулярной гиперповерхности, является гладким многообразием.

В новой системе коориднат уравнение гиперповерхности можно переписать в виде: $n = 0$, причем будем считать, что область Ω^- соответсвует отрицательным n, а Ω^+ - положительным. В этом случае внешняя нормаль к Σ_0, то есть, нормаль, направленная от Ω^- к Ω^+, определяется следующим образом:

$$N_a = \epsilon \partial_a n\,, \tag{1.17}$$

где $\epsilon = \varepsilon$ для времениподобных и пространственноподобных гиперповерхностей и $\epsilon = 1$ - для светоподобных. Подобное определение далее будет необходимо для применения теоремы Стокса и продиктовано условием: $N^a \partial_a n \geq 0$.

При переходе от произвольных координат в $\Omega^\pm$ к $\{n, y^i\}$ выполняются соотношения: $g^{nn} = g^{\pm ab} \frac{dn^\pm}{dx^{\pm a}} \frac{dn^\pm}{dx^{\pm b}} = N^{\pm a} N_{\pm a}$, т.е., $g^{nn}|_{\Sigma_0} = \varepsilon$ для времениподобной или пространственноподобной гиперповерхностей, $g^{nn}|_{\Sigma_0} = 0$ - для светоподобной.

Прежде, чем воспользоваться координатами $\{n, y^i\}$, необходимо описать действие гравитации для рассматриваемой проблемы и его вариацию в произвольных координатах, непрерывных в окрестности Σ_0, и уже после нахождения соответствующих уравнений поля переходить к той или иной специальной системе координат.

Для применения теоремы Стокса к гиперповерхности произвольного типа покажем, что направленный элемент поверхности dS_c для трехмерной гиперповерхности Σ_0 произвольного типа, заданной уравнением $F(x) = 0$ в произвольных координатах $\{x^a\}$, на гладком четырехмерном многообразии Ω в координатах $\{n,y^i\}$ равен:

$$dS_c = \epsilon N_c \sqrt{|h|} d^3y,$$

где $n(x)$ - функция заданная соотношениями (1.9) и (1.10) для времениподобной(пространственноподобной) и светоподобной гиперповерхности соответственно, N_c - внешняя нормаль, определенная (1.17), $\{y^i\}$, $i = 1,2,3$ - произвольные внутренние координаты на Σ_0, $h(y^i) = g(0,y^i)$ - ограничение детерминанта четырехмерной метрики на Σ_0.

По определению: $dS_c = \varepsilon_{cabd}\, e^a_1\, e^b_2\, e^d_3\, d^3y$, где ε_{cabd} - символ Леви-Чивиты, $e^a_i = \frac{dx^a}{dy^i}$. На знак ε_{cabd} влияет порядок нумерации координат y^i, который в общем случае произвольный, поэтому необходимо уточнить, что нумерация внутренних координат гиперповерхности выбирается таким образом, чтобы выполнялось соотношение:

$$N^c\, dS_c \geq 0\,,$$

также для определенности зафиксируем, что именно нулевая координата соответствует функции $n(x)$.

В силу антисимметричности символа Леви-Чевиты:

$$e^c_i\, \varepsilon_{cabd}\, e^a_1\, e^b_2\, e^d_3 = 0,$$

это означает, что величина $\varepsilon_{cabd}\, e^a_1\, e^b_2\, e^d_3$ пропорциональна N_c. Коэффициент находится непосредственным вычислением этой формы в координатах $\{n,y^i\}$:

$$\varepsilon_{cabd}\, e^a_1\, e^b_2\, e^d_3 = \varepsilon_{cabd}\, \delta^a_1\, \delta^b_2\, \delta^d_3 = \varepsilon_{c123} = \sqrt{|g(0,y)|}\, \delta^0_c = \epsilon \sqrt{|h|}\, N_c.$$

Отметим, что для времениподобной и пространственноподобной гиперповерхностей функция $h(y)$ совпадает с детерминантом индуцированной метрики γ_{ij}, определенной соотношениями (1.12), но для светоподобной гиперповерхности детерминант γ_{ij} равен нулю.

Для всех физических моделей, которые рассматриваются в данной работе, тензор энергии-импульса полей материи имеет следующую структуру:

$$T^{ab} = S^{ab}\,\delta(n(x)) + T^{+ab}\,\theta(n(x)) + T^{-ab}\,\theta(-n(x)) = S^{ab}\,\delta(n(x)) + T^{ab}(\pm), \quad (1.18)$$

где S^{ab} - поверхностный тензор энергии-импульса, $T^{\pm ab}$ - значения компонент тензора энергии-импульса, записанных в областях $\Omega^{\pm}$, $\delta(n(x))$, $\theta(-n(x))$ - дельта- и тета-функции, соответственно. Эти обобщенные функции на многообразии Ω определяются как линейные функционалы из пространства пробных функций $\mathcal{D}(\Omega)$ в $\mathbb{R}$, которые действуют на произвольную пробную функцию Y следующим образом:

$$< \theta, Y > \equiv \int_{\Omega^+} Y\,\sqrt{|g|}\,d^4x, \quad < \delta, Y > \equiv \int_{\Sigma_0} Y\,\sqrt{|\gamma|}\,d^3y,$$

при этом $\mathcal{D}(\Omega)$ - множество C^{∞} скалярных функций с компактным носителем на многообразии Ω. Кроме того, будем считать, что T^{ab} не содержит других сингулярных членов, в частности, производных δ-функции.

В отличие от общей теории относительности, компоненты поверхностного тензора энергии-импульса S^{nn} и S^{ni} для квадратичной гравитации в общем случае не равны нулю. Этот факт впервые был отмечен в работах Дж. М. М. Сеновийи [26—31], где S^{nn} и S^{ni} определяются как «внешнее давление» и «внешний поток», соответственно.

В общей теории относительности уравнения поля имеют второй порядок по производным метрического тензора. Появление δ-функции в T^{ab} приводит к ее появлению в тензоре Римана, тогда $[\Gamma^a_{bc}] \neq 0$, в таком случае Σ_0 называется тонкой оболочкой. Соответствующие условия согласования, связывающие эти скачки с тензором S^{ab}, впервые были получены В. Израэлем. Если в T^{ab} присутствует только скачок, то соответствующий скачок кривизны описывает ударную гравитационную волну, сопровождаемую ударной волной в веществе.

В квадратичной гравитации уравнения поля имеют четвертый порядок по производным метрического тензора. Если определенные компоненты тензора кривизны непрерывны на Σ_0, тогда ее вторая производная может содержать не более чем δ-функцию, которой соответвтвует δ-функция в T_{ab}, тогда Σ_0 - тонкая оболочка. Если же эти компоненты тензора кривизны испытывают скачок на Σ_0, их вторая производная содержит δ'-функцию, тогда Σ_0 - двойной слой. Скачок кривизны, описывающий гравитационную ударную волну, может сопровождаться или не сопровождаться ударной волной в распределении вещества, т.е. в квадратичной гравитации может существовать чисто гравитационная ударная волна.

Термин двойной слой происходит из электростатики. В классическом электромагнетизме поверхностное распределение заряда создает электрическое поле, у которого компонента, нормальная к поверхности, содержит скачок, а двухслойное (или дипольное) распределение зарядов, которое может быть смоделировано двумя противоположно заряженными очень тонкими пластинами бесконечного размера, предполагает скачок уже в электростатическом потенциале. Математически первое может быть надлежащим образом описано с помощью дельта-функции Дирака в плотности заряда, поддерживаемой на поверхности, и имеет аналог в гравитации в виде тонких оболочек, которые возникают как в общей теории относительности, так и в квадратичной гравитации, и описывают концентрацию вещества или энергии на некоторой гиперповерхности. Аналогично, дипольное распределение зарядов может быть математически выражено с помощью производной дельта-функции, однако у него нет аналога в общей теории относительности из-за положительности масс и притяжения гравитации. Тем не менее, как показано в вышеупомянутых статьях Дж. М. М. Сеновийи, двойные слои не запрещены в некоторых теориях гравитации, в частности, в квадратичной гравитации.

Метрику во всем пространстве-времени Ω можно формально записать в виде суммы:

$$g_{ab} = g^+_{ab}\,\theta(n(x)) + g^-_{ab}\,\theta(-n(x)) = g_{ab}(\pm), \tag{1.19}$$

при дифференцировании выражения (1.19) возникает слагаемое с дельта-функцией:

$$\partial_c g_{ab} = \partial_c g_{ab}(\pm) + \partial_c n(x)\,\delta(n(x))\,[g_{ab}], \tag{1.20}$$

где ∂_c означает частную производную. Здесь и далее используются стандартные обозначения для разрывов, то есть для любой функции f на Ω, у которой существуют пределы по обе стороны от Σ_0: $[f](p) \equiv lim_{x\to p} f^+(x) - lim_{x\to p} f^-(x),\ p \in \Sigma_0,\ x \in \Omega,\ f^\pm(x)$ — ограничения функции f на $\Omega^\pm$, соответственно, а также введено обозначение $f(\pm) = f^+(x)\,\theta(n(x)) + f^-(x)\,\theta(-n(x))$.

Выше было продемонстрировано, что всегда возможно найти координаты $\{x^a\}$, в которых скачок компонент метрики на гиперповерхности равен нулю - $[g_{ab}] = 0$. Это условие также необходимо для того, чтобы с помощью (1.19) выписать символы Кристоффеля, так как произведение тета-функции на дельта-функцию неопределено. В этом случае получим следующее выражение для компонент связности:

$$\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{bc}(\pm) \tag{1.21}$$

из которого следует, что:

$$R^a_{\ bcd} = R^a_{\ bcd}(\pm) + \{\partial_c n(x)\,[\Gamma^a_{bd}] - \partial_d n(x)\,[\Gamma^a_{bc}]\}\,\delta(n(x))\,. \tag{1.22}$$

Для действия Эйнштейна-Гилберта и соответствующего ему уравнения движения выражение (1.22) для тензора Римана, содержащее дельта-функцию, было бы приемлемым, потому что в этом случае сингулярную часть тензора Римана можно непосредственно связать с поверхностной частью тензора энергии-импульса. Этот факт впервые был продемонстрирован в работах В. Израэля [35—37]. В квадратичной гравитации для того, чтобы избежать появления неопределенных функций: $\delta^2(n(x))$ и $\delta(n(x))\theta(n(x))$ в лагранжиане, необходимо наложить дополнительные ограничения, а именно, условия Лихнеровича [60]:

$$[\Gamma^a_{bc}] = 0. \tag{1.23}$$

1.2 Вывод уравнений Израэля с помощью принципа наименьшего действия

Прежде, чем переходить к изучению сингулярных гиперповерхностей в квадратичной гравитации, покажем, как можно вывести уравнения Израэля с помощью принципа наименьшего действия.

Гравитационная часть действия в данном случае:

$$S_{GR} = -\frac{1}{16\pi}\int_\Omega \sqrt{|g|}L_{GR}\,d^4x = -\frac{1}{16\pi}\int_\Omega \sqrt{|g|}\,(\alpha_4\,R + \alpha_5\,\Lambda)\ d^4x\,,$$

если Ω имеет границу, то есть $\partial\Omega^{\pm}/\Sigma_0 \neq \emptyset$, то к этому действию необходимо добавить граничный член Гиббонса-Хокинга-Йорка для того, чтобы устранить вклад от вариации δR_{ab} на $\partial\Omega$. Здесь рассматривается вариация с закрепленными концами, то есть: $\delta g^{\pm ab}|_{\partial\Omega^{\pm}/\Sigma_0} = 0, \quad \delta g^{+ab}|_{\Sigma_0} = \delta g^{-ab}|_{\Sigma_0}$, а также не только сама метрика, но и ее вариация считается непрерывной на Σ_0: $\delta g^{+ab}|_{\Sigma_0} = \delta g^{-ab}|_{\Sigma_0}$, поэтому далее будут опущены обозначения $\pm$ для метрики и ее вариации.

С помощью выражения (1.22) для тензора Римана получаем скалярную кривизну для многообразия с сингулярной гиперповерхностью:

$$R = R(\pm) + g^{bd}\, E_{bd}\, \delta(n(x))\,.$$

Здесь для удобства введен дополнительный тензор: $E_{bd} = \partial_a n\, [\Gamma^a_{bd}] - \partial_d n\, [\Gamma^a_{ba}]$. Интеграл действия разбивается на три части:

$$S_{GR} = -\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega^+}\sqrt{|g|}L^+_{GR}\, d^4x - \frac{1}{16\pi}\int_{\Omega^-}\sqrt{|g|}L^-_{GR}\, d^4x - \\ - \frac{1}{16\pi}\int_{\Sigma_0}\sqrt{|h|}\alpha_4\, E\, d^3y, \quad E = E_{bd}\, g^{bd}\,,$$

где $\sqrt{|h|}\, d^3y$ - форма объема на Σ_0 в произвольных координатах. Исходную задачу можно переформулировать без привлечения обобщенных функций, то есть, рассматривать вариацию S_{GR} по метрике как вариацию по функциям $g^{\pm}_{ab}$: $\delta_g S_{GR} = \frac{\delta S_q}{\delta g^{+ab}}\,\delta g^{+ab} + \frac{\delta S_q}{\delta g^{-ab}}\,\delta g^{-ab}$, с описанными выше граничными условиями, обусловленными непрерывностью метрики и ее вариации на Σ_0. Преимущество такого подхода заключается в том, что полученные уравнения движения представляют из себя уравнения на стандартные функции, а не обобщенные.

Перейдем к варьированию действия для гравитации по обратной метрике:

$$\delta_g\, S_{GR} = -\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega^+}\sqrt{|g|}\left(\delta L^+_{GR} - \frac{1}{2}g_{ac}\, L^+_{GR}\,\delta g^{ac}\right)\, d^4x - \\ - \frac{1}{16\pi}\int_{\Omega^-}\sqrt{|g|}\left(\delta L^-_{GR} - \frac{1}{2}g_{ac}\, L^-_{GR}\,\delta g^{ac}\right)\, d^4x - \\ - \frac{1}{16\pi}\int_{\Sigma_0}\sqrt{|h|}\alpha_4\left(\delta E - \frac{1}{2}g_{ac}\, E\,\delta g^{ac}\right)\, d^3y\,.$$

Вариация скалярной кривизны и E соответственно:

$$\delta R^{\pm} \; = \; \delta g^{bd}\, R^{\pm}_{bd} + g^{bd}\, \delta R^{\pm}_{bd}\,, \quad \delta E \; = \; \delta g^{bd} E_{bd} + g^{bd}\, \{\partial_a n\, [\delta\Gamma^a_{bd}] - \partial_d n\, [\delta\Gamma^a_{ba}]\}\,.$$

Необходимо отметить, что при варьировании уравнение гиперповерхности $n(x) = 0$ считается неизвестным, но фиксированным, т. е., сама функция $n(x)$ не варьируется.

Воспользовавшись следствием формулы Палатини [61] , получим:

$$g^{bd}\, \delta R^{\pm}_{bd} = g^{bd} \left(\nabla_a \delta\Gamma^{\pm a}_{bd} - \nabla_d \delta\Gamma^{\pm a}_{ab}\right).$$

Если затем записать это слагаемое из δR в составе исходных интегралов:

$$\int_{\Omega^-} \sqrt{|g|} g^{bd} \left(\nabla_a \delta\Gamma^a_{bd} - \nabla_d \delta\Gamma^a_{ab}\right) d^4x \quad + \quad \int_{\Omega^+} \sqrt{|g|} g^{bd} \left(\nabla_a \delta\Gamma^a_{bd} - \nabla_d \delta\Gamma^a_{ab}\right) d^4x\,,$$

и применить теорему Стокса для каждого из интегралов, то окажется, что это слагаемое взаимно сокращается с $\int_{\Sigma_0} \sqrt{|h|} g^{bd}\, \{\partial_a n\, [\delta\Gamma^a_{bd}] - \partial_d n\, [\delta\Gamma^a_{ba}]\}\; d^3y$, потенциальные вклады на $\partial\Omega^{\pm}/\Sigma_0$, как отмечено выше, взаимно сокращаются с граничным членом Гиббонса-Хокинга-Йорка. С учетом всего вышеперечисленного имеем:

$$\begin{aligned}\delta_g\, S_{GR} = -\frac{1}{16\pi} \int_{\Omega^+} \sqrt{|g|}\, \delta g^{ab} \left(\alpha_4\, G^+_{ab} - \frac{1}{2}\alpha_5\, g_{ab}\, \Lambda\right) d^4x - \\ - \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} \sqrt{|g|}\, \delta g^{ab} \left(\alpha_4\, G^-_{ab} - \frac{1}{2}\alpha_5\, g_{ab}\, \Lambda\right) d^4x + \\ + \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma_0} \sqrt{|h|}\, \delta g_{ab}\, \alpha_4 \left(E^{ab} - \frac{1}{2}\, g^{ab}\, E\right) d^3y\,,\end{aligned}$$

где $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$.

Для тензора энергии-импульса (1.18) вариация действия материи:

$$\begin{aligned}\delta_g S_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega^+} \sqrt{|g|}\, T^+_{ab}\, \delta g^{ab}\, d^4x + \frac{1}{2} \int_{\Omega^-} \sqrt{|g|}\, T^-_{ab}\, \delta g^{ab}\, d^4x - \\ - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} \sqrt{|h|}\, S^{ab}\, \delta g_{ab}\, d^3y. \end{aligned} \qquad (1.24)$$

Согласно принципу наименьшего действия: $\delta\, S_{GR} = -\delta S_m$, соответственно, получаем систему уравнений движения:

$$\alpha_4\, R^{\pm}_{ab} - \frac{1}{2}\alpha_4\, g_{ab}\, R^{\pm} - \frac{1}{2}\alpha_5\, g_{ab}\, \Lambda = 8\pi\, T^{\pm}_{ab}\,, \tag{1.25}$$

$$E^{ab} - \frac{1}{2}\, g^{ab}\, E = \frac{8\pi}{\alpha_4}\, S^{ab}\,. \tag{1.26}$$

После того, как выполнено варьирование и выписаны уравнения движения, можно перейти к конкретным координатам. Выберем систему координат $\{n, y^i\}$, в которой функция $n(x)$, задающее уравнение гипеповерхности, является одной из координат, y^i обозначены все координаты, кроме n. Кроме того, потребуем, чтобы в этих координатах компоненты метрики были непрерывны на гиперповерхности. Примером таких координат могут быть гауссовы нормальные координаты в случае времениподобной (пространственноподобной) гиперповерхности и системы координат, описанные в шестом разделе, для светоподобной.

Следствием стандартных соотношений для преобразования компонент метрики при замене координат с произвольных на $\{n, y^i\}$ является следующая формула:

$$g^{nn}|_{\Sigma_0} = (\partial_a n \partial^a n)|_{\Sigma_0} = \varepsilon.$$

Далее выпишем компоненты тензора E_{ab} и скачки в символах Кристоффеля в координатах $\{n, y^i\}$:

$$E_{bd} = [\Gamma^n_{\ bd}] - \delta^n_d\, \delta^n_b\, [\Gamma^a_{\ an}],$$

$$[\Gamma^a_{\ bc}] = \frac{1}{2}\, g^{ad}\, (\delta^n_c\, [\partial_n g_{bd}] + \delta^n_b\, [\partial_n g_{cd}]) - \frac{1}{2} g^{an} [\partial_n g_{bc}], \quad [\Gamma^a_{\ ba}] = \frac{1}{2} g^{ad} [\partial_n g_{ad}]\, \delta^n_b,$$

$$E = \left(g^{bn}\, g^{nd} - g^{nn}\, g^{bd}\right) [\partial_n g_{bd}] = \left(g^{kn}\, g^{nl} - g^{nn}\, g^{kl}\right) [\partial_n g_{kl}], \quad k,l \neq n.$$

Из представленных выше соотношений следует, что $E^{an} = \frac{1}{2}\, g^{an}\, E$, поэтому компоненты поверхностного тензора энергии-импульса $S^{nn} = S^{ni} = 0$ в общей теории относительности.

Соответственно, уравнения движения сингулярной гиперповерхности в координатах $\{n, y^i\}$:

$$\left(g^{ai}g^{bj} - \frac{1}{2}\,g^{ij}g^{ab}\right)[\Gamma^n_{ab}] + \left(\frac{1}{2}\,g^{ij}g^{nn} - g^{ni}g^{nj}\right)[\Gamma^c_{cn}] = \frac{8\pi}{\alpha_4}\,S^{ij}\,, \quad i,j \neq n\,, \tag{1.27}$$

в такой форме они могут быть использованы как для времениподобной(пространственноподобной) гиперповерхности, так и для светоподобной.

Частным случаем (1.27) являются уравнения Израэля для времениподобной (пространственноподобной) гиперповерхности. В гауссовой нормальной системе координат, где метрика в окрестности гиперповерхности имеет вид: $ds^2 = \varepsilon dn^2 + \gamma_{ij}\,dx^i\,dx^j$, уравнения движения тонкой оболочки сводятся к следующим:

$$\varepsilon\left([K^{ij}] - \gamma^{ij}[K]\right) = \frac{8\pi}{\alpha_4}\,S^{ij}\,,$$

где $K_{ij} = -\frac{1}{2}\partial_n\,\gamma_{ij}$ - тензор внешней кривизны.

Разберем также случай светопободных гиперповерхностей. Для этого воспользуемся описанными в 6 главе специальными координатами для светоподобной гиперповерхности - $\{n,\lambda, \theta^A\}$. В этих координатах уравнения движения (1.27) сводятся к следующим:

$$\frac{1}{2}\left(\delta^i_\lambda\,g^{aj} + \delta^j_\lambda\,g^{ai}\right)[\partial_n g_{a\lambda}] - \frac{1}{2}g^{ij}[\partial_n g_{\lambda\lambda}] - \frac{1}{2}\delta^i_\lambda\,\delta^j_\lambda\,g^{ab}[\partial_n g_{ab}] = \frac{8\pi}{\alpha_4}\,S^{ij}\,,$$

Отдельно рассмотрим сферически-симметричную светоподобную тонкую оболочку. Как будет показано далее, метрика в окрестности подобной гиперповерхности имеет вид: $ds^2 = g_{nn}\,dn^2 + 2g_{n\lambda}\,dnd\lambda - r^2\,d\Omega^2$, поэтому для данного случая получим:

$$[\partial_n r] = -\frac{4\pi r}{\alpha_4}\,S^{\lambda\lambda}\,.$$

Этот результат полностью совпадает с полученным, в частности, в работе [42].

1.3 Вывод уравнений движения сингулярной гиперповерхности в квадратичной гравитации с помощью принципа наименьшего действия

В данном разделе будут получены уравнения движения для сингулярной гиперповерхности произвольного типа в квадратичной гравитации с помощью принципа наименьшего действия. Для этого необходимо выделить поверхностную часть в системе уравнений, полученных варьированием действия (1.1) по обратной метрике в случае, когда тензор Римана имеет структуру (1.22), с (1.18) в качестве источника.

В силу условий Лихнеровича, необходимых для квадратичной гравитации, тензор Римана и, как следствие, тензор Риччи и скалярная кривизна могут испытывать не более чем скачок на поверхности Σ_0. Воспользовавшись тем, что $\theta^2(n(x)) = \theta(n(x))$ и $\theta(n(x))\,\theta(-n(x)) = 0$, и подставляя тензор Римана (1.22) и его свертки в действие (1.1), получим:

$$S_q = -\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega^+}\sqrt{|g|}L_q^+\,d^4x - \frac{1}{16\pi}\int_{\Omega^-}\sqrt{|g|}L_q^-\,d^4x, \tag{1.28}$$

где $L_q^+ = \alpha_1 R^+_{abcd}R^{+abcd} + \alpha_2 R^+_{ab}R^{+ab} + \alpha_3(R^+)^2 + \alpha_4 R^+ + \alpha_5\Lambda$, аналогично определяется L_q^-.

Варьируя действие (1.28) по обратной метрике, получим [62]:

$$\delta S_q = -\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega^+}\sqrt{|g|}\left(H^+_{ab}\delta g^{ab} + \nabla_c V^{+c}\right)\,d^4x - \\ -\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega^-}\sqrt{|g|}\left(H^-_{ab}\delta g^{ab} + \nabla_c V^{-c}\right)\,d^4x. \tag{1.29}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$H^+_{ab} = 2\alpha_1 R^+_{amlp}R_b^{+mlp} - 2(2\alpha_1+\alpha_2)R_d^{+c}R^{+d}_{\ \ bac} - 4\alpha_1 R_a^{+c}R^+_{bc} + 2\alpha_3 R^+ R^+_{ab} + \\ + \alpha_4 R^+_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}L_q^+ + (\alpha_2+4\alpha_1)\Box R^+_{ab} + \frac{1}{2}(4\alpha_3+\alpha_2)g_{ab}\Box R^+ - \\ -(2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)\nabla_a\nabla_b R^+, \tag{1.30}$$

$$V^{+c} = \left\{(4\alpha_1 + \alpha_2)\nabla^c R^{+bd} + \frac{1}{2}(\alpha_2 + 4\alpha_3) g^{bd} \nabla^c R^{+}\right\} \delta g_{bd} -$$
$$- 2\nabla^b \left\{(2\alpha_1 + \alpha_2) R^{+cd} + \alpha_3\, g^{cd} R^{+}\right\} \delta g_{bd} + (\alpha_4 + 2\alpha_3 R^{+})(g^{ab} g^{cd} - g^{ac} g^{bd})\, \nabla_a \delta g_{bd} +$$
$$+ \left\{\alpha_2 (2 g^{cd} R^{+ab} - g^{ac} R^{+bd} - g^{bd} R^{+ac}) - 4\alpha_1 R^{+abcd}\right\} \nabla_a \delta g_{bd} =$$
$$= D^{+cbd}\, \delta g_{bd} + A^{+acbd}\, \nabla_a \delta g_{bd}\,. \quad (1.31)$$

Аналогичным образом определяются вектор V^{-c} и тензор H^{-}_{ab}. Подробности вариации действия квадратичной гравитации разобраны в приложении A.

Для вывода уравнений движения с помощью принципа наименьшего действия, как и в предыдущем случае, используется вариация с закрепленными концами, т.е., значения динамических переменных фиксированы на границе всего объема интегрирования: $\delta g_{ab} = 0$ на $\partial\Omega$, а также метрика и ее вариация непрерывны на Σ_0. Однако, для квадратичной гравитации необходимо также задать граничные условия на производные от вариации метрики:

$$\partial_c\, \delta g^{\pm ab}|_{\partial\Omega^{\pm}/\Sigma_0} = 0, \quad \delta g^{+ab}|_{\Sigma_0} = \delta g^{-ab}|_{\Sigma_0}, \quad \partial_c \delta g^{+ab}|_{\Sigma_0} = \partial_c \delta g^{-ab}|_{\Sigma_0},$$

тогда, воспользовавшись теоремой Гаусса-Стокса, получим следующее выражение для δS_q:

$$\delta S_q = -\frac{1}{16\pi} \int_{\Omega^+} \sqrt{|g|}\, \left(H^{+}_{ab} \delta g^{ab}\right)\, d^4x - \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega^-} \sqrt{|g|}\, \left(H^{-}_{ab} \delta g^{ab}\right)\, d^4x +$$
$$+ \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma_0} [V^c]\, dS_c.$$

Здесь dS_c - направленный элемент поверхности.

Перейдем к координатам $\{n, y^i\}$, в которых метрика непрерывна на Σ_0, и функция $n(x)$ является одной из координат. В подобной системе координат можно использовать определение dS_c, которое применимо как для времениподобной (пространственноподобной), так и для светоподобной гиперповерхностей:

$$dS_c = \epsilon N_c \sqrt{|h|} d^3y, \quad i \neq n,$$

где $h = g(0, y^i)$ - ограничение детерминанта метрики во всем пространстве-времени Ω на Σ_0, $\{y^i\}$ - все координаты, кроме n, которые выбраны в данном случае в качестве внутренних координат на гиперповерхности.

Аналогичным образом вариация действия материи с тензором энергии-импульса (1.18) разделяется на объемную и поверхностную части:

$$\delta S_m = \frac{1}{2}\int_{\Omega^+}\sqrt{|g|}\left(T^+_{ab}\delta g^{ab}\right)\,d^4x + \frac{1}{2}\int_{\Omega^-}\sqrt{|g|}\left(T^-_{ab}\delta g^{ab}\right)\,d^4x - \\ - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_0}\sqrt{|h|}\left(S^{ab}\delta g_{ab}\right)\,d^3y. \quad (1.32)$$

Из принципа наименьшего действия находим систему уравнений движения:

$$H^{\pm}_{ab} = 8\pi T^{\pm}_{ab}, \quad (1.33)$$

$$\epsilon[V^c]N_c = 8\pi S^{ab}\delta g_{ab}. \quad (1.34)$$

Из (1.34) напрямую выводится аналог уравнения Израэля для квадратичной гравитации. Случай времениподобных и пространственноподобных гиперповерхностей разобран, в частности, в работах [29; 32], здесь же представлен вывод этих уравнений в наиболее общей форме, которую можно использовать для произвольных гиперповерхностей, в том числе для светоподобных.

Так как вариация гравитационной части действия δS_q содержит дивергенцию от вектора V^c, можно утверждать, что сам вектор V^c определен с точностью до прибавления к нему другого вектора, дивергенция от которого равна нулю, помноженного на произвольную константу - $2CU^c$. Как это было продемонстрировано в статье [62], вектор U^c удобно выбрать следующим:

$$U^c = -\nabla^b\left(R^{cd} - \frac{1}{2}g^{cd}R\right)\delta g_{bd} + \left(R^{ab}g^{cd} - R^{bc}g^{ad}\right)\nabla_a\delta g_{bd}.$$

Константу C при этом положим равной $2\alpha_3$, тогда:

$$\widetilde{V}^{+c} = V^{+c} + 4\alpha_3 U^{+c} = \left\{(4\alpha_1+\alpha_2)\nabla^c R^{+bd} + \frac{1}{2}(\alpha_2+4\alpha_3)g^{bd}\nabla^c R^+\right\}\delta g_{bd} - \\ - 2(2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)\nabla^b R^{+cd}\delta g_{bd} + (\alpha_4 + 2\alpha_3 R^+)(g^{ab}g^{cd} - g^{ac}g^{bd})\nabla_a\delta g_{bd} \\ + \left\{\alpha_2(2g^{cd}R^{+ab} - g^{ac}R^{+bd} - g^{bd}R^{+ac}) - 4\alpha_1 R^{+abcd}\right\}\nabla_a\delta g_{bd} + \\ + 4\alpha_3(R^{+ab}g^{cd} - R^{+bc}g^{ad})\nabla_a\delta g_{bd} = \widetilde{D}^{+cbd}\,\delta g_{bd} + \widetilde{A}^{+acbd}\,\nabla_a\delta g_{bd}\,.$$

Как и до этого, вектора U^{-c},$\widetilde{V}^{-c}$ определяются аналогично.

Поясним, почему прибавление вектора U^c не меняет уравнения движения не только в объеме, но и на гиперповерхности. Как отмечно в работе [62], вектор U^c можно представить в виде полной дивергенции:

$$U^c = \nabla_a \left\{ \left(R^{ab} g^{cd} - R^{cd} g^{ab} \right) \delta g_{bd} \right\} .$$

Из формулы (1.35) следует, что в уравнения движения входит только компонента U^n, для которой:

$$U^n = \nabla_n \left\{ \left(R^{nb} g^{nd} - R^{nd} g^{nb} \right) \delta g_{bd} \right\} + \nabla_i \left\{ \left(R^{ib} g^{nd} - R^{nd} g^{ib} \right) \delta g_{bd} \right\} = \\ = \nabla_i \left\{ \left(R^{ib} g^{nd} - R^{nd} g^{ib} \right) \delta g_{bd} \right\} , \quad i \neq n.$$

Покажем, что интеграл $\int_{\Sigma_0} \nabla_i \left\{ \left(R^{ib} g^{nd} - R^{nd} g^{ib} \right) \delta g_{bd} \right\} \sqrt{|h|} d^3 y$ равен нулю. Так как выражение под знаком интеграла представляет из себя полную дивергенцию на гиперповерхности Σ_0 от некоторого трехмерного вектора на этом многообразии, в силу теоремы Гаусса-Стокса, этот интеграл сводится к интегралу по границе гиперповерхности Σ_0, которая является частью границы всего рассматриваемого пространства-времени $\partial\Omega$, где $\delta g_{bd} = 0$.

В координатах $\left\{ n, y^i \right\}$: $N_c = \epsilon \delta^n_c$, поэтому, заменив $V^{\pm c}$ на $\widetilde{V}^{\pm c}$ в (1.34) получим:

$$[\widetilde{V}^n] = 8\pi S^{ab} \delta g_{ab}. \tag{1.35}$$

В силу заданных граничных условий $[\nabla_a \delta g_{bd}] = 0$, поэтому этот множитель можно вынести за скобку при вычислении скачка $[\widetilde{V}^n]$:

$$[\widetilde{V}^n] = \left\{ 4\alpha_3([R^{ab}]g^{nd} - [R^{bn}]g^{ad}) - 4\alpha_1 [R^{abnd}] \right\} \nabla_a \delta g_{bd} + \\ + \left\{ 2\alpha_3 [R](g^{ab} g^{nd} - g^{an} g^{bd}) + \alpha_2 (2 g^{nd} [R^{ab}] - g^{an} [R^{bd}] - g^{bd} [R^{an}]) \right\} \nabla_a \delta g_{bd} + \\ + \{ \, (4\alpha_1 + \alpha_2)[\nabla^n R^{bd}] + \frac{1}{2}(\alpha_2 + 4\alpha_3) g^{bd} [\nabla^n R] - \\ - 2(2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3)[\nabla^b R^{nd}] \, \} \, \delta g_{bd}. \tag{1.36}$$

Для вычисления $[\widetilde{V}^n]$, выпишем выражения для скачков компонент тензора Римана и его сверток, имея в виду, что скачки присутствуют только в тех величинах, которые содержат производные от метрики по координате n, начиная с производной второго порядка. Скачки первых производных метрики приняты равными нулю в силу условий Лихнеровича:

$$[R_{iklm}] = \frac{1}{2}\left(\delta^n_k\delta^n_l[\partial^2_{nn}g_{im}] + \delta^n_i\delta^n_m[\partial^2_{nn}g_{kl}] - \delta^n_i\delta^n_l[\partial^2_{nn}g_{km}] - \delta^n_k\delta^n_m[\partial^2_{nn}g_{il}]\right), \quad (1.37)$$

$$[R^{abcd}] = g^{bn}\,g^{cn}\,[R^{a\ \ d}_{\ nn}] + g^{an}\,g^{dn}\,[R^{c\ \ b}_{\ nn}] - g^{bn}\,g^{dn}\,[R^{a\ \ c}_{\ nn}] - g^{an}\,g^{cn}\,[R^{b\ \ d}_{\ nn}] \quad (1.38)$$

$$[R^{nbcd}] = g^{cn}[R^{bd}] - g^{dn}[R^{bc}],$$

$$[R^{ab}] = \frac{1}{2}\left(-g^{an}g^{bn}g^{cd} - g^{nn}g^{ac}g^{bd} + g^{an}g^{bd}g^{cn} + g^{bn}g^{ad}g^{cn}\right)[\partial^2_{nn}g_{cd}] =$$

$$= g^{bn}\,[R^{n\ \ a}_{\ nn}] + g^{an}\,[R^{n\ \ b}_{\ nn}] - g^{nn}\,[R^{a\ \ b}_{\ nn}] + g^{an}\,g^{bn}\,[R_{nn}], \quad (1.39)$$

$$[R] = \left(-g^{nn}g^{cd} + g^{cn}g^{dn}\right)[\partial^2_{nn}g_{cd}] = 2\,[R^{n\ \ n}_{\ nn}] + 2\,g^{nn}\,[R_{nn}]\,. \quad (1.40)$$

Множитель в $\widetilde{V}^{\pm n}$ при $\nabla_a\delta g_{bd}$ - $\widetilde{A}^{\pm anbd}$ требует более детального рассмотрения, с учетом соотношений (1.37-1.40) получим:

$$[\,\widetilde{A}^{anbd}\,]\,\nabla_a\delta g_{bd} = \{\,-\beta_2\,g^{an}g^{bd}[R^{n\ \ n}_{\ nn}] + \beta_2\,g^{an}(g^{bn}g^{dn} - g^{bd}g^{nn})[R_{nn}] +$$

$$+ (\beta_1+\beta_2)g^{nb}g^{nd}[R^{n\ \ a}_{\ nn}] + (\beta_2-\beta_1)g^{an}g^{dn}[R^{\ bn}_{n\ \ n}] + (\beta_2+\beta_1)g^{nn}g^{nd}[R^{\ b\ a}_{n\ n}] -$$

$$-\beta_1\,g^{nn}g^{na}[R^{\ b\ d}_{n\ n}]\,\}\,\nabla_a\delta g_{bd} = \{\,-\frac{1}{2}\,\beta_2\,g^{an}g^{bd}[R] +$$

$$+\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\,\left(g^{nd}[R^{ab}] + g^{nb}[R^{ad}]\right) - \beta_1\,g^{an}[R^{bd}]\,\}\,\nabla_a\delta g_{bd}\,, \quad (1.41)$$

где $\beta_1 = \alpha_2 + 4\alpha_1,\ \beta_2 = \alpha_2 + 4\alpha_3$.

Далее распишем ковариантную производную $\nabla_a\delta g_{bd}$, переход к обычной производной необходим, так как в общем случае $\nabla_i[\widetilde{A}^{inbd}] \neq [\nabla_i\widetilde{A}^{inbd}]$, но $\partial_i[\widetilde{A}^{inbd}] = [\partial_i\widetilde{A}^{inbd}]$ для любых $i \neq n$:

$$[\widetilde{A}^{anbd}]\,\nabla_a\delta g_{bd} = [\widetilde{A}^{nnbd}]\,\partial_n\delta g_{bd} + [\widetilde{A}^{inbd}]\,\partial_i\delta g_{bd} - [\widetilde{A}^{anbd}]\,\Gamma^c_{ab}\,\delta g_{cd} - [\widetilde{A}^{anbd}]\,\Gamma^c_{ad}\,\delta g_{cb}\,.$$

Для того, чтобы выполнить следующую операцию с $[\widetilde{A}^{anbd}]$, необходимо вернуться к интегрированию $[\widetilde{A}^{anbd}]$ в составе $[\widetilde{V}^n]$ по гиперповерхности Σ_0:

$$\int_{\Sigma_0} [\widetilde{A}^{inbd}]\, \partial_i \delta g_{bd} \sqrt{|h|}\, d^3y = \int_{\Sigma_0} \partial_i \left([\widetilde{A}^{inbd}]\, \delta g_{bd} \sqrt{|h|} \right) d^3y -$$
$$- \int_{\Sigma_0} \left([\partial_i \widetilde{A}^{inbd}] + [\widetilde{A}^{inbd}]\, \frac{1}{2}\, \partial_i ln|h| \right) \delta g_{bd} \sqrt{|h|} d^3y =$$
$$= \int_{\Sigma_0} \nabla_i \left([\widetilde{A}^{inbd}]\, \delta g_{bd} \right) \sqrt{|h|}\, d^3y - \int_{\Sigma_0} \left([\partial_i \widetilde{A}^{inbd}] + [\widetilde{A}^{inbd}]\, \Gamma^a_{ai} \right) \delta g_{bd} \sqrt{|h|} d^3y,$$

Аналогично приведенным выше рассуждениям для U^n слагаемое $\int_{\Sigma_0} \nabla_i \left([\widetilde{A}^{inbd}]\, \delta g_{bd} \right) \sqrt{|h|}\, d^3y$ зануляется при применении теоремы Стокса уже на самой гиперповерхности. В итоге для $[\widetilde{A}^{anbd}]\, \nabla_a \delta g_{bd}$ получим:

$$[\widetilde{A}^{anbd}]\, \nabla_a \delta g_{bd} = [\widetilde{A}^{nnbd}]\, \partial_n \delta g_{bd} -$$
$$- \left([\partial_i \widetilde{A}^{inbd}] + [\widetilde{A}^{inbd}]\, \Gamma^a_{ai} + [\widetilde{A}^{ancd}]\, \Gamma^b_{ac} + [\widetilde{A}^{ancb}]\, \Gamma^d_{ac} \right) \delta g_{bd}\, .$$

С учетом всего вышеперечисленного, уравнение (1.35) можно привести к виду:

$$\{\ \beta_1 \left([\nabla^n R^{bd}] + [\partial_k \left(g^{kn} R^{bd} \right)] + g^{kn} \Gamma^a_{ak} [R^{bd}] + g^{an} \Gamma^b_{ac} [R^{cd}] + g^{an} \Gamma^d_{ac} [R^{cb}] \right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\, \beta_2 \left(g^{bd} [\partial^n R] + [\partial_k \left(g^{kn} g^{bd} R \right)] + g^{kn}\, g^{bd} \Gamma^a_{ak} [R] + g^{an} g^{cd}\, \Gamma^b_{ac} [R] \right) -$$
$$- \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2) \left([\nabla^b R^{nd}] + [\partial_k \left(g^{nb} R^{kd} \right)] + g^{nb}\, \Gamma^a_{ak} [R^{kd}] + g^{nd}\, \Gamma^b_{ac} [R^{ac}] \right) -$$
$$- \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2) \left([\nabla^d R^{nb}] + [\partial_k \left(g^{nd} R^{kb} \right)] + g^{nd}\, \Gamma^a_{ak} [R^{kb}] + g^{nb}\, \Gamma^d_{ac} [R^{ac}] \right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\, \beta_2\, g^{an} g^{cb}\, \Gamma^d_{ac} [R] - \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2) \left(g^{nc}\, \Gamma^b_{ac} [R^{ad}] + g^{nc}\, \Gamma^d_{ac} [R^{ab}] \right)\ \}\, \delta g_{bd} +$$
$$+ \left\{ \frac{1}{2} [R] \left(g^{bn} g^{dn} (\beta_1 + \beta_2) - g^{nn} g^{bd}\, \beta_2 \right) - \beta_1 g^{nn}\, [R^{bd}] \right\} \partial_n \delta g_{bd} =$$
$$= 8\pi\, S^{bd}\, \delta g_{bd}\, ,\ \ k \neq n. \quad (1.42)$$

Здесь необходимо отметить, что при выводе (1.42), помимо всего прочего, было использовано соотношение, которое является следствием (1.37-1.40):

$$[R^{nb}] = \frac{1}{2} g^{nb} [R]. \quad (1.43)$$

С помощью (1.43) можно показать, что множитель при $\partial_n \delta g_{bd}$ равен нулю, если хотя бы один из индексов b или d равен n, то есть $[\widetilde{A}^{nnnd}] = [\widetilde{A}^{nnbn}] = 0$:

$$-\frac{1}{2}\beta_2\, g^{nn} g^{bn}[R] + \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2) g^{nn} g^{bn}[R] - \beta_1\, g^{nn}[R^{bn}] = 0\,.$$

Как отмечено в публикации [32], вариация производных метрики $\delta(\partial_n g_{ij})$ на Σ_0 не является независимой относительно вариаций компонент метрики δg_{ij} на гиперповерхности. С другой стороны, в некотором смысле отношение между ними произвольно, так как уравнения движения в квадратичной гравитации четвертого порядка по производным метрического тензора, поэтому их решения не определяются однозначно заданием начальных условий на метрику и ее первые производные на некоторой гиперповерхности Коши. Таким образом, мы вынуждены требовать:

$$\delta(\partial_n g_{ij}) = B^{kl}_{ij}(y)\,\delta g_{kl}, \quad i,j,l,k \neq n,$$

где $B^{kl}_{ij}(y)$ - произвольные функции.

Появление произвольных функций апосредовано связано с присутствием производной δ-функции в уравнениях движения и фактически является маркером двойного слоя.

С учетом всего вышеперечисленного, уравнения движения сингулярной гиперповерхности произвольного типа в квадратичной гравитации имеют вид:

$$\beta_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\,[\partial^n R] - [\nabla^n R^{nn}]\right) + \frac{1}{2}\,(\beta_1+\beta_2)\,\Gamma^n_{ij}\left(g^{in} g^{jn}[R] - 2\varepsilon[R^{ij}]\right) = 8\pi\, S^{nn}\,, \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)[\nabla^n R^{in}] + \beta_1 g^{an}\Gamma^n_{ac}[R^{ci}] + \frac{1}{2}\,\beta_2\left\{g^{in}[\partial^n R] + g^{an} g^{ci}\,\Gamma^n_{ac}[R]\right\} - \\
&-\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\Big\{ -\frac{1}{2} g^{an} g^{cn}\,\Gamma^i_{ac}[R] - \frac{1}{2} g^{kn}\, g^{in}\Gamma^a_{ak}[R] + \varepsilon\,\Gamma^i_{ac}[R^{ac}] - \frac{1}{2}[\partial_k\left(g^{kn} g^{in} R\right)] + \\
&+[\nabla^i R^{nn}] + \varepsilon[\partial_k R^{ki}] + \varepsilon\,\Gamma^a_{ak}[R^{ki}] + g^{ni}\,\Gamma^n_{ac}[R^{ac}] + g^{nc}\,\Gamma^n_{ac}[R^{ai}]\Big\} = 8\pi\, S^{in}, \quad (1.45)
\end{aligned}$$

$$\beta_1 \left\{ [\nabla^n R^{ij}] + [\partial_k \left(g^{kn} R^{ij} \right)] + g^{kn} \Gamma^a_{ak} [R^{ij}] + g^{an} \Gamma^i_{ac} [R^{cj}] + g^{an} \Gamma^j_{ac} [R^{ci}] \right\} +$$
$$+ \frac{1}{2} \beta_2 \left\{ [\partial_k \left(g^{kn} g^{ij} R \right)] + g^{kn} g^{ij} \Gamma^a_{ak} [R] + g^{an} g^{cj} \Gamma^i_{ac} [R] + g^{an} g^{ci} \Gamma^j_{ac} [R] \right\} -$$
$$- \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2) \left\{ [\partial_k \left(g^{ni} R^{kj} \right)] + g^{ni} \Gamma^a_{ak} [R^{kj}] + g^{nj} \Gamma^i_{ac} [R^{ac}] + g^{nc} \Gamma^i_{ac} [R^{aj}] \right\} -$$
$$- \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2) \left\{ [\partial_k \left(g^{nj} R^{ki} \right)] + g^{nj} \Gamma^a_{ak} [R^{ki}] + g^{ni} \Gamma^j_{ac} [R^{ac}] + g^{nc} \Gamma^j_{ac} [R^{ai}] \right\} +$$
$$+ \frac{1}{2} \beta_2 \, g^{ij} [\partial^n R] - \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2) \left\{ [\nabla^j R^{ni}] + [\nabla^i R^{nj}] \right\} +$$
$$+ \left\{ \frac{1}{2} [R] \left(g^{kn} g^{ln} (\beta_1 + \beta_2) - \varepsilon \, g^{kl} \beta_2 \right) - \varepsilon \, \beta_1 \, [R^{kl}] \right\} B^{ij}_{kl}(y) = 8\pi \, S^{ij}, \quad (1.46)$$

где $i,j,k,l \neq n$.

Из этих уравнений в частности следует, что при $\beta_1 = \beta_2 = 0$ сингулярной гиперповерхности не существует. Такое сочетание коэффициентов соответствует квадратичной поправке Гаусса-Бонне. Известно, что в четырех измерениях она не дает вклада в уравнения движения в объеме, так как сводится к полной дивергенции от некоторого вектора [63—65]. Таким образом, было показано, что для действия гравитации Гаусса-Бонне на гладком четырехмерном многообразии Ω с сингулярной гиперповерхностью Σ_0 вариация по метрике с закрепленными концами равна нулю, если на Σ_0 выполнятся условия Лихнеровича.

Отсутствие слагаемых с α_4 в уравнениях движения гиперповерхности также обусловлено непрерывностью первых производных по метрике на Σ_0.

Для светоподобного двойного слоя систему уравнений (1.44-1.46) можно упростить, пользуясь тем, что $g^{nn}|_{\Sigma_0} = \varepsilon = 0$ для данного случая:

$$\frac{1}{2} (\beta_1 - \beta_2) \, \Gamma^n_{ij} \, g^{in} g^{jn} [R] = \frac{1}{4} (\beta_1 - \beta_2) \, g^{nk} g^{in} g^{jn} \, \partial_k g_{ij} \, [R] = 0 = 8\pi S^{nn}, \quad (1.47)$$

$$\frac{1}{2} (\beta_1 - \beta_2) g^{nk} [\nabla_k R^{in}] + \beta_1 g^{an} \Gamma^n_{ac} [R^{ci}] + \frac{1}{2} \beta_2 \left\{ g^{in} g^{nk} [\partial_k R] + g^{an} g^{ci} \Gamma^n_{ac} [R] \right\} -$$
$$- \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2) \left\{ -\frac{1}{2} g^{an} g^{cn} \Gamma^i_{ac} [R] - \frac{1}{2} g^{kn} g^{in} \Gamma^a_{ak} [R] - \frac{1}{2} [\partial_k \left(g^{kn} g^{in} R \right)] \right\} -$$
$$- \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2) \left\{ [\nabla^i R^{nn}] + g^{ni} \Gamma^n_{ac} [R^{ac}] + g^{nc} \Gamma^n_{ac} [R^{ai}] \right\} = 8\pi \, S^{in}, \quad (1.48)$$

$$\beta_1 \left\{ g^{nk}[\nabla_k R^{ij}] + [\partial_k \left(g^{kn} R^{ij}\right)] + g^{kn}\Gamma^a_{ak}[R^{ij}] + g^{an}\Gamma^i_{ac}[R^{cj}] + g^{an}\Gamma^j_{ac}[R^{ci}] \right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\beta_2 \left\{ [\partial_k \left(g^{kn} g^{ij} R\right)] + g^{kn}\, g^{ij}\Gamma^a_{ak}[R] + g^{an} g^{cj}\,\Gamma^i_{ac}[R] + g^{an} g^{ci}\,\Gamma^j_{ac}[R] \right\} -$$
$$- \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\, \{\, [\partial_k \left(g^{ni} R^{kj}\right)] + g^{ni}\,\Gamma^a_{ak}[R^{kj}] + g^{nj}\,\Gamma^i_{ac}[R^{ac}] + g^{nc}\,\Gamma^i_{ac}[R^{aj}] +$$
$$+ [\nabla^i R^{nj}] + [\nabla^j R^{ni}] + [\partial_k \left(g^{nj} R^{ki}\right)] + g^{nj}\,\Gamma^a_{ak}[R^{ki}] + g^{ni}\,\Gamma^j_{ac}[R^{ac}] + g^{nc}\,\Gamma^j_{ac}[R^{ai}] \,\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\beta_2\, g^{ij} g^{nk}[\partial_k R] + \frac{1}{2}[R]\, g^{kn} g^{ln}(\beta_1+\beta_2)\, B^{ij}_{kl}(y) = 8\pi\, S^{ij},\ \ i,j,k,l \neq n. \quad (1.49)$$

В уравнении (1.47) множитель $g^{nk} g^{in} g^{jn}\,\partial_k g_{ij}$ равен нулю для светоподобной гиперповерхности:

$$g^{nk} g^{in} g^{jn}\,\partial_k g_{ij} = N^a N^b N^c\,\partial_c g_{ab} = \partial_c \left(N^a N^b N^c\, g_{ab}\right) - 2\, g_{ab}\, N^b\, N^c\,\partial_c N^a =$$
$$= -2\, N_a\, N^c\,\partial_c\, N^a = -2\delta^n_a\, g^{nc}\,\partial_c\, g^{na} = 0\,,$$

откуда следует, что S^{nn} равен нулю в любой системе координат, так как это скаляр: $S^{nn} = N_a N_b S^{ab}$.

Во-первых, это означает отсутствие «внешнего давления» для любой светоподобной сингулярной гиперповерхности. Во-вторых, что светоподобный двойной слой возможно является источником излучения, так как «внешний поток» - $S^{ni} = S^i_a\, N^a$, предположительно связан с излучением, и он не может быть нулевым, если речь идет о двойном слое, а не о тонкой оболочке.

Не углубляясь в детали, отметим, что физический смысл рассматриваемых компонент поверхностного тензора энергии-импульса для светоподобного случая можно связать с термодинамической интерпретацией гравитационного момента на светоподобной гиперповерхности, которая представлена в работах [66—68]. Кроме того, далее будет показано, что в специальных координатах $\{n,\lambda,\theta^A\}$ «внешний поток» имеет только одну ненулевую компоненту, которую можно записать в инвариантной форме:

$$S^{n\lambda} = S^{ab} N_a l_b\,,$$

где λ - параметр, изменяющийся вдоль светоподобной геодезической конгруэнции, формирующей Σ_0, l^a - вспомогательный светоподобный вектор. Проекции такого типа используются в вышеупомянутых статьях для аналога первого закона термодинамики для геометрических величин, описывающих произвольную светоподобную гиперповерхность.

При выводе уравнений (1.44-1.46) гиперповерхность Σ_0 считалась заданной априори, но при работе с приложениями возникает обратная задача, когда решения уравнений движения в областях $\Omega^\pm$ - $g^\pm_{ab}$ известны, и требуется найти уравнение гиперповерхности, на которой происходит сшивка. В этом случае уравнения с S^{nn} и S^{ni} в правой части вместе с условиями Лихнеровича задают саму гиперповерхность Σ_0, тогда как уравнения с S^{ij} в правой части служат для определения «произвольных» функций $B^{ij}_{kl}(y)$.

Для тонких оболочек картина иная. Основными критерием того, что Σ_0 представляет из себя тонкую оболочку, а не двойной слой, является отсутсвие произвольных функций в уравнениях движения гиперповерхности. Для времениподобного и пространственноподобного случаев этот критерий сводится к отсутствию скачков в тензоре Риччи: $[R^{bd}] = 0$. Для светоподобной гиперповерхности это отсутствие скачков в скалярной кривизне $[R] = 0$. При этом некоторые скачки в тензоре Риччи могут быть ненулевыми, в частности $[R_{nn}]$, так как $g^{nn}|_{\Sigma_0} = 0$ для светоподобной гиперповерхности. Можно показать, что из равенства нулю соответствующих скачков для любого типа гиперповерхностей помимо отсутсвия произвольных функций также следует, что $S^{nn} = S^{ni} = 0$.

Докажем, что если сингулярная гиперповерхность в квадратичной гравитации удовлетворяет соответствующим типу гиперповерхности критериям тонкой оболочки, то внешнее давление и внешний поток равны нулю.

Рассмотрим времениподобные и пространственноподобные гиперповерхности. Если компоненты тензора Риччи непрерывны на Σ_0, уравнения (1.44,1.45) сводятся к следующим:

$$\beta_2 \left(\frac{1}{2} [\partial_n R] - \varepsilon [\nabla_n R^{nn}] \right) = 8\pi \, S^{nn} \,,$$

$$\frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2) \, [\nabla^n R^{in}] + \frac{1}{2} \beta_2 \, g^{in} [\partial^n R] - \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) \, [\nabla^i R^{nn}] = 8\pi \, S^{in}.$$

В первом уравнении: $[\nabla_n R^{nn}] = [\nabla_a R^{an}] = \frac{1}{2}[\partial^n R] = \frac{\varepsilon}{2}[\partial_n R]$ при условии $[R^{ab}] = 0$, во втором:

$$[\nabla^n R^{in}] = [\partial^n R^{in}] = \frac{\varepsilon}{2} g^{in} [\partial_n R], \quad [\partial^n R] = \varepsilon [\partial_n R],$$

$$[\nabla^i R^{nn}] = g^{in}[\nabla_n R^{nn}] = \frac{\varepsilon}{2} g^{in}[\partial_n R],$$

поэтому $S^{ni} = S^{nn} = 0$.

Для светоподобной гиперповерхности проще всего рассмотреть вектор $S^{ab}N_b$ в координатах $\{n,\lambda,\theta^A\}$. Из уравнения (3.12) следует, что единственная его ненулевая компонента:

$$S^{ab}N_a = S^{n\lambda} = \frac{1}{16\pi}(\beta_1+\beta_2)\,\left([\partial_\lambda R] + \Gamma^k_{k\lambda}[R]\right),$$

равна нулю, если скалярная кривизна непрерывна на гиперповерхности: $[R] = 0$. Если вектор $S^{ab}N_a$ равен нулю на Σ_0 в некоторoых специальных координатах, он не может быть ненулевым в любой другой системе координат, поэтому «внешнее давление» и «внешний поток» равны нулю.

Таким образом, уравнения движения времениподобной и пространственноподобной тонких оболочек являются частным случаем системы (1.44-1.46), для которого выполняется дополнительное условие $[R^{bd}] = 0$:

$$\begin{aligned} &S^{nn} = S^{ni} = 0, \\ &\beta_1[\nabla^n R^{ij}] + \frac{1}{2}\beta_2\, g^{ij}[\partial^n R] - \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\left\{[\nabla^i R^{nj}] + [\nabla^j R^{ni}]\right\} = 8\pi\, S^{ij}, \quad i,j \neq n. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Аналогично, для светоподобных тонких оболочек получим:

$$\begin{aligned} &S^{nn} = S^{ni} = 0, \\ &\beta_1\left\{g^{nk}[\nabla_k R^{ij}] + [\partial_k\left(g^{kn}R^{ij}\right)] + g^{kn}\Gamma^a_{ak}[R^{ij}] + g^{an}\Gamma^i_{ac}[R^{cj}] + g^{an}\Gamma^j_{ac}[R^{ci}]\right\} - \\ &-\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\left\{[\nabla^i R^{nj}] + [\partial_k\left(g^{ni}R^{kj}\right)] + g^{ni}\,\Gamma^a_{ak}[R^{kj}] + g^{nj}\,\Gamma^i_{ac}[R^{ac}] + g^{nc}\,\Gamma^i_{ac}[R^{aj}]\right\} - \\ &-\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\left\{[\nabla^j R^{ni}] + [\partial_k\left(g^{nj}R^{ki}\right)] + g^{nj}\,\Gamma^a_{ak}[R^{ki}] + g^{ni}\,\Gamma^j_{ac}[R^{ac}] + g^{nc}\,\Gamma^j_{ac}[R^{ai}]\right\} = \\ &= 8\pi\, S^{ij},\ i,j,k \neq n. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Кроме того, далее будет продемонстрировано, что для светоподобной гиперповерхности условие $[R] = 0$ выполняется для случая, когда Σ_0 является, как минимум локально, слоем некоторого светоподобного слоения Ω.

1.4 Консервативность тензора энергии-импульса в квадратичной гравитации

Покажем консервативность тензора энергии-импульса для квадратичной гравитации. Уравнения движения (1.33) можно переписать, с учетом соотношения (1.3):

$$H_{ab} = 2\,(4\alpha_1 + \alpha_2)\,B_{ab} + \left(\alpha_3 + \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2\right) D_{ab} + \\ + \alpha_4 G_{ab} - \alpha_5\,\frac{1}{2} g_{ab}\,\Lambda = 8\pi T_{ab}. \quad (1.52)$$

Здесь $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$ - тензор Эйнштейна, $B_{ab} = \left(\nabla^c\,\nabla^d + \frac{1}{2}\,R^{cd}\right) C_{acbd}$ - тензор Баха, тензор D_{ab} определяется из соотношения:

$$\delta\left(R^2\sqrt{g}\right) = D_{ab}\,\delta g^{ab},$$

соответственно:

$$D_{ab} = \left(2R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab}\,R + 2\,g_{ab}\,\Box - 2\,\nabla_b \nabla_a\right) R\,.$$

Можно заметить, что в уравнении (1.52) отсутствует слагаемое, соответствующее вариации поправки Гаусса-Бонне. Это связано с тем, что в четырех измерениях слагаемое Гаусса-Бонне является чисто топологическим [63—65]:

$$\frac{1}{32\pi^2}\int_\Omega GB\,\sqrt{|g|}\,d^4x = \chi(\Omega), \quad (1.53)$$

где $\chi(\Omega)$ - Эйлерова характеристика многообразия Ω. Соответственно, разложение (1.52) верно только в четырех измерениях, в остальных случаях следует также учитывать вклад от поправки Гаусса-Бонне.

Из общей формулы (1.30) для H_{ab} можно также вывести альтернативную запись для тензора Баха:

$$B_{ab} = \frac{1}{2}\Box R_{ab} - \frac{1}{6}\left(\nabla_a\nabla_b + \frac{1}{2}g_{ab}\Box\right)R - \frac{1}{3}R\,R_{ab} + R_{acbd}\,R^{cd} + \\ + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}R^2 - R_{cd}\,R^{cd}\right)g_{ab}, \quad (1.54)$$

если воспользоваться при этом тождеством Де Витта:

$$C^{aecd}\,C^{b}_{ecd} = \frac{1}{4}C^2\,g^{ab}\,. \quad (1.55)$$

Из формулы (1.54) очевидна симметричность тензора Баха, а также то, что он обнуляется вакуумными решениями уравнений Эйнштейна с ненулевым Λ-членом. Поясним этот факт подробнее, вакуумные уравнения движения для действия общей теории относительности:

$$R_{ab} = \frac{1}{2}g_{ab}\left(R + \frac{\alpha_5}{\alpha_4}\Lambda\right), \quad (1.56)$$

откуда находим: $R_{ab} = -\frac{1}{2}\frac{\alpha_5}{\alpha_4}\Lambda g_{ab}$, $R = -2\frac{\alpha_5}{\alpha_4}\Lambda$. Подставляя эти соотношения в (1.54), получим $B_{ab} = 0$. Это означает, что для конформной гравитации, действие для которой содержит только слагаемое пропорциональное C^2, все решения (1.56) являются вакуумными. С другой стороны, то же самое верно для тензора D_{ab}, он обнуляется решениями (1.56). Соответственно, можно сделать вывод, что, по крайней мере в четырех измерениях, вакуумные решения общей теории относительности являются также вакуумными решениями квадратичной гравитации [69] .

Покажем консервативность тензора Баха:

$$\nabla_b B^{ab} = \nabla_b\nabla_c\nabla_d C^{acbd} + \frac{1}{2}\nabla_b R_{cd}\,C^{acbd} + \frac{1}{2}R_{cd}\nabla_b C^{acbd}.$$

Первое слагаемое можно преобразовать, воспользовавшись симметриями тензора Вейля:

$$\nabla_b \nabla_c \nabla_d C^{acbd} = \nabla_b \nabla_c \nabla_d C^{bcad} = \nabla_b \nabla_c \nabla_d C^{adbc} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\nabla_b \nabla_c \nabla_d C^{adbc} - \nabla_c \nabla_b \nabla_d C^{adbc}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} R^{ab} \nabla_b R - R^{abcd} \nabla_c R_{bd}\right), \quad (1.57)$$

при выводе этого соотношения также были использованы тождества Бианки и правила коммутации ковариантных производных. Отсюда напрямую следует, что $\nabla_b B^{ab} = 0$.

Далее, продемонстрируем консервативность тензора D^{ab}:

$$\nabla_b D^{ab} = \nabla_b \left(\left(2R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R + 2\, g^{ab} \Box - 2\, \nabla^b \nabla^a\right) R\right) =$$
$$= 2\left(\nabla^a \nabla_b - \nabla_b \nabla^a\right) \nabla^b R + 2 R_{ab} \nabla^a R = 0, \quad (1.58)$$

при выводе этого соотношения мы воспользовались следствием дифференциального тождества Бианки: $\nabla_b R^{ab} = \frac{1}{2} \nabla^a R$.

Таким образом, с учётом консервативности G^{ab}, мы доказали консервативность тензора H^{ab} и, как следствие, тензора энергии-импульса в квадратичной гравитации.

Сохранение полного тензора энергии-импульса в квадратичной гравитации было показано при условии, что все тензоры и их производные, входящие в уравнения поля, хорошо определены, что верно в объеме, т.е. в $\Omega^{\pm}$ областях. Если же существует скачок или дельта-функция в распределении вещества, возникает сингулярная гиперповерхность, на которой объемные уравнения поля не выполняются. На такой гиперповерхности две различные метрики, которые являются решениями полевых уравнений в двух рассматриваемых объемах, должны быть связаны посредством так называемых условий сшивки. В общей теории относительности это уравнения Израэля для тонких оболочек, в квадратичной гравитации - уравнения (1.44–1.46).

Исследуем консервативность тензора энергии-импульса в квадратичной гравитации для пространства-времени с сингулярной гиперповерхностью. При этом в качестве базового предположения примем, что тензор энергии-импульса сохраняется. Оно справедливо для физических моделей, в которых сингулярное распределение материи представляет из себя некоторый предельный случай несингулярного. Как отмечено ранее, будем считать, что тензор энергии-импульса имеет структуру:

$$T^{ab} = S^{ab}\,\delta(n(x)) + T^{+ab}\,\Theta(n(x)) + T^{-ab}\,\Theta(-n(x)),$$

где $n(x) = 0$ - уравнение гиперповерхности в некоторых координатах, непрерывных в ее окрестности. Условие консервативности сводится к следующему:

$$\begin{aligned}\nabla_b T^{ab} = \nabla_b S^{ab}\,\delta(n(x)) + \nabla_b T^{+ab}\,\Theta(n(x)) + \nabla_b T^{-ab}\,\Theta(-n(x)) + \\ + S^{ab}\,\delta'(n(x))\,\partial_b n(x) + [T^{ab}]\,\delta(n(x))\,\partial_b n(x) = \\ = \nabla_b S^{ab}\,\delta(n(x)) + S^{ab}\,\delta'(n(x))\,\partial_b n(x) + [T^{ab}]\,\delta(n(x))\,\partial_b n(x) = 0\,,\end{aligned} \tag{1.59}$$

здесь было использовано доказанное выше утверждение: $\nabla_\nu T^{\pm\mu\nu} = 0$.

Представленное соотношение рассматривается как равенство обобщенных фукций, т.е. действия правой и левой частей на произвольную пробную функцию должны совпадать, но так как в этом выражении содержится производная дельта-функции, то после интегрирования в уравнениях (1.59) возникнут четыре произвольные функции, поэтому за счет соотвествующего выбора этих функций всегда можно добиться выполнения условия консервативности. Выше мы предположили, что рассматривается самый общий случай сингулярной гиперповерхности в квадратичной гравитации, то есть двойной слой. Если же сузить класс сингулярных гиперповехностей до тонких оболочек, уравнения (1.59) меняются существенным образом. Как будет показано далее, для этого типа сингулярных гиперповерхностей не только в общей теории относительности, но и в квадратичной гравитации все компоненты вектора $S^{\mu\nu}\partial_\nu n(x)$ равны нулю. Таким образом, в условии консервативности не возникает производной дельта-функции, поэтому система (1.59) сводится к следующей:

$$\nabla_b S^{ab} + [T^{ab}]\,\partial_b n = 0\,. \tag{1.60}$$

Далее, разберем несколько частных случаев для уравнений (1.60), начиная с гауссовой нормальной системы координат, которая используется при описании времениподобных и пространственноподобных гиперповерхностей. Метрика в окрестности Σ_0 имеет форму (4.1), соответственно, условие консервативности для времениподобной или пространственноподобной тонкой оболочки:

$$\Gamma^n_{ij}\, S^{ij} + [T^{nn}] = 0, \quad \partial_j S^{ij} + \Gamma^i_{kj} S^{kj} + \Gamma^k_{kj} S^{ij} + [T^{in}] = 0, \quad i,j,k \neq n\,. \qquad (1.61)$$

Рассмотрим уравнения (1.61) для сферически-симметричного случая с метрикой (4.6), для котрого $S^{02} = S^{03} = S^{23} = 0$, $S^{33} = \frac{1}{\sin^2\theta} S^{22}$:

$$[T^{nn}] - \frac{\varepsilon}{2}\,\partial_n \gamma_{00}\, S^{00} + 2\varepsilon r\,\partial_n r\, S^{22} = 0, \quad \partial_\tau S^{00} + 2\,\frac{\partial_\tau r}{r} S^{00} - 2\varepsilon r\,\partial_\tau r\, S^{22} + [T^{0n}] = 0,$$
$$\partial_2 S^{22} = 0, \quad \partial_3 S^{33} = 0\,. \qquad (1.62)$$

Для времениподобных и пространственноподобных тонких оболочек в конформной гравитации $S^2_2 = S^3_3 = -\frac{1}{2} S^0_0$, поэтому соотношения (1.62) дополнительно упрощаются:

$$S^0_0 \left(\frac{1}{2} \partial_n \gamma_{00} + \frac{\varepsilon \partial_n r}{r} \right) + [T^{nn}] = 0,$$
$$\frac{1}{r^3} \partial_\tau \left(r^3 S^0_0 \right) - \varepsilon [T^{0n}] = 0, \quad \partial_2 S^{22} = 0, \quad \partial_3 S^{33} = 0\,. \qquad (1.63)$$

Перейдем к светоподобным тонким оболочкам, для которых в координатах $\{n, \lambda, \theta^A\}$ метрика в окрестности гиперповерхности сводится к (3.19), и $S^{\lambda\lambda}$ - единственная ненулевая компонента тензора энергии-импульса. Уравнения (1.60) для этого случая:

$$\delta^a_\lambda\, \partial_\lambda S^{\lambda\lambda} + [T^{an}] = 0\,. \qquad (1.64)$$

1.5 Сферически симметричный случай

Исследуем частный случай светоподобных сингулярных гиперповерхностей - сферически симметричные светоподобные гиперповерхности, разделяющие два сферически симметричных пространства-времени.

Рассмотрим сферически-симметричную метрику самого общего вида:

$$ds^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha dx^\beta - r^2(x)\, \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) = r^2(x) \left(\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha dx^\beta - d\Omega^2\right), \quad \alpha,\beta = 0, 1, \tag{1.65}$$

а также введем дополнительные обозначения:

$$d\widetilde{s}^2 = \widetilde{g}_{ab}\, dx^a\, dx^b = d\widetilde{s}_2^2 - d\Omega^2, \quad d\widetilde{s}_2^2 = \widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha dx^\beta.$$

Здесь и далее используется $2+2$ разложение метрики в случае сферической симметрии. Примем также, что $x^1 = n$, и координата x^0 может быть как времениподобной (пространственноподобной), так и светоподобной, в зависимости от типа гиперповерхности;

Для геометрии такого типа выполняются следующие соотношения:

$$R_{\theta\theta} = 1 + r\sigma + \Delta, \quad R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta}\; sin^2\theta, \tag{1.66}$$

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{r^2} \left(\frac{1}{2}\widetilde{R} + \Delta - r\,\sigma\right) - \frac{2}{r}\, \nabla_\alpha \nabla_\beta\, r, \tag{1.67}$$

$$R = \frac{1}{r^2} \left(\widetilde{R} - 2 - 6\, r\, \sigma\right), \tag{1.68}$$

$$\Box = \frac{1}{r^2} \left\{ \widetilde{\Box} + \frac{2}{r}\, \widetilde{\partial}^\alpha r\, \partial_\alpha - \frac{\partial_\theta\left(\sin\theta\, \partial_\theta\right)}{\sin\theta} - \frac{\partial^2_{\varphi\varphi}}{\sin^2\theta} \right\},$$

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta = \widetilde{\nabla}_\alpha \widetilde{\nabla}_\beta - \frac{1}{r} \left(\partial_\alpha r\, \partial_\beta + \partial_\beta r\, \partial_\alpha - \widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}\, \widetilde{\partial}^\lambda r\, \partial_\lambda\right),$$

где Δ, σ, $\widetilde{R}$ - инварианты сферической геометрии:

$$\Delta = \gamma^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha r\, \partial_\beta r = \frac{1}{r^2}\, \widetilde{\Delta}, \quad \sigma = \gamma^{\alpha\beta}\, \nabla_\alpha \nabla_\beta\, r = \frac{1}{r^2}\, \widetilde{\sigma} = \frac{1}{r^2}\, \widetilde{\Box}\, r, \tag{1.69}$$

$$\widetilde{R} = \frac{1}{\widetilde{\gamma}} \left(-\partial^2_{11}\widetilde{\gamma}_{00} + 2\partial^2_{01}\widetilde{\gamma}_{01} - \partial^2_{00}\widetilde{\gamma}_{11}\right) + \frac{1}{2\widetilde{\gamma}^2} \left(\widetilde{\gamma}_{11} \left(\partial_1\widetilde{\gamma}_{00}\right)^2 + \widetilde{\gamma}_{00} \left(\partial_0\widetilde{\gamma}_{11}\right)^2\right) +$$
$$+ \frac{1}{2\widetilde{\gamma}^2} \left(\partial_1\widetilde{\gamma}_{00} \left(-\partial_0\widetilde{\gamma}_{11}\, \widetilde{\gamma}_{10} + \partial_1\widetilde{\gamma}_{11}\, \widetilde{\gamma}_{00} - 2\partial_1\widetilde{\gamma}_{01}\, \widetilde{\gamma}_{10}\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{2\widetilde{\gamma}^2} \left(\partial_0\widetilde{\gamma}_{11} \left(\partial_0\widetilde{\gamma}_{00}\, \widetilde{\gamma}_{11} - 2\, \partial_0\widetilde{\gamma}_{10}\, \widetilde{\gamma}_{10}\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{2\widetilde{\gamma}^2} \left(\partial_0\widetilde{\gamma}_{00} \left(\partial_1\widetilde{\gamma}_{11}\, \widetilde{\gamma}_{01} - 2\, \partial_1\widetilde{\gamma}_{10}\, \widetilde{\gamma}_{11}\right) - 2\, \partial_0\widetilde{\gamma}_{10} \left(\partial_1\widetilde{\gamma}_{11}\, \widetilde{\gamma}_{00} - 2\, \partial_1\widetilde{\gamma}_{10}\, \widetilde{\gamma}_{10}\right)\right). \quad (1.70)$$

Выше использованы обозначения $\widetilde{R}$, $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{\Box}$ для скалярной кривизны, детерминанта, ковариантной производной и лапласиана двумерной «метрики» $\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}$ соответственно.

Прежде, чем переходить к сингулярным гиперповерхностям, выразим также квадратичные комбинации, присутсвующие в лагранжиане квадратичной гравитации, через представленные выше инварианты сферической геометрии:

$$R_{ab}\, R^{ab} = \frac{2}{r^4} \left(1 + \Delta + r\,\sigma\right)^2 + \frac{2}{r^4} \left(\frac{1}{2}\widetilde{R} + \Delta - r\,\sigma\right) \left(\frac{1}{2}\widetilde{R} + \Delta - 3\, r\,\sigma\right) +$$
$$+ \frac{4}{r^2}\nabla_\alpha\nabla_\beta r\, \nabla^\alpha\nabla^\beta r, \quad R^2 = \frac{1}{r^4} \left(\widetilde{R} - 2 - \frac{6\,\widetilde{\sigma}}{r}\right)^2, \quad (1.71)$$

$$R_{abcd}\, R^{abcd} = \frac{4}{r^4} \left(1 + \Delta + r\,\sigma\right)^2 + \frac{4}{r^4} \left(\frac{1}{2}\widetilde{R} + \Delta - r\,\sigma\right) \left(\frac{1}{2}\widetilde{R} + \Delta - 3\, r\,\sigma\right) +$$
$$+ \frac{8}{r^2}\nabla_\alpha\nabla_\beta r\, \nabla^\alpha\nabla^\beta r + \frac{4\,\sigma}{r^3}(\widetilde{R} - 2 - 3r\sigma). \quad (1.72)$$

Рассмотрим уравнения движения сферически-симметричной сингулярной гиперповерхности произвольного типа:

$$\frac{1}{2}\left(\beta_1 - \beta_2\right) \left(\gamma^{0n}\right)^2\, \Gamma^n_{00}[R] - \varepsilon\beta_1 \left(\Gamma^n_{00}[R^{00}] + 2\Gamma^n_{22}[R^{22}]\right) +$$
$$+ \frac{\varepsilon}{2}\beta_2 \left(\partial_0\gamma^{0n} + \gamma^{\alpha n}\Gamma^i_{i\alpha} - \gamma^{0n}\Gamma^n_{0n}\right)[R] = 8\pi S^{nn} \quad (1.73)$$

$$\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)[\nabla^n R^{0n}]+\frac{1}{2}\,(\beta_1-\beta_2)\,\gamma^{\alpha n}\Gamma^n_{\alpha\beta}[R^{\beta 0}]+\frac{1}{2}\,\beta_2\left\{\gamma^{0n}[\partial^n R]+\gamma^{\alpha n}\gamma^{\beta 0}\,\Gamma^n_{\alpha\beta}[R]\right\}-$$
$$-\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\left\{-\frac{1}{2}\gamma^{\alpha n}\gamma^{\beta n}\,\Gamma^0_{\alpha\beta}[R]-\frac{1}{2}\,\left(\gamma^{0n}\right)^2\Gamma^a_{a0}[R]+[\nabla^0 R^{nn}]+\varepsilon\,\Gamma^0_{ab}[R^{ab}]\right\}-$$
$$-\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\left\{\varepsilon[\partial_0 R^{00}]+\varepsilon\,\Gamma^a_{a0}[R^{00}]+\gamma^{n0}\,\Gamma^n_{ab}[R^{ab}]-\frac{1}{2}\partial_0\left[\left(\gamma^{0n}\right)^2 R\right]\right\}=8\pi\,S^{0n},$$
$$S^{n2}=S^{n3}=0, \quad (1.74)$$

$$\beta_1\left\{[\nabla^n R^{00}]+[\partial_0\left(\gamma^{0n}R^{00}\right)]+\gamma^{0n}\Gamma^a_{a0}[R^{00}]+2\gamma^{\beta n}\Gamma^0_{\alpha\beta}[R^{\alpha 0}]\right\}-(\beta_1+\beta_2)[\nabla^0 R^{n0}]+$$
$$+\frac{1}{2}\,\beta_2\left\{\gamma^{00}[\partial^n R]+[\partial_0\left(\gamma^{0n}\gamma^{00}R\right)]+\gamma^{0n}\,\gamma^{00}\Gamma^a_{a0}[R]+2\gamma^{\beta n}\gamma^{\alpha 0}\,\Gamma^0_{\alpha\beta}[R]\right\}-$$
$$-(\beta_1+\beta_2)\left\{[\partial_0\left(\gamma^{n0}R^{00}\right)]+\gamma^{n0}\,\Gamma^a_{a0}[R^{00}]+g^{n0}\,\Gamma^0_{ac}[R^{ac}]+\gamma^{n\alpha}\,\Gamma^0_{\alpha\beta}[R^{\beta 0}]\right\}+$$
$$+\left\{\frac{1}{2}[R]\left(\left(\gamma^{0n}\right)^2(\beta_1+\beta_2)-\varepsilon\,\gamma^{00}\,\beta_2\right)-\varepsilon\,\beta_1\,[R^{00}]\right\}\,B^{00}_{00}(x^0)=8\pi\,S^{00}, \quad (1.75)$$

$$-\beta_1\left\{\left[\partial^n\left(\frac{\sigma}{r}\right)\right]+r^2\,\partial_0\left[\frac{\gamma^{0n}}{r^3}\,\sigma\right]+\frac{\gamma^{0n}}{r}\Gamma^a_{a0}[\sigma]+2\frac{\gamma^{\alpha n}}{r}\,\Gamma^2_{\alpha 2}[\sigma]\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}\,\beta_2\left\{[\partial^n R]+r^2\partial_0\left[\frac{\gamma^{0n}}{r^2}\,R\right]+\gamma^{0n}\,\Gamma^a_{a0}[R]+2\,\gamma^{\alpha n}\,\Gamma^2_{\alpha 2}[R]\right\}-$$
$$-(\beta_1+\beta_2)\left\{\frac{1}{r^3}\,\Gamma^n_{22}[\sigma]+\frac{1}{2}\gamma^{n\alpha}\,\Gamma^2_{2\alpha}[R]-\frac{\gamma^{n\alpha}}{r}\,\Gamma^2_{2\alpha}[\sigma]\right\}-$$
$$-\varepsilon\left\{\frac{1}{2}\beta_2[R]-\frac{1}{r}\beta_1\,[\sigma]\right\}\,B^{22}_{22}(x^0)=8\pi\,S^2_2, \quad S^3_3=S^2_2\,. \quad (1.76)$$

В силу сферической симметрии, в данных уравнениях принято, что:

$$B^{ij}_{33}=B^{ij}_{22},$$

а также, без ограничения общности можно считать, что $B^{00}_{00}, B^{22}_{22}, B^{33}_{33}$ - единственные ненулевые компоненты тензора B^{ij}_{kl}.

Покажем связь скачков, присутствующих в уравнениях движения, с представленными выше инвариантами:

$$[R^{00}]=\frac{\gamma^{00}}{2r^2}[\widetilde{R}]-\frac{\gamma^{00}}{r}[\sigma]-\frac{2}{r}[\nabla^0\nabla^0 r],$$

$$[R^{nn}] = \frac{\varepsilon}{2}[R], \quad [R^{n0}] = \frac{1}{2}\gamma^{n0}[R], \quad [R] = \frac{1}{r^2}[\widetilde{R}] - \frac{6}{r}\,[\sigma],$$

$$[\nabla^n R^{0n}] = \frac{1}{2}\gamma^{0n}\partial_0[\gamma^{0n}R] + \frac{1}{2}\gamma^{n0}[R]\left(\Gamma^0_{00}\,\gamma^{0n} + \Gamma^n_{0n}\,\gamma^{0n} - \varepsilon\,\Gamma^0_{0n} - 2\varepsilon\Gamma^2_{2n}\right) + \\ + \frac{\varepsilon}{2}[\partial^0 R] - \varepsilon[\partial_0 R^{00}] + \left(\gamma^{0n}\Gamma^n_{00} - 2\varepsilon\Gamma^0_{00} - 2\varepsilon\Gamma^2_{20}\right)[R^{00}] - 2\varepsilon\Gamma^0_{22}[R^{22}],$$

$$[\nabla^0 R^{nn}] = \frac{1}{2}\left(2\gamma^{00}\gamma^{n\alpha}\Gamma^n_{0\alpha} - \gamma^{n0}\gamma^{n\alpha}\Gamma^i_{i\alpha} - (\gamma^{0n})^2\Gamma^n_{n0} - \gamma^{n0}\partial_0\gamma^{n0}\right)[R] - \\ - \gamma^{0n}\Gamma^n_{00}[R^{00}] - 2\gamma^{0n}\Gamma^n_{22}[R^{22}] + \gamma^{0n}\frac{\varepsilon}{2}[\partial_n R] + \frac{\varepsilon}{2}\gamma^{00}[\partial_0 R],$$

$$[\nabla^n R^{00}] = [\partial^n R^{00}] + 2\gamma^{n\alpha}\Gamma^0_{\alpha\beta}[R^{0\beta}],$$

$$[\nabla^0 R^{n0}] = \frac{1}{2}\gamma^{0n}[\partial^0 R] - \gamma^{0n}[\partial_0 R^{00}] + \frac{1}{2}\gamma^{00}\partial_0[\gamma^{0n}R] + \\ + \left(\frac{1}{2}\gamma^{00}\left(\gamma^{n\alpha}\Gamma^0_{0\alpha} + \gamma^{0n}\Gamma^n_{0n}\right) - \left(\gamma^{0n}\right)^2\left(\Gamma^0_{0n} + \Gamma^2_{2n}\right)\right)[R] + \\ + [R^{00}]\left(\gamma^{00}\Gamma^n_{00} - 2\gamma^{0n}\left(\Gamma^0_{00} + \Gamma^2_{20}\right)\right) - 2\gamma^{0n}\Gamma^0_{22}[R^{22}].$$

Далее будет показано, что для светоподобной гиперповерхности непрерывность инвариантов $\widetilde{R}$, σ и, как результат, скалярной кривизны, напрямую следует из условий Лихнеровича.

Для времениподобной (пространственноподобной) гиперповерхности из приведенных выше соотношений можно заметить, что непрерывность компонент тензора Риччи: $[R^{ab}] = 0$ следует из условий: $[\widetilde{R}] = [\sigma] = 0$, таким образом показано, что для сферически-симметричной сингулярной гиперповерхности произвольного типа в квадратичной гравитации, критерии тонкой оболочки сводятся к непрерывности инвариантов $\widetilde{R}$, σ, если выполняются условия Лихнеровича.

Выпишем уравнения движения для сферически-симметричной тонкой оболочки произвольного типа, положив скачки соответствующих инвариантов равными нулю:

$$-\varepsilon\beta_1\Gamma^n_{00}\,[R^{00}] = 8\pi S^{nn} = 0, \tag{1.77}$$

$$-\,\varepsilon\beta_1[\partial_0 R^{00}] + (\beta_1-\beta_2)\,\gamma^{0n}\Gamma^n_{00}[R^{00}] -$$
$$-\,2\varepsilon\beta_1\left(\Gamma^0_{00}+\Gamma^2_{20}\right)[R^{00}] = 8\pi\, S^{0n} = 0, \quad S^{n2} = S^{n3} = 0, \quad (1.78)$$

$$\beta_1\left\{\varepsilon[\partial_n R^{00}] + 2\gamma^{n0}[\partial_0 R^{00}]\right\} + \beta_1\,\gamma^{0n}\Gamma^a_{a0}[R^{00}] +$$
$$+\,\frac{1}{2}\,\beta_2\gamma^{00}\varepsilon[\partial_n R] - \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\left(\gamma^{0n}\right)^2[\partial_n R] = 8\pi\, S^{00}, \quad (1.79)$$

$$-\,(\beta_1+3\beta_2)\,\frac{\varepsilon}{r}\,[\partial_n\sigma] + \frac{\varepsilon}{2r^2}\,\beta_2[\partial_n\widetilde{R}] = 8\pi\, S^2_2, \quad S^3_3 = S^2_2\,. \quad (1.80)$$

Для времениподобной (пространственноподобной) гиперповерхности внешнее давление и внешний поток равны нулю для тонкой оболочки, так как:

$$[R^{00}] = \frac{\gamma^{00}}{2r^2}[\widetilde{R}] - \frac{\gamma^{00}}{r}[\sigma] - \left(\gamma^{n0}\right)^2\frac{2\,\varepsilon}{r}[\sigma] = 0.$$

Для светоподобной гиперповерхности $S^{nn} = S^{ni} = 0$, так как $\varepsilon = 0$, $\Gamma^n_{00} = \frac{1}{2}\gamma^{n0}\,\partial_0\gamma_{00} = 0$. Кроме того, при выводе уравнений движения тонкой оболочки был использован тот факт, что, как будет показано далее, без ограничения общности можно положить: $\partial_0\gamma^{n0} = \partial_n\gamma_{00} = 0$ для сферически-симметричной светоподобной гиперповерхности.

1.6 Конформная гравитация

Действие конформной гравитации является частным случаем действия квадратичной гравитации с $\alpha_2 = -2\alpha_1, \quad \alpha_3 = \frac{1}{3}\alpha_1$. Из определения лагранжиана (1.3) следует, что при таком соотношении коэффициентов остается только слагаемое пропорциональное C^2:

$$S_q = -\frac{1}{16\pi}\int_\Omega \sqrt{-g}\alpha_1\left(R_{abcd}R^{abcd} - 2R_{ab}R^{ab} + \frac{1}{3}R^2\right)d^4x =$$
$$= -\frac{1}{16\pi}\int_\Omega \sqrt{-g}\alpha_1 C^2\, d^4x \quad (1.81)$$

Таким образом, уравнения движения для конформной гравитации, впервые полученные в работе Р.Баха [48], представляют из себя частный случай

(1.33).

$$B^{ab} = \nabla_c \nabla_d C^{acbd} + \frac{1}{2} C^{acbd} R_{cd} = \frac{2\pi}{\alpha_1} T^{ab} \tag{1.82}$$

Здесь знак перед $\frac{1}{2}$ в уравнении обусловлен выбранной сигнатурой, B^{ab} - тензор Баха.

Определенные типы сферически симметричных решений (1.82) были получены в статье [49], в частности, далее будут использованы вакуумные решения и решения типа Вайдья. Поскольку радиус действует как конформный множитель, их общий вид совпадает с (1.65) при условии, что $r^2(x)$ — произвольные функции.

Действие (1.81) и его вариация:

$$\delta S_q = -\frac{\alpha_1}{16\pi} \int \delta \left(\sqrt{-g}\, C^2 \right) d^4x = -\frac{\alpha_1}{4\pi} \int \sqrt{-g} B_{ab}\, \delta g^{ab} d^4x,$$

конформно инвариантны, т.е. их форма не меняется при преобразовании метрики типа: $g_{ab} = e^{2\omega} \widetilde{g}_{ab}$, поэтому:

$$\sqrt{-g}\, B_{ab}\, \delta g^{ab} = \sqrt{-\widetilde{g}}\, \widetilde{B}_{ab}\, \delta \widetilde{g}^{ab},$$

откуда следует, что $\widetilde{B}_{ab} = e^{2\omega} B_{ab}$ для четырехмерного пространства-времени. С учетом данного соотношения, в соответствии с результатами работы [49], получим уравнение Баха для сферически-симметричного случая:

$$\widetilde{B}_{\alpha\beta} = \frac{1}{6} \left\{ \widetilde{\gamma}_{\alpha\beta} \widetilde{\Box} - \widetilde{\nabla}_\alpha \widetilde{\nabla}_\beta \right\} \widetilde{R} + \frac{\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}}{24} \left(\widetilde{R}^2 - 4 \right) = \frac{2\pi}{\alpha_1} r^2 T_{\alpha\beta} \tag{1.83}$$

$$\widetilde{B}_{22} = \frac{1}{12} \left(\widetilde{\Box}\, \widetilde{R} + \frac{1}{2} \left(\widetilde{R}^2 - 4 \right) \right) = \frac{2\pi}{\alpha_1} r^2 T_{22},\ \widetilde{B}_{33} = \widetilde{B}_{22} \sin^2\theta = \frac{2\pi}{\alpha_1} r^2 T_{33}. \tag{1.84}$$

Здесь $\widetilde{B}_{ab}$ - тензор Баха метрики $\widetilde{g}_{ab}$, конформный фактор $e^{2\omega} = r^2(x)$.

В силу принципа наименьшего действия, конформная инвариантность δS_q влечет за собой конформную инвариантность вариации действия материи δS_m, которая, в свою очередь, приводит к бесследовости тензора энергии-импульса. Для того, чтобы продемонстрировать этот факт, рассмотрим специальную вариацию метрики, которая отвечает ее конформному преобразованию. Такая вариация является инфинитезимальной формой преобразования $g^{ab} = e^{-2\omega}\widetilde{g}^{ab}$:

$$\delta g^{ab} = -2g^{ab}\delta\omega.$$

Действие материи должно быть инвариантно относительно этой вариации по метрике, поэтому:

$$\delta S_m = \frac{1}{2}\int\sqrt{|g|}\left(T_{ab}\delta g^{ab}\right)\, d^4x = -\int\sqrt{|g|}\left(T_{ab}\, g^{ab}\right)\,\delta\omega\, d^4x = 0,$$

что означает $T^a_a = 0$.

Далее будет приведено краткое описание вывода вакуумных решений и решений типа Вайдья для сферически-симметричной конформной гравитации, более детальный вывод которых можно найти в вышеупомянутой работе [49].

1.6.1 Вакуумные решения

Для вывода вакуумных сферически симметричных решений конформной гравитации используем двойные световые координаты, в которых двумерная «метрика» $\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}$, без ограничения общности, может быть представлена как:

$$d\widetilde{s}_2^2 = 2\widetilde{H}(u,v)dudv. \tag{1.85}$$

Для этого случая вакуумные уравнения Баха сводятся к следующим соотношениям:

$$\partial^2_{uv}\widetilde{R} = -\frac{\widetilde{H}}{4}\left(\widetilde{R}^2 - 4\right), \tag{1.86}$$

$$\partial_u\left(ln(\partial_u\widetilde{R})\right) = \partial_u\left(ln(\widetilde{H})\right), \tag{1.87}$$

$$\partial_v\left(ln(\partial_v\widetilde{R})\right) = \partial_v\left(ln(\widetilde{H})\right), \tag{1.88}$$

где $\widetilde{R}$ - двумерная скалярная кривизна метрики (1.85), которая, согласно опрелению, (1.70):

$$\widetilde{R} = \frac{2}{\widetilde{H}^3}\left(\partial_u\widetilde{H}\,\partial_v\widetilde{H} - \widetilde{H}\,\partial^2_{uv}\widetilde{H}\right). \tag{1.89}$$

Из уравнений (1.87,1.88) следует, что:

$$\partial_u \widetilde{R} = c_1(v)\,\widetilde{H}, \quad \partial_v \widetilde{R} = c_2(u)\,\widetilde{H},$$

где $c_1(v), c_2(u)$ - произвольные функции своих переменных.

Сначала рассмотрим вариант, когда они обе ненулевые. В этом случае эти функции можно свести к ± 1 заменой координат следующего типа:

$$u \mapsto \widetilde{u}(u), \quad v \mapsto \widetilde{v}(v),$$

так как подобная замена не меняет вида метрики (1.85), без ограничения общности можно считать, что $c_1 = 1 = \pm c_2$, тогда:

$$\partial_u \widetilde{R} = \pm\,\partial_v \widetilde{R} = \widetilde{H}.$$

Откуда следует, что $\widetilde{R} = \widetilde{R}(u \pm v)$, затем с учетом этого соотношения из уравнения (1.86) получаем окончательный результат:

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}|A(\widetilde{R}(u,v))|, \quad A(\widetilde{R}) = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^3 - 12\widetilde{R} + C_0\right). \tag{1.90}$$

$$\begin{gathered}\widetilde{R} = \widetilde{R}(v-u) : \int \frac{d\widetilde{R}}{A(\widetilde{R})} = \frac{1}{2}(v-u), \quad A(\widetilde{R}) > 0 \\ \widetilde{R} = \widetilde{R}(v+u) : \int \frac{d\widetilde{R}}{A(\widetilde{R})} = \frac{1}{2}(v+u), \quad A(\widetilde{R}) < 0,\end{gathered} \tag{1.91}$$

где C_0 - некоторая константа, физический смысл которой будет пояснен далее. В некоторых задачах удобнее использовать $\widetilde{R}$ в качестве одной из координат, в этом случае решение (1.90) выражается следующим образом:

$$d\widetilde{s}_2^2 = A(\widetilde{R})\,dt^2 - \frac{d\widetilde{R}^2}{A(\widetilde{R})}.$$

Здесь координата t является временной, а $\widetilde{R}$ - пространственной при $A(\widetilde{R}) > 0$, и наоборот при $A(\widetilde{R}) < 0$.

Далее, разберем случай, когда $c_1 = 0$, тогда $\partial_u \widetilde{R} = \partial^2_{uv} \widetilde{R} = 0$, соответственно, из уравнения (1.86) следует, что $\widetilde{R} = \pm 2$, то есть, c_2 тоже равен нулю. Решение для функции $\widetilde{H}$ можно получить из уравнения (1.89):

$$\widetilde{H} = \frac{2}{(u \pm v)^2}, \qquad \widetilde{R} = \mp 2. \tag{1.92}$$

Вакуумные решения общей теории относительности одновременно являются вакуумными решениями квадратичной гравитации, в частности, тензор Баха обнуляется вакуумными решениями уравнения Эйнштена с Λ-членом, соответственно, все сферически симметричные подобные решения относятся либо к первому, либо ко второму типу описанных выше сферически симметричных вакуумов конформной гравитации. В частности, метрика Шварцшильда-де Ситтера(анти-де Ситтера) относится к семейству вакуумных решений с переменной двумерной скалярной кривизной. Поясним этот факт более подробно. В двойных световых координатах метрика Шварцшильда-де Ситтера(анти-де Ситтера) имеет вид:

$$ds^2 = f(r(u,v))du\, dv - r(u,v)^2\, d\Omega^2, \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}\, r^2, \tag{1.93}$$

где M — массовый параметр, Λ — космологическая постоянная, функция $r(u,v)$ задана соотношением:

$$\int \frac{dr}{f(r)} = \frac{1}{2}\,(v - sign(f(r))\, u)\,.$$

Соотвественно, при $\Lambda = 0$ имеем решение Шварцшильда, при $M = 0$ — решения де Ситтера ($\Lambda > 0$) и анти-де Ситтера ($\Lambda < 0$). Для того, чтобы показать, как это решение связано с (1.90) цели необходимо вычислить скалярную кривизну $\widetilde{R}$ для двумерной «метрики»:

$$d\widetilde{s}^2_2 = \frac{f(r(u,v))}{r(u,v)^2} du\, dv. \tag{1.94}$$

Воспользовавшись формулой (1.70), для данного примера получим:

$$\widetilde{R}(u,v) = 2 - \frac{12\, M}{r(u,v)}. \tag{1.95}$$

Далее, выполним замену координат: $du \mapsto \frac{du}{12\,M}$, $\quad dv \mapsto \frac{dv}{12\,M}$, и выразим функцию r через $\widetilde{R}$ с помощью (1.95), тогда двумерная «метрика» (1.94) примет вид:

$$d\widetilde{s}_2^2 = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^3 - 12\widetilde{R} + 16 - 2\Lambda\,(12M)^2\right) du\,dv\,. \tag{1.96}$$

В такой форме очевидно, что эта метрика принадлежит к классу (1.92) с константой $C_0 = 16 - 2\Lambda\,(12M)^2$.

В качестве еще одного примера рассмотрим метрику Фридмана-Робертсона-Уокера:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a(t)^2}{1 - kx^2} - a(t)^2 x^2\,d\Omega^2, \quad k = 0,\ \pm 1\,.$$

Несложно проверить, что для соответсвующей этому решению двумерной «метрики»:

$$d\widetilde{s}_2^2 = \frac{1}{x^2}\left(\frac{dt^2}{a(t)^2} - \frac{dx^2}{1 - kx^2}\right),$$

скалярная кривизна равна двум для любой функции $a(t)$.

1.6.2 Решения типа Вайдья

В общей теории относительности решение Вайдьи описывает пространство-время сферически-симметричного, невращающегося гравитирующего тела, которое либо излучает, либо поглощает светоподобную пыль.

Рассмотрим аналог решения Вайдья для конформной гравитации. Как и в предыдущем случае, необходимо сначала выбрать вид двумерной метрики. Очевидно, наиболее подходящими координатами для этого решения являются светоподобная координата u и двумерная скалярная кривизна $\widetilde{R}$:

$$ds_2^2 = A(u,\widetilde{R})\,du^2 + 2\,F(u,\widetilde{R})\,du\,d\widetilde{R}. \tag{1.97}$$

Подставляя метрику соответствующей формы в уравнения Баха (1.83,1.84) получим:

$$\widetilde{B}_{00} = -\frac{A}{12}\,\partial_{\widetilde{R}}\left(\frac{A}{F^2}\right) + \frac{F}{12}\,\partial_u\left(\frac{A}{F^2}\right) + \frac{A}{24}\,(\widetilde{R}^2 - 4) = \frac{2\pi}{\alpha_1}\,r^2\,T_{00}, \tag{1.98}$$

$$\widetilde{B}_{01} = \frac{F}{12}\left(-\partial_{\widetilde{R}}\left(\frac{A}{F^2}\right) + \frac{\widetilde{R}^2 - 4}{2}\right) = \frac{2\pi}{\alpha_1}\,r^2\,T_{01}, \tag{1.99}$$

$$\widetilde{B}_{11} = \frac{1}{6}\frac{\partial_{\widetilde{R}}F}{F} = \frac{2\pi}{\alpha_1}\,r^2\,T_{11}, \tag{1.100}$$

$$\widetilde{B}_{22} = \frac{1}{12}\left(-\partial_{\widetilde{R}}\left(\frac{A}{F^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{R}^2 - 4\right)\right) = \frac{2\pi}{\alpha_1}\,r^2 T_{22},$$

$$\widetilde{B}_{33} = \widetilde{B}_{22}\,\sin^2\theta = \frac{2\pi}{\alpha_1}\,r^2 T_{33}, \tag{1.101}$$

где индексы 0 и 1 относятся к переменным u и $\widetilde{R}$.

Тензор энергии-импульса для даннной задачи - это тензор энергии-импульса пыли состоящей из светоподобных частиц:

$$T_{ab} \propto l_a l_b,$$

где l^a - светоподобный вектор, направленный вдоль координаты u. Таким образом, единственная ненулевая компонента $T_{00} \propto (l_0)^2$, тогда из уравнения (1.100) следует, что $\partial_{\widetilde{R}}F(u,\widetilde{R}) = 0$, т.е., F является функцией только переменной u. Так как общий вид двумерной метрики (1.97) сохраняется при замене вида: $u \mapsto \widetilde{u}(u)$, без ограничения общности можно положить $F(u,\widetilde{R}) = \pm 1$. Далее будет показано, что $F = 1$ является аналогом исходящего решения Вайдьи, -1 - входящего, для него, как правило, световая координата обозначается как v.

С учетом вышеперечисленного, из уравнений (1.99,1.101) находим функцию $A(\widetilde{R},u)$:

$$A(\widetilde{R},u) = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^3 - 12\widetilde{R} + C_0(u)\right),$$

где $C_0(u)$ - произвольная функция переменной u. Наконец, из уравнения (1.98) получим:

$$T_{00} = F\frac{\alpha_1}{144\pi\,r^2}\,\frac{d}{du}C_0(u). \tag{1.102}$$

Сравним полученные решения с метрикой Вайдья в общей теории относительности, для которой:

$$ds_2^2 = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2M(u)}{r}\right) du^2 + \frac{2F}{r^2}\, du\, dr,$$

где $F = 1$ для исходящего решения Вайдьи и -1 - для входящего. Для наглядности перейдем к координатам $\{\widetilde{u}, \widetilde{R}\}$, где $\widetilde{u} = \int \frac{du}{12\, M(u)}$. Так как двумерная скалярная кривизна для данной метрики:

$$\widetilde{R} = 2 - \frac{12\, M(u)}{r},$$

после соответствующей замены координат получим:

$$ds_2^2 = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R} - 2\right)\left(\left(\widetilde{R} - 2\right)\left(\widetilde{R} + 4\right) - 12F\, \frac{d}{d\widetilde{u}} \ln\left(M(\widetilde{u})\right)\right) d\widetilde{u}^2 + 2F\, d\widetilde{u}\, d\widetilde{R}\ .$$

Из уравнений движения:

$$G_{ab} = \frac{8\pi}{\alpha_4} T_{ab},$$

находим, что единственная ненулевая компонента тензора энергии-импульса в этих координатах:

$$T_{00} = -\frac{3\, \alpha_4 F}{2\pi\, r^2}\, \frac{d}{d\widetilde{u}}\left(M^2(\widetilde{u})\right),$$

где индекс 0 относится к переменной $\widetilde{u}$.

Ранее было отмечено, что все вакуумные решения общей теории относительности с лямбда-членом являются одновременно вакуумными решениями квадратичной гравитации и, как следствие, конформной гравитации в четырех измерениях. Это не относится к решениям с ненулевым тензором энергии-импульса, поэтому пространство-время Вайдья и его аналог в конформной гравитации принципиально различны. Тем не менее, сравнивая структуру T_{ab} на качественном уровне можно предположить, что $C_0(u) \propto const + M^2(u)$. В пределе $C_0 \to const$, который, учитывая вышеперечисленное, можно интерпретировать как переход к постоянной массе, решение типа Вайдьи для конформной гравитации переходит в вакуум с переменной $\widetilde{R}$.

Глава 2. Поверхностный тензор энергии-импульса идеальной жидкости с переменным числом частиц

Для того, чтобы пояснить физический смысл S^{nn} и S^{ni}, которые в общей теории относительности равны нулю, разберем вывод этих компонент напрямую из лагранжиана материи.

В качестве базового примера рассмотрим лагранжиан идеальной жидкости в эйлеровых переменных, дополненный слагаемым, ответственным за рождение частиц. Подобный лагранжиан впервые был представлен в статье [33].

В классической гидродинамике существует два типа динамических переменных: лагранжевы и эйлеровы. Первые привязаны к движению отдельных частиц, поэтому при применении принципа наименьшего действия варьируется мировая линия каждой частицы. Соответственно, эти координаты не подходят для описания процессов рождения или аннигиляции, с которыми предположительно и связаны «внешнее давление» и «внешний поток», поэтому здесь рассматривается действие из работы [33], где использован эйлеров формализм, когда динамические переменные являются полями, описывающими усредненные характеристики среды. В данном случае эти поля: полная плотность энергии расссматриваемой идеальной жидкости $E(X,\eta)$, в которой учтено, в том числе, их взаимодействие, трехмерная плотность числа частиц $\eta(x)$, то есть, число частиц в единице объема, $u^a(x)$ - векторное поле, характеризующее четырех-скорость потока жидкости, т.е., касательное векторное поле к конгруэнции мировых линий частиц жидкости, $X(x)$ - вспомогательная динамическая переменная, необходимая для маркировки мировых линий частиц. Соответственно, действие идеальной жидкости в этих обозначениях:

$$S_m = \int \{ -E + \mu_0 \, (u_a \, u^a - 1) + \mu_1 \, (\nabla_a \, (\eta \, u^a)) + \mu_2 \, \partial_a X \, u^a \, \} \sqrt{|g|} \, d^4 x \, ,$$

$\mu(x)_0, \mu_1(x), \mu_2(x)$ - лагранжевы множители.

Данный формализм впервые был разработан Дж. Р. Рэем [70], который показал, что уравнение движения идеальной жидкости, полученное из этого действия, совпадает с уравнением Эйлера. Преимущество такого подхода состоит в том, что закон сохранения числа частиц в явном виде входит в действие через соответствующую связь с лагранжевым множителем μ_1. Гидродинамическое давление вводится стандартным образом:

$$p = \eta\,\frac{\partial E}{\partial \eta} - E.$$

Вариация этого действия относительно динамических переменных и множителей Лагранжа дает нам следующую систему уравнений движения и связей:

$$\delta\eta : -\frac{\partial E}{\partial \eta} - \partial_a\mu_1\, u^a = 0\,, \tag{2.1}$$

$$\delta u^a :\ \mu_2\,\partial_a X + 2\mu_0\, u_a - \partial_a\mu_1\,\eta = 0\,, \tag{2.2}$$

$$\delta X :\ -\frac{\partial E}{\partial X} - \nabla_a\,(\mu_2\, u^a) = 0\,, \tag{2.3}$$

$$\delta\mu_0 :\ u_a\, u^a = 1\,, \tag{2.4}$$

$$\delta\mu_1 :\ \nabla_a\,(\eta\, u^a) = 0, \tag{2.5}$$

$$\delta\mu_2 :\ \partial_a X\, u^a = 0\,, \tag{2.6}$$

$$\delta g_{ab} :\ T^{ab} = (p+E)\, u^a u^b - p\, g^{ab}\,. \tag{2.7}$$

Выше для удобства отмечены переменные, вариацией которых получены соответствующие уравнения. При выводе T^{ab} были использованы остальные уравнения движения, в частности, соотношения, полученные домножением (2.1) на η и (2.2) на u^a:

$$\partial_a\mu_1\, u^a = -\frac{p+E}{\eta}, \tag{2.8}$$

$$2\mu_0 = \partial_a\mu_1\, u^a\,\eta = -p - E\,.$$

Для того, чтобы перейти к модели с переменным числом частиц, в исходном действии достаточно заменить слагаемое, которое при вариации по лагранжевому множителю μ_1 дает связь (2.5), описывающую закон сохранения числа частиц, на так называемый закон рождения с функцией $\Phi(inv)$ в правой части:

$$\delta\mu_1 :\ \nabla_a\,(\eta\, u^a) = \Phi\,. \tag{2.9}$$

Функция Φ в общем случае зависит от инвариантов полей, отвественных за процесс рождения. Плотность числа рождающихся частиц и их четырех-скорости определяются из квантовой теории этих внешних полей, и они не образуют мировые линии, управляемые принципом наименьшего действия. Таким образом, вышеупомянутые инварианты должны быть отделены от тех, которые описывают уже созданные частицы. Соответственно, действие для модели с переменным числом частиц имеет вид:

$$S_m = \int L_m \sqrt{|g|}\, d^4x =$$
$$= \int \{ -E + \mu_0 (u_a u^a - 1) + \mu_1 (\nabla_a (\eta u^a) - \Phi) + \mu_2 \partial_a X u^a \} \sqrt{|g|}\, d^4x\,, \quad (2.10)$$

для него связь (2.5) меняется на (2.9), а также появляется поправка к тензору энергии-импульса, связанная с Φ:

$$T^{ab}_{[\Phi]} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \left(\mu_1 \Phi \sqrt{|g|} \right)}{\delta g_{ab}}\,, \quad (2.11)$$

остальные уравнения движения и связи остаются без изменений.

Прежде, чем рассматривать разные варианты для функции Φ, ответственной за рождение, покажем, как из исходного лагранжиана получается поверхностный тензор энергии-импульса.

Проанализировав выражение (2.7), можно понять, как выглядит поверхностный тензор энергии-импульса, если предположить, что тензор энергии-импульса содержит сингулярную составляющую на гиперповерхности $\Sigma_0 : n(x) = 0$. Очевидно, что для этого величина E или p должны содержать составляющую, пропорциональную δ-функции, откуда, в свою очередь, следует, что плотность числа частиц и лагранжев множитель μ_0 включают в себя сингулярную составляющую, таким образом:

$$\eta = \eta(\pm) + \eta_{(0)}\, \delta(n(x)), \quad \mu_0 = \mu_0(\pm) + \mu_{(0)}\, \delta(n(x)), \quad E = E(\pm) + E_{(0)}\, \delta(n(x))\,, \quad (2.12)$$

при этом предполагается, что рассматриваемое пространтство-время Ω, как и в предыдущем разделе, разделено на две области $\Omega^{\pm}$ с различной геометрией сингулярной гиперповерхностью Σ_0. Кроме того, функция X также может иметь скачок и дельта-функцию:

$$X = X(\pm) + X_{(0)}\, \delta(n(x)).$$

Покажем, что даже если выполняются соотношения (2.12), исходный лагранжиан не содержит иных сингулярных слагаемых, кроме скачков и дельта-функций, при условии, что четырех-скорость u^a, лагранжевы множители μ_1, μ_2 и их производные непрерывны на Σ_0. Для этого распишем подробно следующее слагаемое:

$$
\begin{aligned}
\int \{\mu_1 \nabla_a (\eta\, u^a)\} \sqrt{|g|}\, d^4x = \int \Big\{\partial_a \Big(\mu_1\, \eta\, u^a \sqrt{|g|}\Big)(\pm)\Big\}\, d^4x + \\
+ \int \Big\{\Big[\mu_1\, \eta\, u^a \sqrt{|g|}\Big]\partial_a n + \partial_a \Big(\mu_1\, \eta_{(0)}\, u^a \sqrt{|g|}\Big)\Big\}\,\delta(n)\, d^4x + \\
+ \int \Big\{\mu_1\, \eta_{(0)}\, u^a \sqrt{|g|}\,\partial_a n\,\delta'(n) - \partial_a\mu_1\, \big(\eta(\pm) + \eta_{(0)}\,\delta(n)\big)\, u^a \sqrt{|g|}\Big\}\, d^4x = \\
= - \int \big\{\partial_a\mu_1\, \big(\eta(\pm) + \eta_{(0)}\,\delta(n)\big)\, u^a\big\} \sqrt{|g|}\, d^4x, \quad (2.13)
\end{aligned}
$$

в конечном выражении нет неопределенных функций, тем не менее, при выводе, строго говоря, появляется произведение тета-функции на дельта-функцию, так как производная метрики может содержать скачок, в этом случае можно доопределить тета-функцию в нуле произвольным числом от 0 до 1. Аналогичное преобразование можно провести и со слагаемым при лагранжевом множителе μ_2, тогда в S_m не остается производной δ-функции или неопределенных функций, так как остальные слагаемые линейны по переменным, которые содержат сингулярные составляющие. С учетом вышеперечисленного, рассматриваемое действие материи идеальной жидкости для пространства-времени с сингулярной гиперповерхностью имеет вид:

$$
\begin{aligned}
S_m = \int_\Omega \big\{L_m(\pm) + L_{m(0)}\,\delta(n(x))\big\} \sqrt{|g|}\, d^4x, \\
L_m^\pm = -E^\pm + \mu_0^\pm\,(u_a\, u^a - 1) - \partial_a\mu_1\eta^\pm\, u^a - \nabla_a\,(\mu_2\, u^a)\, X^\pm, \\
L_{m(0)} = -E_{(0)} + \mu_{(0)}\,(u_a\, u^a - 1) - \partial_a\mu_1\eta_{(0)}\, u^a - \nabla_a\,(\mu_2\, u^a)\, X_{(0)}. \quad (2.14)
\end{aligned}
$$

При варьировании этого действия будем считать объемные и поверхностные части μ_0, E, η, X независимыми переменными, тогда в координатах $\{n, y^i\}$

получим:

$$\delta\eta^{\pm}:-\frac{\partial E^{\pm}}{\partial\eta^{\pm}}=\partial_a\mu_1\,u^a,\quad \frac{\partial E_{(0)}}{\partial\eta^{\pm}}|_{\Sigma_0}=0,$$
$$\delta\eta_{(0)}:\frac{\partial E^{\pm}}{\partial\eta_{(0)}}=0,\quad \left\{\frac{\partial E_{(0)}}{\partial\eta_{(0)}}+\partial_a\mu_1\,u^a\right\}|_{\Sigma_0}=0,\quad (2.15)$$

$$\delta u^a:\ \mu_2\,\partial_a X^{\pm}+2\mu_0^{\pm}\,u_a-\partial_a\mu_1\,\eta^{\pm}=0,$$
$$\left\{\left(2\mu_{(0)}\,u_a-\partial_a\mu_1\,\eta_{(0)}\right)\delta u^a+\left([\mu_2\,X]-\frac{1}{\sqrt{|h|}}\partial_n\left(\mu_2\sqrt{|h|}\right)X_{(0)}\right)\delta u^n\right\}|_{\Sigma_0}+$$
$$+\left\{\mu_2\,\partial_i X_{(0)}\delta u^i-\mu_2\,X_{(0)}\,\partial_n\delta u^n\right\}|_{\Sigma_0}=0,\quad (2.16)$$

$$\delta X^{\pm}:\ -\frac{\partial E^{\pm}}{\partial X^{\pm}}=\nabla_a\left(\mu_2\,u^a\right),\quad \frac{\partial E_{(0)}}{\partial X^{\pm}}|_{\Sigma_0}=0,$$
$$\delta X_{(0)}:\ -\frac{\partial E^{\pm}}{\partial X_{(0)}}=0\,,\quad \left\{\frac{\partial E_{(0)}}{\partial X_{(0)}}+\nabla_a\left(\mu_2\,u^a\right)\right\}|_{\Sigma_0}=0,$$
$$(2.17)$$

$$\delta\mu_0:\ u_a\,u^a=1,\quad \delta\mu_{(0)}:\ u_a\,u^a|_{\Sigma_0}=1,\quad (2.18)$$

$$\delta\mu_1:\ \nabla_a\left(\eta^{\pm}\,u^a\right)=0,\quad \left\{[\eta\,u^n]+\frac{1}{\sqrt{|h|}}\,\partial_i\left(u^i\,\eta_{(0)}\sqrt{|h|}\right)-u^n\,\eta_{(0)}\,\frac{\partial_n\delta\mu_1}{\delta\mu_1}\right\}|_{\Sigma_0}=0,$$
$$(2.19)$$

$$\delta\mu_2:\ \partial_a X^{\pm}\,u^a=0\,,$$
$$\left\{[u^n X]+u^i\partial_i X_{(0)}-\frac{1}{\sqrt{|h|}}\,\partial_n\left(u^n\sqrt{|h|}\right)X_{(0)}-u^n X_{(0)}\,\frac{\partial_n\delta\mu_2}{\delta\mu_2}\right\}|_{\Sigma_0}=0,\quad (2.20)$$

$$\delta g_{ab}:\ T^{ab}=(p+E)\,u^a u^b-p\,g^{ab},$$
$$S^{ab}\,\delta g_{ab}=-2\mu_{(0)}\,u^a u^b\,\delta g_{ab}-g^{ab}\left(p_{(0)}+\frac{\partial E_{(0)}}{\partial X_{(0)}}X_{(0)}+\mu_2\,u^n[X]\right)\delta g_{ab}+$$
$$+\,\mu_2\,X_{(0)}u^c g^{ab}\,\nabla_c\,\delta g_{ab},\quad (2.21)$$

где обозначение $|_{\Sigma_0}$ используется для уравнений, которые выполняются на гиперповерхности, $p_{(0)} = \eta_{(0)} \frac{\partial E_{(0)}}{\partial \eta_{(0)}} - E_{(0)}$, $h(y) = g(0,y)$. При выводе уравнений (2.19, 2.20,2.16) был использован тот факт, что мы рассматриваем вариацию с закрепленными концами,в частности, $\delta\mu_1|_{\partial\Omega} = 0$, поэтому интеграл:

$$\int_{\Sigma_0} \partial_i \left(\delta\mu_1\, u^i\, \eta_{(0)} \sqrt{|h|}\right)\, d^3y,$$

равен нулю.

Как видно из уравнения (2.19), в законе рождения на Σ_0 возникает произвольная функция $\frac{\partial_n \delta\mu_1}{\delta\mu_1}$, для того, чтобы на Σ_0 выполнялся закон сохранения числа частиц, необходимо положить ее равной нулю.

Из приведенных выше уравнений следует, что введение дельта-функции в X приводит к появлению неопределенных слагаемых вида: $\partial_n g_{na}$ в поверхностном тензоре энергии-импульса, поэтому положим $X_{(0)} = 0$, тогда:

$$S^{ab} = \left(p_{(0)} + E_{(0)}\right)\, u^a u^b - p_{(0)}\, g^{ab}\,. \tag{2.22}$$

В общей теории относительности S^{nn} и S^{ni} равны нулю, для светоподобной гиперповерхности $g^{nn} = 0$, поэтому из (2.22) следует, что $u^n = 0$. Альтернативой может быть равенство нулю $\eta_{(0)}$, но для такого варианта все компоненты S^{ab} из (2.22) равны нулю. То же условие: $u^n = 0$, получается и для времениподобной и пространственноподобной гиперповерхностей, но из-за того, что g^{ni} всегда можно сделать равными нулю в нормальных гауссовых координатах. Для светоподобных и пространственноподобных гиперповерхностей при $u^n = 0$ невозможно выполнить условие $u^a\, u_a|_{\Sigma_0} = 1$. Для пространственноподобного случая в гауссовых нормальных координатах: $u^a\, u_a = \gamma_{ij}\, u^i\, u^j$, и так как γ_{ij} - пространственная часть метрики, то $u^a\, u_a|_{\Sigma_0} \neq 1$, аналогично для светоподобного случая в координатах $\{n,\lambda,\theta^A\}$ получим: $u^a\, u_a|_{\Sigma_0} = \sigma_{AB}\, \theta^A\, \theta^B \neq 1$, поэтому $\eta_{(0)} = 0$ для этих случаев, то есть тонких оболочек такого типа для рассматриваемого действия в общей теории относительности не существует.

Для времениподобных гиперповерхностей из того, что $g^{nn} = \varepsilon \neq 0$ и $S^{nn} = 0$ следует условие $p_{(0)} = 0$. Это означает, что материя, сконцентрированная на тонкой оболочке является пылью, поверхностный тензор энергии-импульса для этого случая:

$$S^{ij} = E_{(0)}\, u^i\, u^j\,, \quad i,j \neq n, \tag{2.23}$$

где множитель $E_{(0)}$ представляет из себя поверхностную плотность энергии. В частности, для сферически-симметричной тонкой оболочки из пыли:

$$E_{(0)} = \frac{m}{4\pi r^2},$$

где m - суммарная масса покоя частиц оболочки.

В квадратичной гравитации единственным ограничением на «внешнее давление» и «внешний поток» является равенство нулю S^{nn} для светоподобного случая, поэтому для него $u^n = 0$, и, как результат, $\eta_{(0)} = 0$. Для времениподобных гиперповерхностей $u^n = 0$, следовательно, в гауссовых нормальных координатах имеем:

$$S^{nn} = p_{(0)}, \quad S^{ni} = -p_{(0)}\, g^{ni} = 0,$$

то есть, «внешнее давление» соответствует давлению частиц на оболочке.

Для пространственноподобных гиперповерхностей в нормальных гауссовых координатах без ограничения общности можно положить $u^a\big|_{|\Sigma_0} = \delta^a_n$, тогда:

$$S^{nn} = E_{(0)}, \quad S^{ni} = -p_{(0)}\, g^{ni} = 0,$$

в этом случае «внешнее давление» соответствует плотности энергии частиц на оболочке.

2.1 Гравитация

Рассмотрим процесс рождения частиц, которые являются квантами некоторого скалярного поля, в отсутствие классических внешних полей. Как отмечено в работах [71—75], в рамках данной феноменологической модели рождение обусловлено взаимодействием квантового скалярного поля с «внешним» гравитационным полем. А именно, гравитационное поле вызывает поляризацию вакуума квантовых вакуумных флуктуаций скалярного поля, и эта поляризация приводит к возникновению новых частиц. При рассматриваемом феноменологическом подходе эти скалярные кванты описываются классической плотностью энергии, плотностью числа частиц и четырех-скоростями, поэтому нет необходимости явно вводить какое-либо классическое скалярное поле. Таким образом, функция Φ должна зависеть только от геометрических инвариантов.

Как было отмечено ранее, расчеты, проделанные несколькими независимыми группами исследователей [11—20] в ходе изучения процессов квантового рождения частиц скалярным полем на фоне космологической модели, показывают, что в однопетлевом приближении квантовые поправки к лагранжиану содержат квадратичные по кривизне слагаемые. Более того, в статье [20] продемонстрировано, что вакуумное среднее величины $\nabla_a \left(\eta\, u^a\right)$, и как следствие, функция Φ пропорциональна квадрату тензора Вейля: $\Phi = \vartheta\, C^2$, причем коэффициент ϑ зависит от типа рассматриваемых частиц. Несмотря на то, что этот результат был получен для конкретной фоновой метрики:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx_1^2 - b^2(t)dx_2^2 - c^2(t)dx_3^2,$$

где a,b,c - фиксированные неотрицательные функции времени t, в работе [76] отмечено, что такую форму функции Φ можно считать универсальной для случая рождения частиц за счет поляризации вакуума, вызванной произвольным гравитационным полем.

Для того, чтобы продемонстрировать этот факт, докажем, что величина $\nabla_a \left(\eta\, u^a\right)\, \sqrt{-g}$ является конформным инвариантом в четырех измерениях.

При локальном конформном преобразовании метрики: $g_{ab} = e^{2\omega}\widetilde{g}_{ab}$, объемная плотность числа частиц, четыре-скорость и детерминант метрики в четырехмерном случае меняются согласно следующему закону:

$$\eta = \frac{\widetilde{\eta}}{e^{3\omega}}, \quad u^a = \frac{\widetilde{u}^a}{e^{\omega}}, \quad \sqrt{-g} = \sqrt{-\widetilde{g}}\, e^{4\omega}\,,$$

соответственно:

$$\nabla_a \left(\eta\, u^a\right)\, \sqrt{-g} = \partial_a \left(\eta\, u^a\, \sqrt{-g}\right) = \partial_a \left(\widetilde{\eta}\, \widetilde{u}^a\, \sqrt{-\widetilde{g}}\right) = \widetilde{\nabla}_a \left(\widetilde{\eta}\, \widetilde{u}^a\right)\, \sqrt{-\widetilde{g}}\,.$$

Таким образом, из связи (2.9) следует конформная инвариантность $\Phi\, \sqrt{-g}$. С другой стороны, если ограничиться инвариантами, которые не более чем квадратичны по тензору кривизны, в римановой геометрии единственной конформно инвариантной комбинацией из геометрических инвариантов является $C^2\sqrt{-g}$. Следовательно, этот результат для функции Φ является универсальным для произвольной метрики в римановой геометрии с учетом обратного влияния, независимо от формы гравитационного лагранжиана.

Рассмотрим действие (2.10) с $\Phi = \vartheta\, C^2$ для пространства-времени с сингулярной гиперповерхностью. Лагранжиан материи не должен содержать неопределенные функции, такие как квадрат дельта-функции или произведение дельта и тета-функций. Включение в лагранжиан квадрата тензора Вейля означает, что, вне зависимости от выбранной модели гравитации, должны выполняться условия Лихнеровича, то есть, компоненты метрики и их первые производные непрерывны на гиперповерхности. В этом случае тензор Вейля содержит не более чем скачок на Σ_0:

$$C^2 = C^2(\pm).$$

С учетом всего вышеперечисленного, рассматриваемое действие материи можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
S_m = \int_\Omega \left\{L_m(\pm) + L_{m(0)}\,\delta(n(x))\right\}\sqrt{|g|}\,d^4x,& \\
L_m^{\pm} = -E^{\pm} + \mu_0^{\pm}\,(u_a\,u^a - 1) - \partial_a\mu_1\eta^{\pm}\,u^a - \mu_1\,\vartheta\,C^{2\pm} + \mu_2\,\partial_a X\,u^a,& \\
L_{m(0)} = -E_{(0)} + \mu_{(0)}\,(u_a\,u^a - 1) - \partial_a\mu_1\eta_{(0)}\,u^a.&
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Поверхностный тензор энергии-импульса, по определению, выражается через ту часть вариации действия материи по метрике, которая сводится к интегралу по сингулярной гиперповерхности Σ_0:

$$\delta_g S_m|_{\Sigma_0} = -\frac{1}{2}\int_{\Sigma_0}\sqrt{|h|}\left(S^{ab}\delta g_{ab}\right)\,d^3y\,.$$

Так как конформная гравитация, лагранжиан которой пропорционален C^2, является частным случаем квадратичной гравитации, для нахождения вариации действия (2.24), покажем как меняется вариация по метрике действия квадратичной гравитации при умножении его на функцию $\mu_1(x)$, используя описанные выше координаты $\{n,y^i\}$:

$$\delta_g \int_\Omega \mu_1(x) L_q(\pm)\sqrt{|g|}\, d^4x = \int_\Omega \mu_1 \left(H_{ab}\,\delta g^{ab} + \nabla_c V^c\right)(\pm)\sqrt{|g|}\, d^4x =$$
$$= \int_\Omega \left\{\mu_1\, H_{ab}\,\delta g^{ab} - \partial_c\mu_1\, D^{cbd}\,\delta g_{bd} + \nabla_a\left(\partial_c\mu_1 A^{acbd}\right)\delta g_{bd}\right\}(\pm)\sqrt{|g|}\, d^4x +$$
$$+ \int_{\Sigma_0}\left[-\mu_1\, V^n + \partial_c\mu_1\, A^{ncbd}\,\delta g_{bd}\right]\sqrt{|h|}\, d^3y\,. \quad (2.25)$$

Кроме того, как и до этого, вектор V^c может быть заменен $\widetilde{V}^c$, так как выполняется следующее соотношение:

$$\int_\Omega \mu_1(x)\,\nabla_c U^c(\pm)\sqrt{|g|}\, d^4x = -\int_{\Sigma_0}\left[\mu_1\, U^n\right]\sqrt{|h|}\, d^3y -$$
$$- \int_\Omega \partial_c\mu_1\, U^c(\pm)\sqrt{|g|}\, d^4x = -\int_{\Sigma_0}\left[\mu_1\,\nabla_i\left\{\left(R^{ib}g^{nd} - R^{nd}g^{ib}\right)\delta g_{bd}\right\}\right]\sqrt{|h|}\, d^3y +$$
$$+ \int_\Omega \nabla_c\nabla_a\,\mu_1\,\left(R^{ab}g^{cd} - R^{cd}g^{ab}\right)\delta g_{bd}(\pm)\sqrt{|g|}\, d^4x +$$
$$+ \int_{\Sigma_0}\left[\partial_i\mu_1\,\left(R^{nb}g^{id} - R^{id}g^{nb}\right)\delta g_{bd}\right]\sqrt{|h|}\, d^3y = 0\,, \quad i \neq n. \quad (2.26)$$

Для частного случая $L_q = C^2$, воспользовавшись свойствами тензора Вейля и тождеством Де Витта (1.55) получим, что объемная часть тензора энергии-импульса для действия (2.24):

$$T^{ab\pm} = \left(p^\pm + E^\pm\right)u^{a\pm}u^{b\pm} - p^\pm\, g^{ab} - 8\vartheta\left(\nabla_c\,\nabla_d + \frac{1}{2}\,R^\pm_{cd}\right)\left(\mu_1\, C^{acbd\pm}\right), \quad (2.27)$$

поверхностный тензор энергии-импульса соотвественно:

$$
\begin{aligned}
&-2\vartheta\mu_1\ \Big\{\ 2\left(\,[\nabla^n R^{bd}] + [\partial_k\left(g^{kn}R^{bd}\right)] + g^{kn}\Gamma^a_{ak}[R^{bd}] + 2g^{an}\Gamma^b_{ac}[R^{cd}]\,\right)\delta g_{bd}- \\
&\quad -\frac{1}{3}\ \left(g^{bd}[\partial^n R] + [\partial_k\left(g^{kn}g^{bd}R\right)] + g^{kn}\,g^{bd}\Gamma^a_{ak}[R] + 2g^{an}g^{cd}\,\Gamma^b_{ac}[R]\,\right)\delta g_{bd}- \\
&-\frac{2}{3}\left(\,[\nabla^b R^{nd}] + [\partial_k\left(g^{nb}R^{kd}\right)] + g^{nb}\,\Gamma^a_{ak}[R^{kd}] + g^{nd}\,\Gamma^b_{ac}[R^{ac}] + g^{nc}\,\Gamma^b_{ac}[R^{ad}]\,\right)\delta g_{bd}- \\
&-\frac{2}{3}\left(\,[\nabla^d R^{nb}] + [\partial_k\left(g^{nd}R^{kb}\right)] + g^{nd}\,\Gamma^a_{ak}[R^{kb}] + g^{nb}\,\Gamma^d_{ac}[R^{ac}] + g^{nc}\,\Gamma^d_{ac}[R^{ab}]\,\right)\delta g_{bd}+ \\
&\qquad\qquad +\frac{1}{3}\left(\,[R]\left(2g^{bn}g^{dn} + \varepsilon g^{bd}\right) - 6\varepsilon\,[R^{bd}]\,\right)\partial_n\delta g_{bd}\ \Big\} + \\
&\qquad +\frac{2}{3}\,\vartheta\,\partial_a\mu_1\,\{\,-[R](g^{nb}g^{ad} + g^{nd}g^{ab} - g^{an}g^{bd}) - 6g^{na}[R^{bd}]+ \\
&+4\left(g^{dn}[R^{ab}] + g^{bn}[R^{ad}]\right)\,\}\,\delta g_{bd} + \left(\left(p_{(0)} + E_{(0)}\right)u^d u^b - p_{(0)}\,g^{bd}\right)\delta g_{bd} = S^{ab}\,\delta g_{ab},
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

где $k \neq n$, по причинам, указанным выше, последнее слагаемое отсутствует для светоподобных гиперповерхностей.

Закон рождения получается вариацией по μ_1 и также разделяется на объемную и поверхностную части:

$$
\nabla_a(\eta^{\pm}u^{\pm a}) = \vartheta\,C^{2\pm}, \qquad \left\{[\eta u^n] + \frac{1}{\sqrt{|h|}}\,\partial_i\left(u^i\,\eta_{(0)}\,\sqrt{|h|}\right)\right\}|_{\Sigma_0} = 0\,. \tag{2.29}
$$

Выделим компоненты S^{nn} и S^{ni} поверхностного тензора энергии-импульса для рассматриваемого лагранжиана материи:

$$
\begin{aligned}
S^{nn} = -\frac{4}{3}\vartheta\mu_1\left(g^{in}\,[\nabla_i R^{nn}] - \varepsilon\,[\nabla_i R^{in}] + \Gamma^n_{ij}\left(g^{in}g^{jn}[R] - 2\varepsilon[R^{ij}]\right)\right) + \\
+\left(p_{(0)} + E_{(0)}\right)u^n u^n - p_{(0)}\,\varepsilon,
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{ni} &= \frac{2}{3}\vartheta\,\partial_j\mu_1\left(\,4\varepsilon[R^{ij}] - (\varepsilon g^{ij} + g^{ni}g^{nj})\,[R]\,\right) - 2\vartheta\mu_1\ \Big\{\ \frac{4}{3}\,g^{nk}[\nabla_k R^{in}]+ \\
&\quad +2\,g^{an}\Gamma^n_{ac}[R^{ci}] - \frac{1}{3}\,g^{in}g^{nk}[\partial_k R] - \frac{1}{3}\,g^{an}g^{ci}\,\Gamma^n_{ac}[R] + \frac{1}{3}\,g^{an}g^{cn}\,\Gamma^i_{ac}[R]+ \\
&\quad +\frac{1}{3}\,g^{kn}\,g^{in}\Gamma^a_{ak}[R] - \frac{2}{3}[\nabla^i R^{nn}] + \frac{1}{3}\,[\partial_k\left(g^{kn}g^{in}R\right)] - \frac{2}{3}\,g^{ni}\,\Gamma^n_{ac}[R^{ac}]- \\
&\qquad -\frac{2}{3}\,g^{nc}\,\Gamma^n_{ac}[R^{ai}]\ \Big\} + \left(p_{(0)} + E_{(0)}\right)u^n u^i - p_{(0)}\,g^{ni}, \quad i,j,k \neq n.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

Как отмечено ранее, уравнения на S^{ij} компоненты определяют произвольные функции, возникающие из-за неявного присутствия производной дельта-функции, поэтому они не определяют динамику гиперповерхности. Это не так для тонких оболочек, поэтому для них имеет смысл получить выражения для S^{ij} в явном виде. Так как для тонких оболочек $S^{nn} = S^{ni} = 0$, то работают приведенные в предыдущем разделе аргументы о том, что вклад, связанный с $\eta_{(0)}$, будет только для времениподобных тонких оболочек с $p_{(0)} = 0$.

Для времениподобных и пространственноподобных тонких оболочек $[R^{ab}] = 0$, соответственно из (2.28) находим:

$$S^{ij} = -2\vartheta\mu_1 \left\{ 2[\nabla^n R^{ij}] - \frac{1}{3}\, g^{ij}[\partial^n R] - \frac{2}{3}[\nabla^i R^{nj}] - \frac{2}{3}[\nabla^j R^{ni}] \right\} + E_{(0)}\, u^i u^j \,. \quad (2.32)$$

Для светоподобных тонких оболочек $[R] = 0$, для этого типа гиперповерхностей из (2.28) получим:

$$\begin{aligned} -2\vartheta\mu_1 \, \{ \, 2 \Big([\nabla^n R^{ij}] + [\partial_k \left(g^{kn} R^{ij} \right)] + g^{kn}\Gamma^a_{ak}[R^{ij}] + g^{kn}\Gamma^i_{kl}[R^{lj}] + g^{kn}\Gamma^j_{kl}[R^{li}] \Big) - \\ - \frac{2}{3} \left([\nabla^i R^{nj}] + [\partial_k \left(g^{ni} R^{kj} \right)] + g^{ni}\,\Gamma^a_{ak}[R^{kj}] + g^{nj}\,\Gamma^i_{kl}[R^{lk}] + g^{nk}\,\Gamma^i_{lk}[R^{lj}] \right) - \\ - \frac{2}{3} \Big([\nabla^j R^{ni}] + [\partial_k \left(g^{nj} R^{ki} \right)] + g^{nj}\,\Gamma^a_{ak}[R^{ki}] + g^{ni}\,\Gamma^j_{kl}[R^{kl}] + g^{nk}\,\Gamma^j_{lk}[R^{li}] \Big) \, \} + \\ + \frac{2}{3}\,\vartheta\,\partial_k\mu_1 \left(-6g^{nk}[R^{ij}] + 4g^{jn}[R^{ki}] + 4g^{in}[R^{kj}] \right) = S^{ij}, \quad i,j,k,l \neq n \,. \quad (2.33) \end{aligned}$$

Отметим, что при выводе компонент поверхностного тензора энергии-импульса из действия материи мы не фиксировали лагранжиан гравитации. В частности, можно было бы выбрать действие общей теории относительности, но тогда из уравнений движения (1.26) следовало бы, что для этого случая никаких сингулярных гиперповерхностей не существует, так как в левой части уравнений движения были бы только скачки символов Кристоффеля, которые для данной модели равны нулю из-за условий Лихнеровича.

Уравнения (2.30,2.31) относятся к двойному слою произвольного типа, далее перейдем к рассмотрению ряда частных случаев. Так, для времениподобных (пространственноподобных) двойных слоев в нормальных гауссовых координатах имеем:

$$S^{nn} = 2\vartheta\mu_1 \left(-\frac{1}{3}\, K\,[R] + 2\, K_{ij}\,[R^{ij}] \right) + \left(p_{(0)} + E_{(0)} \right) u^n u^n - p_{(0)}\,\varepsilon,$$

$$S^{ni} = \varepsilon\,\vartheta\,\partial_j\mu_1\,\frac{2}{3}\left(4[R^{ij}] - g^{ij}\,[R]\right) - 2\beta\mu_1\,\left(\frac{1}{3}\,[\partial^i R] - 2\,[\nabla_j R^{ij}]\right) + \\ + \left(p_{(0)} + E_{(0)}\right) u^i u^n, \quad i,j \neq n.$$

На основе этих соотношений получим «внешнее давление» и «внешний поток» для сферически-симметричного времениподобного (пространственноподобного) двойного слоя, который разделяет два сферически симметричных пространтсва-времени, в координатах $\{\tau, n, \theta, \phi\}$:

$$S^{nn} = \frac{\vartheta\mu_1}{r^2}\,\frac{4}{3}\,\widetilde{K}\,[\widetilde{R}] + \left(p_{(0)} + E_{(0)}\right) u^n u^n - p_{(0)}\,\varepsilon, \tag{2.34}$$

$$S^{n0} = -\vartheta\,\partial_0\mu_1\,\frac{2}{3r^2}\left([\widetilde{R}] + 2r\,[\sigma]\right) - \vartheta\mu_1\frac{4}{3\,r^3}\left[\partial_0\left(r\widetilde{R}\right)\right] + \\ + \left(p_{(0)} + E_{(0)}\right) u^0 u^n, \quad S^{n2} = S^{n3} = 0\,. \tag{2.35}$$

где $\widetilde{R}$, σ - инварианты сферической геометрии, определенные соотношениями (1.69,1.70), $\widetilde{K}$ - след тензора внешней кривизны двумерной «метрики» $\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}$ из (1.65). Выше мы также предположили, что, в силу сферической симметрии, функция μ_1 не зависит от углов, то есть $\mu_1(x) = \mu_1(\tau,n)$.

Рассcмотрим сферически-симметричный времениподобный (пространственноподобный) двойной слой (4.9,4.10) с поверхностным тензором энергии-импульса (2.28). Воспользовавшись соотношениями (2.34,2.35), получим:

$$-\frac{1}{2}\,(\beta_1 + \beta_2)\,K\,[\widetilde{R}] - \beta_1\,\frac{\partial_n r}{r}\,[\widetilde{R}] + (\beta_1 + 3\beta_2)\,K\,r[\sigma] = 8\pi r^2\,S^{nn} = \\ = \vartheta\mu_1\,\frac{32\pi}{3}\,\widetilde{K}\,[\widetilde{R}] + 8\pi r^2\,\left(p_{(0)} + E_{(0)}\right) u^n u^n - 8\pi r^2\,p_{(0)}\,\varepsilon, \tag{2.36}$$

$$(\beta_1 + \beta_2)\,\frac{1}{2r^2}\,[\partial_0\widetilde{R}] - (\beta_1 + 3\beta_2)\left[\partial_0\left(\frac{\sigma}{r}\right)\right] - \beta_2\,\frac{\partial_0 r}{r^3}[\widetilde{R}] = 8\pi\,S^{n0} = \\ = -\vartheta\,\partial_0\mu_1\,\frac{16\pi}{3r^2}\left([\widetilde{R}] + 2r\,[\sigma]\right) - \vartheta\mu_1\frac{32\pi}{3\,r^3}\left[\partial_0\left(r\widetilde{R}\right)\right] + \\ + 8\pi\,\left(p_{(0)} + E_{(0)}\right) u^0 u^n, \quad S^{n2} = S^{n3} = 0\,. \tag{2.37}$$

Для конформной гравитации, которой соответствует связь параметров: $\beta_1 = -3\beta_2 = 2\alpha_1$, уравнения движения (2.36,2.37) сводятся к следующим:

$$-\frac{\alpha_1}{12\pi\, r^2}\,\widetilde{K}\,[\widetilde{R}] = S^{nn} = \frac{\vartheta\mu_1}{r^2}\,\frac{4}{3}\,\widetilde{K}\,[\widetilde{R}] + \left(p_{(0)} + E_{(0)}\right) u^n u^n - p_{(0)}\,\varepsilon\,, \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_1}{12\pi r^3}\,\left[\partial_0\left(r\widetilde{R}\right)\right] = S^{n0} = -\vartheta\,\partial_0\mu_1\,\frac{2}{3r^2}\left([\widetilde{R}] + 2r\,[\sigma]\right) - \vartheta\mu_1\frac{4}{3\,r^3}\left[\partial_0\left(r\widetilde{R}\right)\right] + \\ + \left(p_{(0)} + E_{(0)}\right) u^0 u^n, \quad S^{n2} = S^{n3} = 0.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Так как для времениподобной гиперповерхности всегда можно сделать $u^n = 0$, а для пространственноподобной - $u^0 = 0$, то из второго уравнения следует нетривиальное соотношение на функцию $\mu_1(\tau{,}0)$:

$$-\left(\frac{\alpha_1}{8\pi\vartheta} + 2\mu_1\right)\,\left[\partial_0\left(r\widetilde{R}\right)\right] = \partial_0\mu_1\,\left([r\widetilde{R}] + 2r^2\,[\sigma]\right),$$

здесь необходимо отметить, что уравнения (2.38,2.39) задают только значение функции μ_1 на гиперповерхности, определяя, таким образом, часть граничных условий для уравнений движения в $\Omega^\pm$ областях.

Аналогично, из (2.32) находим поверхностный тензор энергии-импульса для сферически-симметричной времениподобной (пространственноподобной) тонкой оболочки:

$$S^0_0 = -\varepsilon\frac{4}{3\,r^2}\vartheta\mu_1\,[\partial_n\widetilde{R}] - \varepsilon\,E_{(0)}\,(u^0)^2, \quad S^2_2 = S^3_3 = \varepsilon\frac{2}{3\,r^2}\vartheta\mu_1\,[\partial_n\widetilde{R}], \tag{2.40}$$

откуда следует, что такой тип сингулярной гиперповерхности в пространственноподобном случае возможен, только если существует скачок производных двумерной скалярной кривизны, и она не является постоянной в $\Omega^\pm$ одновременно.

Выпишем уравнения движения времениподобной (пространственноподобной) сферически-симметричной тонкой оболочки в квадратичной гравитации (4.18,4.19) для данного действия:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\,[\partial_n\widetilde{R}]-(\beta_1+3\beta_2)\,r\,[\partial_n\sigma] = 8\pi\varepsilon\,r^2 S^0_0 = -\frac{32\pi}{3}\vartheta\mu_1\,[\partial_n\widetilde{R}]-8\pi r^2 E_{(0)}\,(u^0)^2,\\ \frac{1}{2}\beta_2\,[\partial_n\widetilde{R}] - (\beta_1 + 3\beta_2)\,r[\partial_n\sigma] = 8\pi\varepsilon\,r^2 S^2_2 = \frac{16\pi}{3}\vartheta\mu_1\,[\partial_n\widetilde{R}], \quad S^3_3 = S^2_2,\end{aligned} \tag{2.41}$$

если затем вычесть из первого уравнения второе, получим соотношение:

$$\frac{1}{2}\left(\beta_1 + 32\pi\,\vartheta\,\mu_1\right)\,[\partial_n \widetilde{R}] = -8\pi r^2 E_{(0)}\,(u^0)^2,$$

из которого следует, что лагражев множитель μ_1 - константа на гиперповерхности: $\mu_1(\tau,0) = -\frac{\beta_1}{32\pi\vartheta}$ для пространственноподобного случая.

Рассмотрим также светоподобные сингулярные гиперповерхности для данной модели. В описанных далее специальных координатах $\{n,\lambda,\theta^A\}$ «внешнее давление» и «внешний поток» для светоподобного двойного слоя, полученные непосредственно из действия материи, следующие:

$$S^{nn} = 0, \quad S^{n\lambda} = -\frac{2}{3}\vartheta\,\partial_\lambda\mu_1\,[R] - \frac{4}{3}\,\vartheta\mu_1\,\left([\partial_\lambda R] + \Gamma^i_{i\lambda}\,[R]\right), \quad S^{nA} = 0.$$

Таким образом, компоненты поверхностного тензора энергии-импульса S^{na} равны нулю, за исключением $S^{n\lambda}$, что согласуется с полученными ниже уравнениями движения светопобных сингулярных гиперповерхностей в квадратичной гравитации.

Далее, рассмотрим поверхностный тензор энергии импульса для светоподобной тонкой оболочки из (2.33):

$$-2\vartheta\mu_1\,\left\{4[\partial_\lambda R^{\lambda\lambda}] + 2\Gamma^a_{a\lambda}[R^{\lambda\lambda}] + 8\Gamma^\lambda_{\lambda\lambda}[R^{\lambda\lambda}] - \frac{2}{3}\,[\partial_n R]\right\} + \frac{4}{3}\,\vartheta\,\partial_\lambda\mu_1[R^{\lambda\lambda}] = S^{\lambda\lambda}\,,$$

для частного случая сферически-симметричной геометрии имеем:

$$\frac{4}{3r^2}\vartheta\,\mu_1\,[\partial_n\widetilde{R}] - \frac{8}{3r}\,\vartheta\,\partial_\lambda\mu_1[\partial^2_{nn}r] = S^{\lambda\lambda}\,,$$

если затем использовать уравнения движения сферически-симметричной светоподобной тонкой оболочки в квадратичной гравитации (3.24), для рассматриваемого действия находим:

$$-\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)[\partial_n\widetilde{R}] + r\,(\beta_1+3\beta_2)[\partial_n\sigma] = 8\pi\,r^2\,S^{\lambda\lambda} =$$
$$= \frac{32\pi}{3}\vartheta\,\mu_1\,[\partial_n\widetilde{R}] - \frac{64\pi r}{3}\,\vartheta\,\partial_\lambda\mu_1[\partial^2_{nn}r]\,.$$

Для светоподобных сферически симметричных гиперповерхностей двойной слой, как будет показано ниже, существует, если снять ограничения, связанные с условиями Лихнеровича, и считать непрерывной на гиперповерхности только метрику. Тем не менее, даже в этом случае $C^2 = C^2(\pm)$, так как для сферически-симметричной метрики: $C^2 = \frac{(\widetilde{R}-2)^2}{3r^4}$, и двумерная скалярная кривизна $\widetilde{R}$ содержит только первые производные по n для светоподобной гиперповерхности.

После интегрирования по углам получим двумерное эффективное действие для материи с радиусом в качестве дилатона. Выпишем ту часть, которая содержит слагаемое с Φ, потому что только это слагаемое дает вклад в поверхностный тензор энергии-имульса, так как $\eta_{(0)} = 0$:

$$S_{2m} = -\frac{4\pi\,\vartheta}{3}\int_{\Omega_2}\mu_1(x)\,\sqrt{|\widetilde{\gamma}|}\,d^2x\,\left(\widetilde{R}-2\right)^2(\pm)+...,$$

здесь $|\widetilde{\gamma}|$ и $\widetilde{\nabla}_\alpha$- модуль детерминанта и ковариантная производная двумерной метрики $\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}$, соответственно.

Выделим поверхностную часть в вариации этого действия по $\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}$ и радиусу в координатах $\{n,\widetilde{\lambda}\}$:

$$\begin{aligned}\delta S_{2m}|_{\Sigma_0} &= -2\pi\int_{\Sigma_0}\sqrt{|\widetilde{h}|}\,\left(r^6\,S^{\alpha\beta}\delta\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}+2r^3S\,\delta r\right)d\widetilde{\lambda} = \\ &= \int\frac{8\pi\vartheta}{3}\Big\{\left[\mu_1\left(\widetilde{R}-2\right)\widetilde{\nabla}_n\,\delta\widetilde{\gamma}_{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}}\right]-\left[\partial_n\left(\mu_1\left(\widetilde{R}-2\right)\right)\right]\delta\widetilde{\gamma}_{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}}+ \\ &\qquad +2\left[\partial_{\widetilde{\lambda}}\left(\mu_1\left(\widetilde{R}-2\right)\right)\right]\delta\widetilde{\gamma}_{n\widetilde{\lambda}}\Big\}\sqrt{|\widetilde{h}|}\,d\widetilde{\lambda}\,, \end{aligned}\tag{2.42}$$

где $\widetilde{\lambda} = \int\frac{d\lambda}{r^2(0,\lambda)}$, $\widetilde{h} = \widetilde{\gamma}|_{\Sigma_0}$, S - след поверхностного тензора энергии-импульса, Ω_2 -двумерное многообразие, которое остается после интегрирования исходного действия по углам, лагранжев множитель $\mu_1(x)$ считается непрерывным на Σ_0. «Внешнее давление» и «внешний поток» для данного случая:

$$S^{nn} = S^{n2} = S^{n3} = 0,\quad S^{n\widetilde{\lambda}} = -\frac{4\,\vartheta}{3\,r^6}\left[\partial_{\widetilde{\lambda}}\left(\mu_1\widetilde{R}\right)\right].\tag{2.43}$$

Если затем, как и в предыдущем примере, выбрать в качестве действия гравитации конформную гравитацию, то из уравнений (3.42,2.43) следует, что:

$$\partial_{\widetilde{\lambda}}\left[\widetilde{R}\left(\mu_1+\frac{\alpha_1}{16\pi\,\vartheta}\right)\right] = 0$$

Таким образом, для функции $\mu_1(0,\widetilde{\lambda})$ получим:

$$\mu_1(0,\widetilde{\lambda}) = -\frac{\alpha_1}{16\pi\,\vartheta} + C\,[\widetilde{R}]^{-1},$$

где C - произвольная константа.

Особый физический интерес представляет ситуация, когда возможность рождения частиц существует, но не реализуется. Это так называемый «беременный вакуум» [34], который является примером физического вакуума. Этот случай соответствует решению уравнений движения, когда объемная плотность числа частиц и, как следствие, функция Φ равны нулю, хотя формально слагаемое, ответственное за рождение частиц, все так же присутствует в действии материи.

В этой ситуации, для уравнения (2.8), которое является следствием уравнений движения, возможны два варианта. В первом материя, которая потенциально может родиться, обладает ненулевым давлением $p > 0$ и $\lim\limits_{\eta\to 0}\dfrac{E+p}{\eta} = 0$, поэтому $\partial_a\mu_1\, u^a = 0$. Так как u^a для «беременного вакуума» произвольный ненулевой вектор, нормированный условием (2.4), единственным решением может быть $\mu_1 = const$. Исключением является космология, для которой $u^0 = 1, u^i = 0$, $i = 1{,}2{,}3$, но обсуждение этого случая выходит за рамки данной работы.

Во втором варианте частицы, которые могут появиться, представляют из себя пыль, т.е. $p = 0$, $E = m_0\,\eta$, тогда $\partial_a\mu_1\, u^a = -m_0$, поэтому лагранжев множитель μ_1 не обязательно является константой.

Для случая, когда рождение частиц обусловлено исключительно гравитацией, то есть, как показано выше $\Phi = \vartheta C^2$, условие «беременного вакуума» фиксирует определенные геометрические свойства пространства-времени, а именно, квадрат тензора Вейля должен быть равен нулю. Кроме того, из (2.27) при условии $\eta = 0$, $\mu_1 = const$ следует, что в отсутствие внешних полей тензор энергии-импульса пропорционален тензору Баха:

$$T^{ab} = -8\vartheta\,\mu_1\,B^{ab}\,.$$

Для сферически-симметричной метрики:

$$C^2 = \frac{(\widetilde{R}-2)^2}{3r^4},$$

поэтому «беременный вакуум» существует при $\widetilde{R} = 2$. Общий вид сферически-симметричной метрики, для которой выполняется это условие:

$$ds^2 = \frac{r^2(t,x)}{x^2}\left(dt^2 - dx^2\right) - r^2(t,x)\, d\Omega^2, \tag{2.44}$$

где $r(t,x)$ - произвольная функция. Это пространство-время представляет из себя один из вакуумов сферически-симметричной конформной гравитации, описанных в работе [49]. В этой же статье показано, что в этом случае тензор Баха тождественно равен нулю, следовательно $T^{ab} = 0$, поэтому, как минимум, в сферически-симметричном случае «беременный вакуум» соответствует вакуумным решениям соответсвующих полевых уравнений для действия гравитации.

Воспользуемся соотношениями (1.66,1.67,1.68) для того, чтобы выписать уравнения поля для квадратичной гравитации общего вида в сферически-симметричном случае (3.37) при $\widetilde{R} = 2$:

$$\begin{aligned}
&H_{\alpha\beta} = 8\pi r^2 T_{\alpha\beta},\\
&\quad 6\beta\,\Box R - \alpha_4 R - 2\alpha_5\,\Lambda = \frac{6\beta}{r^2}\,\widetilde{\Box} R + \frac{12\beta}{r^3}\,\partial_\alpha r\,\widetilde{\partial}^\alpha R - \alpha_4 R - 2\alpha_5\Lambda = 8\pi T,\\
&H_{\alpha\beta} = \widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}\left(2\beta r^2\widetilde{\Box} R + (\alpha_4 + 2\beta R) r^2\left(-\frac{r^2}{12}R - \Delta + 1\right) + 2\beta r\,\partial_\nu r\,\widetilde{\partial}^\nu R\right) -\\
&\quad - \widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}\,\frac{r^4}{4}\,(\alpha_4 R + 2\alpha_5\Lambda) - 2\beta r^2 \widetilde{\nabla}_\alpha \widetilde{\nabla}_\beta R + 2\beta r\left(\partial_\alpha r\,\partial_\beta R + \partial_\alpha R\,\partial_\beta r\right) +\\
&\quad + 2(\alpha_4 + 2\beta R)\left(-r\widetilde{\nabla}_\alpha\widetilde{\nabla}_\beta r + 2\partial_\alpha r \partial_\beta\, r\right),
\end{aligned} \tag{2.45}$$

причем четырехмерная скалярная кривизна R при условии $\widetilde{R} = 2$ связана с радиусом следующим соотношением:

$$R = -\frac{6}{r^3}\,\widetilde{\Box}\, r\,, \tag{2.46}$$

где $\widetilde{\Box}$ - двумерный лапласиан «метрики» $\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}$. Дополнительно выпишем след тензора $H_{\alpha\beta}$ относительно двумерной «метрики» $\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}^{\alpha\beta}\, H_{\alpha\beta} = 2\beta r^2\,\widetilde{\Box} R + 8\beta r\,\partial_\alpha r\,\widetilde{\partial}^\alpha R + 2r^2(\alpha_4 + 2\beta R)\left(\frac{r^2}{12}R + \Delta + 1\right) -\\
- \frac{r^4}{2}(\alpha_4 R + 2\alpha_5\Lambda) = 8\pi r^4(T - 2T_2^2)\,.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Покажем, что в общей теории относительности метрика де Ситтера (анти-де Ситтера) - единственный вариант сферически-симметричного вакуума, для которого $\widetilde{R} = 2$. Это означает, что для общей теории относительности не существует сферически-симметричного вакуумного решения с сингулярностью в нуле при $\widetilde{R} = 2$, т.е. без рождения частиц. Наиболее простой способ доказательства состоит в том, чтобы найти двумерную скалярную кривизну метрики Шварцшильда-де Ситтера:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{r^2}{6}\frac{\alpha_5}{\alpha_4}\Lambda, \quad \widetilde{R} = 2 - \frac{12M}{r},$$

которая представляет из себя общий случай сферически-симметричного вакуума в общей теории относительности, и убедиться, что $\widetilde{R} = 2$ только при $M = 0$.

Тот же результат получается для модели квадратичной гравитации с ненулевыми α_4 и α_5, в которой из квадратичных комбинаций присутствует только C^2, потому что этот частный случай также удовлетворяет условию $\beta = 0$, так как для него $\alpha_3 = \frac{1}{3}\alpha_1, \quad \alpha_2 = -2\alpha_1$.

Что же касается общего случая квадратичной гравитации, то версия теоремы об отсутствии волос для квадратичной гравитации подразумевает, что для сферически-симметричного статического вакуума со скалярной кривизной, которая достаточно быстро стремится к константе на бесконечности, R должна быть постоянной во всем пространстве-времени [77—79]. Из (2.45) следует, что в этом случае $R = -\frac{2\alpha_5}{\alpha_4}\Lambda$. Подставляя это условие в (2.47), получим $\Delta = -1 + \frac{\alpha_5}{6\alpha_4}\Lambda\, r^2$. Если затем вернуться к системе (2.45), имеем:

$$2\left(\alpha_4 - 4\,\frac{\alpha_5}{\alpha_4}\,\beta\,\Lambda\right)\left(\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}\,r^2 - r\widetilde{\nabla}_\alpha\widetilde{\nabla}_\beta r + 2\partial_\alpha r\partial_\beta\, r\right) = 0,$$

при $\alpha_4 - 4\,\frac{\alpha_5}{\alpha_4}\,\beta\,\Lambda \neq 0$ этот случай аналогичен результату полученному выше для общей теории относительности, т.е. метрика де Ситтера (анти-де Ситтера) является единственно возможным вакуумным решением с учетом всех ограничений.

Для конформной гравитации метрика (2.44) с произвольной функцией $r(t{,}x)$ является сферически-симметричным вакуумом при $\widetilde{R} = 2$, соответственно возможны решения, для которых квадрат тензора Римана:

$$R_{abcd}\,R^{abcd} = \frac{1}{9}R^2 + \frac{4}{3r^2}R\,(1+\Delta) + \frac{8}{r^4}\,(1+\Delta)^2 + \frac{8}{r^2}\nabla_\alpha\nabla_\beta r\,\nabla^\alpha\nabla^\beta r =$$
$$= \frac{1}{3}R^2 + \frac{4}{3r^2}R\,\left(1+\frac{x^2}{r^2}\left(\dot r^2 - r'^2\right)\right) + \frac{8}{r^4}\,\left(1+\frac{x^2}{r^2}\left(\dot r^2 - r'^2\right)\right)^2 +$$
$$+\frac{16x^4}{r^6}\left(\left(\ddot r + \frac{r'}{x} - \frac{\dot r^2 + r'^2}{r}\right)\left(r'' + \frac{r'}{x} - \frac{\dot r^2 + r'^2}{r}\right) - \left(\dot r' + \frac{\dot r}{x} - \frac{2}{r}\dot r\,r'\right)^2\right), \tag{2.48}$$

имеет особенность при $r=0$. Здесь мы использовали формулу (1.72) для частного случая $\widetilde{R}=2$.

Для квадратичной гравитации общего вида также существует вакуумное решение с постоянной четырехмерной кривизной $R = -\frac{2\alpha_5}{\alpha_4}\Lambda = -\frac{\alpha_4}{2\beta}$. Рассмотрим данное решение в координатах $\{t,r\}$, считая, что метрика стационарна, то есть зависит только от r:

$$ds^2 = \gamma_{00}(r)dt^2 + \gamma_{11}(r)dr^2 - r^2\,d\Omega^2.$$

Из связи четырехмерной кривизны с $\widetilde{R}$ (2.46) и определения двумерной скалярной кривизны (1.70) получим следующую систему уравнений:

$$-\widetilde{\Delta}\left(y' + \frac{1}{2}y^2\right) - \frac{1}{2}\widetilde{\Delta}'\,y = 2, \quad \widetilde{\Delta}' + \widetilde{\Delta}\,y = -\frac{r^3}{3}\,R, \quad y = \frac{\gamma_{00}'}{\gamma_{00}} - \frac{2}{r}\,.$$

Так как нас интересует поведение квадрата тензора Римана при $r\to 0$, можно пренебречь слагаемым $-\frac{r^3}{3}\,R$ в правой части второго уравнения, предположив, что левая часть имеет меньший порядок по r. Система уравний сводится к следующей при $r\to 0$:

$$-\widetilde{\Delta}\left(y' + \frac{1}{2}y^2\right) - \frac{1}{2}\widetilde{\Delta}'\,y = 2, \quad \widetilde{\Delta}' + \widetilde{\Delta}\,y = 0,$$

частным решением которой является: $\widetilde{\Delta} = \frac{r^2}{\gamma_{11}} = -\left(r+C\right)^2, \quad y = -\frac{2}{r+C}$, где C - произвольная константа. При $C=0$ это решение представляет из себя метрику Минковского, если же эта константа не равна нулю, квадрат тензора

Римана расходится при $r \to 0$:

$$R_{abcd}\, R^{abcd} = \frac{1}{9}R^2 - \frac{4}{3r^4}\, R\, C(2r+C) + \frac{8}{r^8}\, C^2\, (2r+C)^2 + \frac{16}{r^8}\, C^2\, (r+C)^2\,.$$

Покажем также, что для сферически симметричных геометрий для данного действия в отсутствии внешних полей сингулярной гиперповерхностью, разделяющей два различных пространства-времени с $\widetilde{R} = 2$, то есть представляющих из себя два различных случая «беременного вакуума», может быть только времениподобный или пространственноподобный двойной слой. Здесь необходимо сделать оговорку, что подобный двойной слой невозможен для конформной гравитации, так как в этом случае условие $[\widetilde{R}] = 0$ приводит к сценарию тонкой оболочки.

Для времениподобных и пространственноподобных тонких оболочек из уравнений (2.41) следует, что если $[\partial_n \widetilde{R}] = 0$, то $[\partial_n \sigma] = 0$ и, как следствие, подобной тонкой оболочки не существует.

Что касается светоподобного случая, из выражения для вариации действия (2.42) следует, что при $\widetilde{R}^{+} = \widetilde{R}^{-} = 2$ и $\mu_1 = const$, светоподобной гиперповерхности не существует.

2.2 Скалярное поле

Перейдем к изучению функции Φ более сложного вида, когда в процесс рождения частиц вносит вклад не только гравитация, но и некоторое внешнее скалярное поле φ. Как отмечено выше, комбинация $\sqrt{-g}\,\Phi$ должна быть конформно инвариантной, поэтому одним из наиболее простых вариантов добавления скалярного поля является:

$$\Phi = \vartheta\, C^2 + \zeta \left(\varphi\, \Box \varphi - \frac{1}{6}\, \varphi^2\, R + \Lambda_0\, \varphi^4 \right)\,, \tag{2.49}$$

где ϑ, ζ, Λ_0 - некоторые константы.

Для того, чтобы избежать появления неопределенных функций в лагранжиане необходимо, чтобы скалярное поле φ было непрерывным на гиперповерхности, но его производные могут иметь скачки, тогда действие материи (2.10) для данного случая можно записать как:

$$S_m = \int_\Omega \left\{ L_m(\pm) + L_{m(0)}\, \delta(n(x)) \right\} \sqrt{|g|}\, d^4x,$$

$$L_{m(0)} = -E_{(0)} + \mu_{(0)}\,(u_a\, u^a - 1) - \partial_a \mu_1 \eta_{(0)}\, u^a,$$

$$L_m^{\pm} = -E^{\pm} + \mu_0^{\pm}\,(u_a\, u^a - 1) - \partial_a \mu_1\, \eta^{\pm} u^a -$$

$$- \mu_1 \left(\vartheta\, C^{2\pm} - \frac{1}{6} \zeta\, \varphi^{2\pm}\, R^{\pm} + \zeta\, \Lambda_0\, \varphi^{4\pm} \right) + \mu_2\, \partial_a X\, u^a + \zeta\, \partial_a\, (\mu_1 \varphi)^{\pm}\, \partial^a \varphi^{\pm}\,, \quad (2.50)$$

здесь было использовано уравнение (2.13), а также следующее соотношение:

$$\int \mu_1 \varphi\, \Box \varphi\, \sqrt{-g}\, d^4x = \int \left\{ \partial_a \left(\mu_1 \varphi\, \partial^a \varphi\, \sqrt{-g} \right) - \partial_a\, (\mu_1 \varphi)\; \partial^a \varphi\, \sqrt{-g} \right\}\; d^4x =$$

$$= \int \left\{\, \partial_a \left(\mu_1 \varphi\, \partial^a \varphi\, \sqrt{-g} \right) (\pm) - \partial_a\, (\mu_1 \varphi)\; \partial^a \varphi\, \sqrt{-g} (\pm) \right\}\; d^4x +$$

$$+ \int [\, \mu_1 \varphi\, \partial^a \varphi\, \sqrt{-g}\,]\, \partial_a n(x)\, \delta(n(x))\, d^4x = - \int \partial_a\, (\mu_1 \varphi)\; \partial^a \varphi(\pm)\, \sqrt{-g}\, d^4x\,. \quad (2.51)$$

Закон рождения для данного случая:

$$\nabla_a (\eta^{\pm} u^{\pm a}) = \vartheta\, C^{2\pm} + \zeta \left(\varphi^{\pm}\, \Box \varphi^{\pm} - \frac{1}{6}\, \varphi^{2\pm}\, R^{\pm} + \Lambda_0\, \varphi^{4\pm} \right),$$

$$\left\{ [\eta u^n] + \frac{1}{\sqrt{|h|}}\, \partial_i \left(u^i\, \eta_{(0)}\, \sqrt{|h|} \right) \right\} |_{\Sigma_0} = \zeta\, [\varphi\, \nabla^n \varphi]\;. \quad (2.52)$$

Проварьировав рассматриваемое действие по метрике находим тензор энергии-импульса, его объемная и поверхностная части, соответственно:

$$T^{ab\pm} = \left(p^{\pm} + E^{\pm} \right) u^{a\pm} u^{b\pm} - p^{\pm}\, g^{ab} - 8\vartheta \left(\nabla_c \nabla_d + \frac{1}{2} R^{\pm}_{cd} \right) \left(\mu_1\, C^{acbd\pm} \right) +$$

$$+ \mu_1 g^{ab} \zeta \Lambda_0\, \varphi^{4\pm} - g^{ab} \zeta\, \partial_c \left(\mu_1 \varphi^{\pm} \right) \partial^c \varphi^{\pm} + \zeta\, \partial^a \left(\mu_1 \varphi^{\pm} \right) \partial^b \varphi^{\pm} +$$

$$+ \zeta\, \partial^b \left(\mu_1 \varphi^{\pm} \right) \partial^a \varphi^{\pm} + \frac{\zeta}{3} \left\{ \mu_1 \varphi^{2\pm}\, G^{ab\pm} - \nabla^a \nabla^b \left(\mu_1 \varphi^{2\pm} \right) + g^{ab} \Box \left(\mu_1 \varphi^{2\pm} \right) \right\}\;, \quad (2.53)$$

$$
\begin{aligned}
&- 2\vartheta\mu_1 \, \{ \, 2 \left([\nabla^n R^{bd}] + [\partial_k \left(g^{kn} R^{bd}\right)] + g^{kn}\Gamma^a_{ak}[R^{bd}] + 2g^{an}\Gamma^b_{ac}[R^{cd}] \right) \delta g_{bd} + \\
&\quad - \frac{1}{3} \left(g^{bd}[\partial^n R] + [\partial_k \left(g^{kn} g^{bd} R\right)] + g^{kn} \, g^{bd}\Gamma^a_{ak}[R] + 2g^{an} g^{cd} \, \Gamma^b_{ac}[R] \right) \delta g_{bd} - \\
&- \frac{2}{3} \left([\nabla^b R^{nd}] + [\partial_k \left(g^{nb} R^{kd}\right)] + g^{nb} \, \Gamma^a_{ak}[R^{kd}] + g^{nd} \, \Gamma^b_{ac}[R^{ac}] + g^{nc} \, \Gamma^b_{ac}[R^{ad}] \right) \delta g_{bd} - \\
&- \frac{2}{3} \left([\nabla^d R^{nb}] + [\partial_k \left(g^{nd} R^{kb}\right)] + g^{nd} \, \Gamma^a_{ak}[R^{kb}] + g^{nb} \, \Gamma^d_{ac}[R^{ac}] + g^{nc} \, \Gamma^d_{ac}[R^{ab}] \right) \delta g_{bd} + \\
&+ \frac{1}{3} \left([R] \left(2g^{bn} g^{dn} + \varepsilon g^{bd}\right) - 6\varepsilon \, [R^{bd}] \right) \partial_n \delta g_{bd} \, \} + \left(\left(p_{(0)} + E_{(0)}\right) u^d u^b - p_{(0)} \, g^{bd} \right) \delta g_{bd} - \\
&- \frac{1}{3}\zeta \, [\partial_n \left(\mu_1 \, \varphi^2\right)] \left(g^{nb} g^{nd} - \varepsilon g^{bd}\right) \delta g_{bd} + \frac{2}{3} \, \vartheta \, \partial_a \mu_1 \, \{ \, - [R](g^{nb} g^{ad} + g^{nd} g^{ab} - g^{an} g^{bd}) - \\
&\qquad - 6g^{na}[R^{bd}] + 4 \left(g^{dn}[R^{ab}] + g^{bn}[R^{ad}] \right) \, \} \, \delta g_{bd} = S^{ab} \, \delta g_{ab} \, , \qquad (2.54)
\end{aligned}
$$

при записи поверхностной части вариации действия использованы описанные выше координаты $\{n, y^i\}$.

Из (2.54) следует, что «внешнее давление» и «внешний поток» для рассматриваемого действия материи не отличаются от (2.30,2.31), так как дополнительное слагаемое, связанное с включением скалярного поля в закон рождения:

$$
-\frac{1}{3}\zeta \, [\partial_n \left(\mu_1 \, \varphi^2\right)] \left(g^{nb} g^{nd} - \varepsilon g^{bd}\right) \delta g_{bd} \, ,
$$

равно нулю, если хотя бы один из индексов b или d равен n.

При введении внешнего скалярного поля появляется дополнительное уравнение движения, полученное вариацией действия материи по φ. Оно также расщепляется на объемную и поверхностную части:

$$
\mu_1 \Box \varphi^{\pm} + \Box \left(\mu_1 \varphi^{\pm}\right) + 4\mu_1 \, \Lambda_0 \varphi^{3\pm} - \frac{1}{3}\mu_1 \, \varphi^{\pm} \, R^{\pm} = 0 \, ,
$$

$$
[2\mu_1 \partial_n \varphi + \varphi \partial_n \mu_1] = 0 \, ,
$$

из второго соотношения получаем, что $[\partial_n \left(\mu_1 \, \varphi^2\right)] = 0$, поэтому поле φ не дает вклада не только в S^{na}, но и в остальные компоненты поверхностного тензора энергии-импульса S^{ij}. Учитывая, что лагранжев множитель μ_1 и его производные считались непрерывными при выводе уравнений из этого соотношения следует, что $[\partial_n \varphi] = 0$, и тогда отсутствует вклад со скалярным полем в поверхностную часть закона рождения. В то же время, можно допустить присутствие скачка в первых производных μ_1, если одновременно положить равной нулю функцию $\eta_{(0)}$. При таком предположении не меняется форма уравнений

(2.54), за исключением того, что множитель $\partial_a \mu_1$ должен быть помещен под знак скачка, и последнее слагаемое равно нулю. Тем не менее, в этом случае в закон рождения на Σ_0 входит часть, связанная с функцией Φ:

$$[\eta u^n] = \zeta[\varphi \, \nabla^n \varphi],$$

то есть процессы рождения происходят не только в $\Omega^\pm$ областях, но и на гиперповерхности непосредственно.

Дополнительно стоит отметить, что в след объемной части тензора энергии-импульса $T^\pm = E^\pm - 3\,p^\pm$ не дают вклада слагаемые, связанные с вариацией $\Phi\,\sqrt{-g}$, если дополнительно использовать объемную часть уравнения движения на φ. Очевидно, этот факт связан с конформной инвариантностью $\Phi\,\sqrt{-g}$.

Рассмотрим также «беременный вакуум» для данной модели. В предыдущем разделе показано, что для этого случая, за исключением пыли, $\eta = E = \Phi = 0$ и $\mu_1 = const$. При этом тензор энергии-импульса не обязательно равен нулю:

$$\frac{1}{\mu_1 \zeta} T^{ab} = -8 \frac{\vartheta}{\zeta} B^{ab} + g^{ab} \left(\Lambda_0 \, \varphi^4 - \partial_c \varphi \, \partial^c \varphi \right) + \\ + 2 \partial^a \varphi \, \partial^b \varphi + \frac{1}{3} \left\{ \varphi^2 \, G^{ab} - \nabla^a \nabla^b \left(\varphi^2 \right) + g^{ab} \Box \left(\varphi^2 \right) \right\}. \quad (2.55)$$

Условие $\Phi = 0$ вместе с уравнением движения на поле φ образуют следующую систему уравнений:

$$2 \Box \varphi + 4 \Lambda_0 \, \varphi^3 - \frac{1}{3} \, \varphi \, R = 0 \,, \quad (2.56)$$

$$\Phi = \vartheta \, C^2 + \zeta \left(\varphi \, \Box \varphi - \frac{1}{6} \, \varphi^2 \, R + \Lambda_0 \, \varphi^4 \right) = 0, \quad (2.57)$$

если выразить $\Box\,\varphi$ из первого уравнения: $\Box\,\varphi = -2 \Lambda_0 \, \varphi^3 + \frac{1}{6}\,\varphi\,R$, и подставить во второе, получим, что φ^4 пропорционально квадрату тензора Вейля:

$$\varphi^4 = \frac{\vartheta}{\zeta \Lambda_0} \, C^2 \,. \quad (2.58)$$

Далее, рассмотрим сферически симметричные геометрии, для которых условие (2.58) имеет вид:

$$\varphi^4 = \frac{\vartheta}{\zeta\Lambda_0}\,\frac{(\widetilde{R}-2)^2}{3r^4}\,, \tag{2.59}$$

отсюда получаем соотношение: $\varphi = \pm\sqrt[4]{\frac{\vartheta}{3\zeta\Lambda_0}}\,\frac{\sqrt{|\widetilde{R}-2|}}{r}$.

В предыдущем разделе было показано, что для общей теории относительности из всего семейства сферически симметричных вакуумов, которые представляют из себя метрику Шварцшильда-де Ситтера (анти-де Ситтера) только чистый де Ситтер (анти-де Ситтер), то есть решение без сингулярности в нуле, соответствует «беременному вакууму» в отсутствии внешних полей. Покажем, что даже после добавления внешнего скалярного поля решение Шварцшильда-де Ситтера (анти-де Ситтера) не может описывать «беременный вакуум». Для этой метрики $\widetilde{R} = 2 - \frac{12M}{r}$, поэтому из условия (2.59) следует, что $\varphi \propto r^{-\frac{3}{2}}$. С другой стороны, для этого решения имеем:

$$\Box\varphi = -\frac{1}{r^2}\,\partial_r\left(r^2 f(r)\,\partial_r\varphi\right) \propto \left(-\frac{1}{2}r^{-\frac{7}{2}} + \frac{3M}{r} - \frac{\Lambda}{2}\,r^{-\frac{3}{2}}\right),$$

что противоречит уравнению движения на φ.

Отметим также, что несмотря на то, что скалярное поле φ не вносит вклад в поверхностный тензор энергии-импульса, его присутствие снимает ограничения на тип сингулярных гиперповерхностей, разделяющих два сферически-симметричных «беременных вакуума». Это связано с тем, что в силу условия (2.59), даже при непрерывном φ, двумерная скалярная кривизна может испытывать скачок на Σ_0, если выполняется соотношение: $\widetilde{R}^{+} + \widetilde{R}^{-} = 4$.

Дополнительно разберем случай, когда плотность энергии зависит и от скалярного поля: $E(n,X,\varphi)$. Для него можно провести аналогию с полем Хиггса в силу схожих слагаемых в действии. При этом меняется уравнение движения на φ:

$$\mu_1\Box\varphi + \Box\left(\mu_1\varphi\right) + 4\mu_1\,\Lambda_0\varphi^3 - \frac{1}{3}\mu_1\,\varphi\,R = -\frac{1}{\zeta}\frac{\partial E}{\partial\varphi}\,.$$

Вычислим след тензора энергии-импульса для данной модели:

$$T = E - 3p + 4\zeta\,\mu_1\,\Lambda_0\,\varphi^4 - \frac{\zeta}{3}\,\mu_1\,\varphi^2\,R + \zeta\,\varphi\,\Box\left(\mu_1\varphi\right) + \zeta\,\mu_1\varphi\,\Box\varphi = E - 3p - \varphi\,\frac{\partial E}{\partial\varphi}\,, \tag{2.60}$$

где во втором равенстве было использовано представленное выше уравнение движения.

Рассмотрим ситуацию, при которой действие гравитации является конформно-инвариантным. Этот случай до определенной степени эквивалентен индуцированной гравитации, при которой нет ничего, кроме действия материи, так как множитель лагранжа μ_1 определен с точностью до константы, поэтому даже при отсутсвии отдельного лагранжиана для гравитации, можно выделить слагаемые пропорциональные C^2 и $\varphi^2 R$. Впервые подобные модели, в которых нет отдельного действия для гравитации, были исследованы А.Д. Сахаровым [80]. Он предположил, что гравитационное поле не является фундаментальным, а есть результат усредненного влияния вакуумных флуктуаций всех остальных квантовых полей, эти идеи легли в основу теории индуцированной гравитации. Для конформно инвариантного действия $T = 0$, поэтому из (2.60) следует:

$$E - 3p = \varphi \, \frac{\partial E}{\partial \varphi} \,. \tag{2.61}$$

Для пыли, то есть при $p = 0$, из этого уравнения следует, что $E \propto n\,\varphi$. Это означает, что масса частиц пыли зависит от скалярного поля.

Для излучения $E = 3p$, поэтому $\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0$, то есть плотность энергии не зависит от скалярного поля или φ соответсвует экстремумам функции E на уравнениях движения.

Глава 3. Светоподобные сингулярные гиперповерхности в квадратичной гравитации

3.1 Построение специальной системы координат

Для светоподобных гиперповерхностей существуют некоторые аналоги гауссовых нормальных координат, такие, как гауссовы светоподобные координаты (GNC) [81—83] или координаты для слоения рассматриваемого многообразия светоподобными гиперповерхностями (NSFC) [84—86].

В данной работе был использован более минималистичный подход, который не требует дополнительной информации относительно поведения нормального векторного поля вне Σ_0. С помощью формализма, описанного в книге Э. Пуассона [59], были построены координаты, которые являются частным случаем координат $\{n,y^i\}$ для светоподобной гиперповерхности. Далее приведено краткое описание этого процесса.

Рассмотрим светоподобную гиперповерхность Σ_0, заданную в областях $\Omega^\pm$ с произвольными координатами $\{x^\pm\}$ уравнениями: $n^\pm(x^\pm) = 0$. Нормальное векторное поле к гиперповерхности определяется соотношением: $N_{\pm a} = \partial_a n^\pm(x^\pm)$. Временно опустим обозначения $\pm$ для удобства и будем записывать все уравнения в одной из областей.

В случае светоподобной гиперповерхности, норма $N^a N_a$ равна нулю на Σ_0, поэтому вектор нормали определен с точностью до умножения на произвольную скалярную функцию. Так как вектор N^a - светоподобный на Σ_0, он одновременно является касательным к рассматриваемой поверхности.

Покажем, что векторное поле N^a на гиперповерхности является касательным к семейству светоподобных геодезических, которые лежат на Σ_0:

$$\nabla_b N_a\, N^b = \nabla_{ab} n\, \partial^b n = \nabla_{ba} n\, \partial^b n = \frac{1}{2} \nabla_a \left(N_b\, N^b\right).$$

Скаляр $N^a N_a$ равен нулю на всей Σ_0, поэтому его градиент направлен вдоль N_a, тогда

$$\nabla_b N_a\, N^b = \kappa N_a,$$

где κ - некоторый скаляр. Таким образом, N^a на гиперповерхности является касательным к светоподобным геодезическим, которые лежат на Σ_0 и являются ее генераторами.

Выберем произвольный (не обязательно афинный) параметр λ на вышеуказаных светоподобных генераторах гипеповерхности и две дополнительные координаты - $\theta^A, A = 2{,}3$ для маркировки геодезических, вместе они образуют систему внутренних координат $y^i = \{\lambda,\theta^A\}$ гиперповерхности. Параметр λ является афинным, если уравнение $n(x) = const$ задает целое семейство светоподобных гиперповерхностей, в этом случае функция $\partial_b n\, \partial^b n$ равна нулю не только на гиперповерхности, но ,как минимум, в некоторой ее окрестности.

Вычислим индуцированную метрику на рассматриваемой гиперповерхности:

$$ds^2_{\Sigma_0} = g_{ab} dx^a(y^i) dx^b(y^j) = g_{ab} e^a_i e^b_j dy^i dy^j, \quad e^a_i = \frac{\partial x^a}{\partial y^i}.$$

Векторные поля e^a_i являются касательными к кривым, лежащим на гиперповерхности, поэтому на Σ_0 они ортогональны нормали:

$$N_a e^a_A = 0, \quad N_a e^a_1 = N_a \frac{\partial x^a}{\partial \lambda} = N_a N^a = 0.$$

Из этих же соотношений следует, что индуцированная метрика на светоподобной гиперповерхности Σ_0 является эффективно двумерной:

$$ds^2_{\Sigma_0} = g_{ab} e^a_A e^b_B d\theta^A d\theta^B = \sigma_{AB} d\theta^A d\theta^B.$$

Систему векторных полей $\{N^a, e^a_A\}$ можно дополнить до базиса в ограничении векторного расслоения многообразия Ω на гиперповерхность - $T\Omega|_{\Sigma_0}$, если найти вспомогательное светоподобное векторное поле l^a со следующими свойствами:

$$l^a N_a = 1, \quad l_a e^a_A = 0, \quad l^a l_a = 0. \tag{3.1}$$

Существование такого вектора, а также полнота системы векторных полей $\{l^a, N^a, e^a_A\}$ в $T\Omega|_{\Sigma_0}$ продемонстрированы в вышеупомянутой работе [59], а также в публикации [58], где вводится обобщение векторов подобного типа (rigging vector) для сингулярных гиперповерхностей смешанного каузального характера.

Так как векторые поля $\{l^a,N^a,e^a_A\}$ образуют базис в $T\Omega|_{\Sigma_0}$, возможно записать соотношение полноты для обратной метрики:

$$g^{ab}=l^aN^b+l^bN^a+\sigma^{AB}e^a_Ae^b_B. \tag{3.2}$$

Выберем в качестве локальных координат в окрестности гиперповерхности $\{n,\lambda,\theta^A\}$. В этих координатах на Σ_0 выполняются соотношения:

$$N_a=\delta^n_a,\quad N^a=\frac{\partial x^a(y^i)}{\partial\lambda}=\delta^a_\lambda,\quad l_\lambda=l^n=1,\quad l_n=-l^\lambda,\quad l_A=0. \tag{3.3}$$

С учетом (3.2), в этих координатах обратная метрика имеет следующую структуру на гиперповерхности:

$$g^{n\lambda}=1,\quad g^{nn}=g^{nA}=0,\quad g^{\lambda\lambda}=2\,l^\lambda,\quad g^{\lambda A}=l^A,\quad g^{AB}=\sigma^{AB}. \tag{3.4}$$

Тогда для тензора g_{ab}, обратного к g^{ab}, получим:

$$g_{n\lambda}=1,\quad g_{\lambda\lambda}=g_{\lambda A}=0,\quad g_{nn}=-2\,l^\lambda+\sigma_{AB}l^Bl^A,\quad g_{nA}=-\sigma_{AB}l^B,\quad g_{AB}=\sigma_{AB}. \tag{3.5}$$

Необходимо отметить, что соотношения (3.4,3.5) выполняются только на Σ_0, т.е. при $n=0$. Это означает, в частности, что вторые производные по n от $g_{n\lambda},g_{\lambda\lambda},g_{\lambda A}$ и их скачки на Σ_0 в общем случае ненулевые. Скачки первых производных по n приняты равными нулю в силу условий Лихнеровича. Подобный вид метрики распространяется и на окрестность Σ_0, только если векторное поле $\partial_a n(x)$ является светоподобным в некоторой окрестности Σ_0, а не только при $n=0$, но даже в этом случае: $\partial^2_{nn}\,g_{\lambda n}\neq 0$.

Общая для $\Omega^\pm$ система координат с необходимыми свойствами строится следующим образом: n^+ и n^- можно непрерывно объединить в координату n и выбрать y^{+i} или y^{-i} в качестве оставшихся координат. Непрерывность компонент метрики на Σ_0 обеспечивается соотношениями (3.4) и соответствующим подбором функций $y^{+i}(y^{-j})$.

3.2 Полевые уравнения

Далее, перейдем к анализу уравнений (1.47-1.49,1.51) в координатах $\{n,\lambda,\theta^A\}$. Вычислим скачки, присутствующие в данных уравнениях:

$$[R] = 2\,[R^{n\ \ n}_{\ nn}] = [\partial^2_{nn} g_{\lambda\lambda}], \quad [\partial_i R] = [\partial_i \partial^2_{nn} g_{\lambda\lambda}], \tag{3.6}$$

$$[R^{ab}] = \frac{1}{2}\left(\delta^a_\lambda\, g^{bc}\,[\partial^2_{nn} g_{c\lambda}] + \delta^b_\lambda\, g^{ac}\,[\partial^2_{nn} g_{c\lambda}] - \delta^a_\lambda\,\delta^b_\lambda\, g^{cd}\,[\partial^2_{nn} g_{cd}]\right), \tag{3.7}$$

$$[\nabla_\lambda R^{bd}] = \partial_\lambda [R^{bd}] + \delta^b_\lambda \left(\Gamma^\lambda_{\lambda\lambda}[R^{\lambda d}] + \Gamma^d_{\lambda A}[R^{\lambda A}] + \frac{1}{2}\,\Gamma^d_{\lambda n}\,[R]\right) + \\ + \delta^d_\lambda \left(\Gamma^\lambda_{\lambda\lambda}[R^{\lambda b}] + \Gamma^b_{\lambda A}[R^{\lambda A}] + \frac{1}{2}\,\Gamma^b_{\lambda n}\,[R]\right), \tag{3.8}$$

$$[\nabla_i R^{nd}] = \frac{1}{2}\,\delta^d_\lambda \left(\partial_i [R] + \Gamma^n_{in}\,[R] + 2\,\Gamma^n_{iA}\,[R^{\lambda A}]\right) + \frac{1}{2}\,\Gamma^d_{i\lambda}\,[R]. \tag{3.9}$$

С учетом всего вышеперечисленного, получим уравнения для светоподобного двойного слоя в координатах $\{n,\lambda,\theta^A\}$:

$$S^{nn} = 0, \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{2}\,\beta_2 \left\{g^{\lambda\lambda}[\partial_\lambda R] + [\partial_\lambda\left(g^{\lambda\lambda} R\right)] + g^{\lambda\lambda}\Gamma^a_{a\lambda}[R] + 2 g^{c\lambda}\,\Gamma^\lambda_{\lambda c}[R]\right\} - \\ - (\beta_1 + \beta_2)\left\{\frac{1}{2}[\partial^\lambda R] + \frac{1}{2} g^{\lambda k}[\partial_k R] + \frac{1}{4} g^{\lambda A} g^{\lambda B}\,\partial_\lambda \sigma_{AB}\,[R] - \frac{1}{2}\Gamma^A_{An}[R] + \frac{1}{2}\Gamma^\lambda_{\lambda n}[R]\right\} + \\ + \beta_1 \left\{2[\nabla_\lambda R^{\lambda\lambda}] + \Gamma^a_{a\lambda}[R^{\lambda\lambda}]\right\} + \frac{1}{2}[R]\,(\beta_1 + \beta_2)\, B^{\lambda\lambda}_{\lambda\lambda}(y) = 8\pi\, S^{\lambda\lambda}, \tag{3.11}$$

$$(\beta_1 + \beta_2)\,\left([\partial_\lambda R] + \Gamma^k_{k\lambda}\,[R]\right) = 16\pi\, S^{n\lambda}, \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{2}\beta_2 \left\{2 g^{\lambda A}[\partial_\lambda R] + \partial_\lambda g^{\lambda A}[R] + g^{\lambda A}\Gamma^a_{a\lambda}[R] + g^{kA}\Gamma^\lambda_{\lambda k}[R]\right\} - \\ - \frac{1}{2}\beta_1\, g^{a\lambda}\Gamma^A_{a\lambda}[R] + \beta_1 \left\{2[\nabla_\lambda R^{\lambda A}] + \Gamma^a_{a\lambda}[R^{\lambda A}]\right\} - \\ - \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)\left\{[\partial^A R] - B^{\lambda A}_{\lambda\lambda}(y)[R]\right\} = 8\pi S^{\lambda A}, \tag{3.13}$$

$$\frac{1}{2}\beta_2\left\{2\sigma^{AB}\left[\partial_\lambda R\right]+\partial_\lambda\sigma^{AB}\left[R\right]+\sigma^{AB}\,\Gamma^a_{a\lambda}[R]\right\}+\frac{1}{4}(\beta_2-\beta_1)\,\sigma^{AC}\sigma^{BD}\,\partial_\lambda\sigma_{CD}[R]+$$
$$+\frac{1}{2}(\beta_2+\beta_1)B^{AB}_{\lambda\lambda}(y)[R]=8\pi S^{AB}\,. \quad (3.14)$$

Разберем важный частный случай, когда векторное поле $\partial_a n(x)$ является светоподобным в некоторой окрестности Σ_0. Тогда из (3.6-3.9) следует, что:

$$[R]=[R^{\lambda A}]=[\partial_i R]=[\nabla_i R^{nd}]=0, \quad (3.15)$$

$$[\nabla_\lambda R^{bd}]=\delta^b_\lambda\,\delta^d_\lambda\,[\partial_\lambda R^{\lambda\lambda}]. \quad (3.16)$$

Таким образом, он соответствует сценарию тонкой светоподобной оболочки, уравнение для которой в координатах $\{n,\lambda,\theta^A\}$ имеет вид:

$$\beta_1\left\{2\left[\partial_\lambda R^{\lambda\lambda}\right]+\Gamma^a_{a\lambda}\left[R^{\lambda\lambda}\right]\right\}-\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\left[\partial_n R\right]=8\pi\,S^{\lambda\lambda}. \quad (3.17)$$

3.3 Модификация условий Лихнеровича

Для частного случая, когда Σ_0 является слоем некоторого светоподобного слоения, можно также поставить вопрос о необходимости условий Лихнеровича.

Покажем, что если светоподобная сингулярная гиперповерхность в квадратичной гравитации с лагранжианом (1.3) без слагаемого Гаусса-Бонне является, как минимум, локально, слоем некоторого светоподобного слоения Ω, то вместо условий Лихнеровича, достаточно, чтобы на Σ_0 выполнялись соотношения:

$$\left(N_a N_b\,R^{\pm ab}\gamma^{ij}-2N_a N_b\,R^{\pm aibj}\right)\left[l^c\,\partial_c\gamma_{ij}\right]=0, \quad (3.18)$$

где l^c - вспомогательный светоподобный вектор, удовлетворяющий (3.1), γ_{ij} - индуцированная метрика в произвольных внутренних координатах $\{y^i\}$, N_a - внешняя нормаль. Покажем, что если выполняются эти условия, множитель в действии при δ^2 всегда равен нулю. Строго говоря, нельзя утверждать, что δ^2 не возникает в действии, если множитель при нем равен нулю, так как эта функция не определена. Тем не менее, несложно показать, что равенство нулю формального «множителя» при δ^2 эквивалентно тому, что соответствующая комбинация производных по n в лагранжине, а именно, произведение вторых производных по n от метрики в случае, когда $n = 0$ светоподобная гиперповерхность, равна нулю. Если подобная комбинация отсутсвует в лагранжиане, то квадрата дельта-функции не появляется с самого начала.

Метрика в окрестности Σ_0 в координатах $\{n, \lambda, \theta^A\}$:

$$ds^2 = g_{nn}\, dn^2 + 2g_{n\lambda}\, dn\, d\lambda + 2g_{nA}\, dn\, d\theta^A + \sigma_{AB}\, d\theta^A\, d\theta^B, \tag{3.19}$$

вычислим «множитель» при δ^2 при условии, что тензор Римана имеет структуру (1.22) в описанных выше координатах с метрикой (3.19).

Строго говоря, неправильно использовать фиксированную систему координат до варьирования, тем не менее, так как рассматриваемая величина является скаляром, можно ограничиться конкретными координатами для того, чтобы показать, что она равна нулю. Этот «множитель» состоит из трех слагаемых, соответственно, слагаемое при α_1:

$$(\delta^n_c[\Gamma^a_{bd}] - \delta^n_d[\Gamma^a_{bc}])\left(\delta^n_{c'}[\Gamma^{a'}_{b'd'}] - \delta^n_{d'}[\Gamma^{a'}_{b'c'}]\right) g_{aa'}\, g^{bb'} g^{cc'} g^{dd'} = -2[\Gamma^a_{b\lambda}]\,[\Gamma^{a'}_{b'\lambda}]\, g_{aa'}\, g^{bb'},$$

оно равно нулю, так как $[\Gamma^a_{b\lambda}] = \frac{1}{2} g^{ac}[\partial_\lambda g_{bc}] = 0$. Слагаемое при α_2:

$$\begin{aligned}([\Gamma^n_{bd}] - \delta^n_d[\Gamma^a_{ba}])\left([\Gamma^n_{b'd'}] - \delta^n_{d'}[\Gamma^{a'}_{b'a'}]\right) g^{bb'} g^{dd'} &= \\ = \left([\Gamma^n_{bd}]\,[\Gamma^n_{b'd'}] - \delta^n_{d'}[\Gamma^{a'}_{b'a'}]\,[\Gamma^n_{bd}] - \delta^n_d[\Gamma^a_{ba}]\,[\Gamma^n_{b'd'}]\right) g^{bb'} g^{dd'},\end{aligned}$$

зануляется в силу того, что $[\Gamma^n_{bd}] = [\partial_n g_{n\lambda}]\delta^n_b \delta^n_d$ и $g^{nn} = 0$. Слагаемое при α_3:

$$([\Gamma^n_{bd}] - \delta^n_d[\Gamma^a_{ba}])\left([\Gamma^n_{b'd'}] - \delta^n_{d'}[\Gamma^{a'}_{b'a'}]\right) g^{bd} g^{b'd'} = [\Gamma^a_{\lambda a}]\,[\Gamma^{a'}_{\lambda a'}] = 0$$

Что касается «множителей» при $\delta(n(x))\,\theta(n(x))$ и $\delta(n(x))\,\theta(-n(x))$, то в них зануляется только слагаемое при α_3. Здесь также подразумевается, что формальные «множители» при неопределенных функциях используются исключительно в качестве критериев равенства нулю соответствующих комбинаций производных:

$$2R^{\pm}\left(g^{bd}\,[\Gamma^n_{bd}] - g^{n\lambda}\,[\Gamma^a_{\lambda a}]\right) = 0,$$

где верхний знак соответствует множителю при $\delta(n(x))\,\theta(n(x))$, нижний соответствует «множителю» при $\delta(n(x))\,\theta(-n(x))$. Слагаемые при α_1 и α_2:

$$2R_a^{\pm bcd}\,(\delta_c^n[\Gamma^a_{bd}] - \delta_d^n[\Gamma^a_{bc}]) = 4R_a^{\pm bnc}\,[\Gamma^a_{bc}] = 2R^{\pm dbnc}\,(\delta_c^n[\partial_n g_{bd}] - \delta_d^n[\partial_n g_{cd}]) - \\ - 2R^{\pm nbnc}\,[\partial_n g_{bc}] = -4R^{\pm nbnc}\,[\partial_n g_{bc}] = -4R^{\pm nAnB}\,[\partial_n \sigma_{AB}]\,, \quad (3.20)$$

$$2R^{\pm bd}\,([\Gamma^n_{bd}] - \delta_d^n[\Gamma^a_{ab}]) = R^{\pm nn}\,\left(2[\Gamma^n_{nn}] - g^{ab}[\partial_b g_{ab}]\right) = -R^{\pm nn}\,\sigma^{AB}\,[\partial_n \sigma_{AB}]\,,$$

в общем случае не равны нулю.

С помощью этих соотношений можно выразить коэффициент при $\left(2\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right)\,\delta(n(x))\,\theta(\pm n(x))$ в разложении (1.3):

$$2\left(R^{\pm nn}\,\sigma^{AB} - 2R^{\pm nAnB}\right)\,[\partial_n \sigma_{AB}]\,, \quad (3.21)$$

если он равен нулю, то неопределенные функции в лагранжиане могут оставаться только из-за слагаемого Гаусса-Бонне, так как вклад в множители при $\delta^2(n(x))$ и $\delta(n(x))\,\theta(\pm n(x))$ от R^2, как показано выше, равен нулю. Таким образом, если рассматривать задачи, в которых сингулярное распределение материи и(или) энергии, отраженное в структуре тензора энергии-импульса (1.18), является предельным случаем несингулярного распределения, то слагаемое Гаусса-Бонне можно исключить из действия, так как в четырех измерениях оно является чисто топологическим. Для такого типа задач, равенства нулю (3.21) достаточно для того, чтобы не накладывать условия Лихнеровича для светоподобной сингулярной гиперповерхности, которая является слоем светоподобного слоения рассматриваемого многообразия.

В частности, для сферически-симметричной светоподобной гиперповерхности (3.21) автоматически равен нулю, в силу того, что $[\partial_n \sigma_{AB}] = \sigma_{AB}\,\frac{2}{r}[\partial_n r]$, и для метрики типа (3.19) верно: $R^{nn} = \sigma_{AB}\,R^{nAnB}$. Далее этот же результат будет доказан другим способом, с помощью инвариантов сферически-симметричной геометрии.

3.4 Сферически-симметричные светоподобные сингулярные гиперповерхности

3.4.1 Тонкая оболочка

Для любой сферически-симметричной светоподобной гиперповерхности в геометрии (1.66), заданной уравнением $n(x) = 0$, верно следующее:

$$\gamma_{00}\left(\partial^0 n(x)\right)^2 + 2\gamma_{01}\,\partial^0 n(x)\,\partial^0 n(x) + \gamma_{11}\left(\partial^1 n(x)\right)^2 = 0$$

Данное соотношение выполняется непосредственно на гиперповерхности, но если это уравнение возможно разрешить относительно переменной $\frac{\partial^0 n(x)}{\partial^1 n(x)}$ или обратной величины при любых значениях x, то функция $n(x)$ задает целое семейство светоподобных гиперповерхностей $n(x) = const$, т.е., векторное поле $\partial^\alpha n(x)$ является светоподобным во всем рассматриваемом пространстве-времени. Так как это квадратное уравнение относительно указанной переменной, для того чтобы оно всегда имело хотя бы одно решение необходима неотрицательность $-\gamma$, но данное условие всегда выполняется для лоренцевой сферически-симметричной метрики. Таким образом, показано, что, если выполняются условия Лихнеровича, светоподобная сферически-симметричная сингулярная гиперповерхность в квадратичной гравитации может быть только тонкой оболочкой.

Соответственно, вид метрики в окрестности рассматриваемой тонкой оболочки Σ_0 в координатах $\{n,\lambda,\theta,\phi\}$:

$$ds^2 = \gamma_{nn}\,dn^2 + 2\gamma_{n\lambda}\,dn\,d\lambda - r^2(n,\lambda)\,d\Omega^2 \tag{3.22}$$

Выразим скачок $[\partial_\lambda R^{\lambda\lambda}]$ в уравнении (3.17), описывающем динамику тонкой оболочки, через производные от представленных выше инвариантов сферической геометрии:

$$\Gamma^a_{a\lambda}\,[R^{\lambda\lambda}] = -\frac{2}{r^2}[\partial_n\Delta], \quad [\partial_\lambda R^{\lambda\lambda}] = \partial_\lambda\left(-\frac{2}{r}[\partial^2_{nn} r]\right) = \frac{1}{r^2}[\partial_n\Delta] - \frac{1}{r}[\partial_n\sigma]. \tag{3.23}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (1.67,1.69) для метрики (3.22):

$$\sigma = \frac{1}{\gamma_{n\lambda}}\,\partial_\lambda\left(2\,\partial_n r - \frac{\gamma_{nn}}{\gamma_{n\lambda}}\,\partial_\lambda r\right), \quad \Delta = -\frac{\gamma_{nn}}{\gamma_{n\lambda}}\,(\partial_\lambda r)^2 + \frac{2}{\gamma_{n\lambda}}\,\partial_n r\,\partial_\lambda r\,,$$

$$R_{nn} = \frac{\gamma_{nn}}{r^2}\left(\frac{1}{2}\,\widetilde{R} + \Delta - r\,\sigma\right) - \frac{2}{r}\,\partial^2_{nn} r + \frac{\partial_n r}{\gamma_{n\lambda}\,r}\,(2\,\partial_n\gamma_{n\lambda} - \partial_\lambda\gamma_{nn}) + \\ + \frac{\partial_\lambda r}{\gamma_{n\lambda}\,r}\left(\partial_n\gamma_{nn} - 2\,\frac{\gamma_{nn}}{\gamma_{n\lambda}}\,\partial_n\gamma_{n\lambda} + \frac{\gamma_{nn}}{\gamma_{n\lambda}}\,\partial_\lambda\gamma_{nn}\right),$$

а также тем фактом, что $\gamma_{n\lambda}|_{\Sigma_0} = 1$. Если, далее, использовать соотношение (1.68) для скалярной кривизны, получим уравнение динамики тонкой светоподобной оболочки в сферически-симметричном случае:

$$-\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)[\partial_n\widetilde{R}] + r\,(\beta_1 + 3\beta_2)[\partial_n\sigma] = 8\pi\,r^2\,S^\lambda_n\,. \tag{3.24}$$

Домножив обе части на $\partial_\lambda r$, получим инвариантную форму уравнения движения:

$$-\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)\,[g^{ab}\partial_a r\,\partial_b\widetilde{R}] + r\,(\beta_1 + 3\,\beta_2)[g^{ab}\partial_b r\,\partial_a\sigma] = 8\pi\,r^2\,S^a_n\,\partial_a r\,. \tag{3.25}$$

Условия Лихнеровича также можно представить в инвариантной форме:

$$[\Delta] = 0, \quad [\widetilde{R}] = 0, \tag{3.26}$$

где мы воспользовались определением $\widetilde{R}$ для светоподобного случая, т.е. метрики (3.22):

$$\widetilde{R} = \frac{1}{\widetilde{\gamma}_{n\lambda}}\,\partial_\lambda\left(\frac{\partial_\lambda\widetilde{\gamma}_{nn} - 2\,\partial_n\widetilde{\gamma}_{n\lambda}}{\widetilde{\gamma}_{n\lambda}}\right).$$

Соотношения (3.26) обеспечивают отсутствие скачков $[\partial_n\gamma_{n\lambda}]$, $[\partial_n r]$, тогда как для метрики вида (3.22) необходимо также требовать: $[\partial_n\gamma_{nn}] = 0$. Тем не менее, в случае сферической симметрии от этой компоненты метрики всегда можно избавиться с помощью замены координат.

Для светоподобных сингулярных гиперповерхностей общий вид уравнения гиперповерхности известен и определяется в областях $\Omega^\pm$ из условия нулевого интервала. В то же время, условия Лихнеровича (3.26) вместе с (3.24) накладывают определенные ограничения на сшиваемые метрики и поверхностный тензор энергии-импульса. Далее поясним этот факт на некоторых примерах.

Любую сферически-симметричную метрику с помощью преобразований координат возможно привести к виду:

$$ds^2 = 2H(u,v)dudv - r^2(u,v)d\Omega^2.$$

Так как он сохраняется при заменах координат типа: $u \to \widetilde{u}(u), v \to \widetilde{v}(v)$ или при замене u на v, без ограничения общности можно считать, что гиперповерхность в областях $\Omega^{\pm}$ задана уравнениями $u^{\pm} = 0$. Таким образом, $n^{\pm} = u^{\pm}$, а координаты $\lambda^{\pm}$ зависят только от $v^{\pm}$ и определяются соотношениями: $d\lambda = H(0,v)dv$. Связь координат $\lambda^{\pm}$ для областей $\Omega^{\pm}$ определяется из условия непрерывности метрики на гиперповерхности, так как $g^{\pm}_{n\lambda}|\Sigma_0 = \frac{H^{\pm}(n,\lambda^{\pm})}{H^{\pm}(0,\lambda^{\pm})}|\Sigma_0 = 1$, остается только одно уравнение: $r^+(0,\lambda^+) = r^-(0,\lambda^-)$, которое также определяет связь между исходными координатами $v^+(v^-)$. Условия Лихнеровича накладывают ограничения функции $r^{\pm}$, $H^{\pm}$ при $u^{\pm} = 0$: $\partial_{u^+} r^+(0,v^+(v^-)) = \partial_{u^-} r^-(0,v^-), \quad \partial_{u^+} H^+(0,v^+(v^-)) = \partial_{u^-} H^-(0,v^-)$.

Инвариантная форма уравнений (3.26) в некоторых случаях позволяет определить, возможна ли сшивка с помощью светоподобной гиперповерхности для рассматриваемых $\Omega^{\pm}$, не прибегая к специальным координатам $\{n,\lambda\}$. Например, для класса метрик: $f(r)\,dt^2 - f^{-1}(r)\,dr^2 - r^2 d\Omega^2$, где $\Delta = -f(r)$, из непрерывности Δ и r на гиперповерхности следует, что $r = r_0 = const$ на Σ_0. С другой стороны, если Σ_0 светоподобная гиперповерхность, то $f^{\pm}(r_0) = 0$, но тогда $[\Delta] = 0$ означает, что функции $f^+(r)$ и $f^-(r)$ имеют ноль в точке r_0. В частности, отсюда следует, что в отличии от общей теории относительности [59], в квадратичной гравитации не существует светоподобной тонкой оболочки, разделяющей пространство-время Шварцшильда и вакуум Минковского.

Тем не менее, далее будет показано, что для определенных моделей сферически симметричных светоподобных сингулярных гиперповерхностей в квадратичной гравитации условия Лихнеровича не являются необходимыми. В такой ситуации сшивка геометрии Шварцшильда и вакуума Минковского возможна, но реализуется с помощью светоподобного двойного слоя.

3.4.2 Двойной слой

В рамках сферически-симметрих метрик и гиперповерхностей изучим существование моделей в квадратичной гравитации, для которых условия Лихнеровича могут быть ослаблены.

Как было показано ранее, квадратичные слагаемые в лагранжиане можно выразить в виде комбинации квадрата кривизны, тензора Вейля и слагаемого Гаусса-Бонне. Воспользовавшись формулами, представленными, в частности, в работах [49; 87], для сферически симметричной метрики (1.65) получим следующее:

$$\sqrt{|g|}\, C^2 = \frac{1}{3}\,\sin\theta\sqrt{|\widetilde{\gamma}|}\,\left(\widetilde{R}-2\right)^2 , \quad \sqrt{|g|}\, R^2 = \sin\theta\sqrt{|\widetilde{\gamma}|}\,\left(\widetilde{R}-2-\frac{6}{r}\,\widetilde{\sigma}\right)^2 , \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{|g|}\, GB = \sin\theta\,\sqrt{|\widetilde{\gamma}|}\ \{\ &\frac{4}{r^2}\,\widetilde{R}\,\left(3\widetilde{\Delta}-r^2-2r\,\widetilde{\sigma}\right)+\frac{8}{r^3}\,\widetilde{\sigma}\,\left(r\,\widetilde{\sigma}-\widetilde{\Delta}\right)-\frac{24}{r^4}\,\widetilde{\Delta}^2+\\ &+\frac{32}{r^3}\,\partial_\alpha r\,\partial_\beta r\,\widetilde{\nabla}^\alpha\widetilde{\nabla}^\beta r-\frac{8}{r^2}\,\widetilde{\nabla}_\alpha\widetilde{\nabla}_\beta r\,\widetilde{\nabla}^\alpha\widetilde{\nabla}^\beta r\ \}\ .\end{aligned} \tag{3.28}$$

Ранее было отмечено, что поправка Гаусса-Бонне не дает вклада в уравнения движения как в объеме, так и на границе, поэтому ее можно исключить из исходного лагранжиана квадратичной гравитации. Строго говоря, этот момент требует более детального изучения. Дело в том, что при выводе (1.44-1.46) были использованы условия Лихнеровича, а здесь идет речь о тех моделях, для которых они могут быть ослаблены или сняты полностью. В связи с этим обстоятельством в данном разделе ограничимся изучением моделей, для которых сингулярная гиперповерхность возникает как предел некоторого несингулярного распределения материи в пространтсве-времени Ω без особенностей на границе $\partial\Omega$. В этом случае слагаемое Гаусса-Бонне может быть исключено из исходного действия.

Подставив выражения (3.27) в исходное действие для квадратичной гравитации за вычетом поправки Гаусса-Бонне и проинтегрировав по углам, получим двумерное эффективное действие:

$$S_{2q} = -\frac{1}{4}\int_\Omega \sqrt{|\widetilde{\gamma}|}\,\{\,\frac{1}{2}\,(2\alpha_3 + 2\alpha_1 + \alpha_2)\left(\widetilde{R} - 2\right)^2 + \left(\widetilde{R} - 2\right)\left(\alpha_4\, r^2 - 12\,\beta\,\frac{\widetilde{\sigma}}{r}\right) +$$
$$+\, 36\,\beta\,\frac{\widetilde{\sigma}^2}{r^2} - 6\,\alpha_4\, r\,\widetilde{\sigma} + \alpha_5\, r^4\Lambda\,\}\, d^2x = -\frac{1}{4}\int_\Omega \sqrt{|\widetilde{\gamma}|} L_{2q}\, d^2x,$$
$$\beta = \alpha_3 + \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2\,. \quad (3.29)$$

Если положить $\alpha_3 = -\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2$, то полученное действие будет линейным по $\widetilde{R}$. С одной стороны, в этом случае можно допустить существование скачка в производных $\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}$ и дельта-функцию в кривизне, но тогда возникает необходимость определить произведение дельта-функции на тета-функцию, которое запрещено в стандартной теории обобщенных функций. С другой стороны, из определения инвариантов $\widetilde{R}$ и $\widetilde{\sigma}$ следует, что они содержат только первые производные по n для светоподобных гиперповерхностей, так как для любой светоподобной гиперповерхности $\gamma^{nn}|_{\Sigma_0} = N_a N_b g^{ab} = 0$. Таким образом, для сферически симметричных светоподобных гиперповерхностей наличие скачков в производных метрики не приводит к появлению дельта функции в $\widetilde{R}$ и $\widetilde{\sigma}$, а значит и в лагранжиане L_{2q}.

Приведенное выше рассуждение не работает для времениподобных (пространственноподобных) гиперповерхностей, потому что для них использованые инварианты сферической геометрии обязаны включать в себя вторые производные по n:

$$[\widetilde{\sigma}] = \varepsilon\, r^2[\partial^2_{nn} r], \quad [\widetilde{R}] = 2\varepsilon\, r^2[\partial_n K] + 6\varepsilon r[\partial^2_{nn} r]\,,$$

где $K = -\nabla_a N^a$ - след тензора внешней кривизны гиперповерхности.

Рассмотрим светоподобную гиперповерхность, потребовав только непрерывность метрики на Σ_0. В этом случае из описанных выше соображений следует, что:

$$\widetilde{R} = \widetilde{R}^+\,\theta(n(x)) + \widetilde{R}^-\,\theta(-n(x)), \quad \widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}^+\,\theta(n(x)) + \widetilde{\sigma}^-\,\theta(-n(x)).$$

Подставляя эти выражения в действие получим:

$$S_{2q} = -\frac{1}{4}\int_{\Omega_2^+} \sqrt{|\widetilde{\gamma}|} L^+_{2q}\, d^2x - \frac{1}{4}\int_{\Omega_2^-} \sqrt{|\widetilde{\gamma}|} L^-_{2q}\, d^2x\,,$$

Далее, проварьируем полученное действие по двумерной «метрике» $\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}$ и радиусу r, который в данном случае выступает в качестве дилатона. Согласно свойствам вариационной производной:

$$\delta S_{2q} = -\frac{1}{4}\int_{\Omega_2^+} \sqrt{|\widetilde{\gamma}|}\left\{\delta_{\widetilde{\gamma}} L_{2q}^{+} - \frac{1}{2}\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}\, L_{2q}^{+}\,\delta\widetilde{\gamma}^{\alpha\beta} + \delta_r L_{2q}^{+}\right\} d^2x - \\ - \frac{1}{4}\int_{\Omega_2^-} \sqrt{|\widetilde{\gamma}|}\left\{\delta_{\widetilde{\gamma}} L_{2q}^{-} - \frac{1}{2}\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}\, L_{2q}^{-}\,\delta\widetilde{\gamma}^{\alpha\beta} + \delta_r L_{2q}^{-}\right\} d^2x\,. \quad (3.30)$$

Здесь $\delta_{\widetilde{\gamma}}$ и δ_r - вариации по метрике $\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}$ и радиусу, соответственно. Граничные условия заданы аналогично общему случаю квадратичной гравитации:

$$\delta\widetilde{\gamma}^{\pm\alpha\beta}|_{\partial\Omega^\pm/\Sigma_0} = \partial_\nu\,\delta\widetilde{\gamma}^{\pm\alpha\beta}|_{\partial\Omega^\pm/\Sigma_0} = \delta r^\pm = \partial_\nu\,\delta r^\pm|_{\partial\Omega^\pm/\Sigma_0} = 0, \\ \delta\widetilde{\gamma}^{+\alpha\beta}|_{\Sigma_0} = \delta\widetilde{\gamma}^{-\alpha\beta}|_{\Sigma_0}, \quad \delta r^+|_{\Sigma_0} = \delta r^-|_{\Sigma_0}, \quad ,\beta,\nu = 0{,}1,$$

за исключением непрерывности производных от вариаций на Σ_0, так как в данном случае не требуется выполнение условий Лихнеровича.

По определению, вариации по соответствующим функциям:

$$\delta_{\widetilde{\gamma}} L_{2q}^{\pm} = \frac{\partial L_{2q}^{\pm}}{\partial \widetilde{R}^{\pm}}\,\delta_{\widetilde{\gamma}}\widetilde{R}^{\pm} + \frac{\partial L_{2q}^{\pm}}{\partial \widetilde{\sigma}^{\pm}}\,\delta_{\widetilde{\gamma}}\widetilde{\sigma}^{\pm} = X^{\pm}\,\delta_{\widetilde{\gamma}}\widetilde{R}^{\pm} + 6\,Y^{\pm}\,\delta_{\widetilde{\gamma}}\widetilde{\sigma}^{\pm}, \\ \delta_r L_{2q}^{\pm} = \frac{\partial L_{2q}^{\pm}}{\partial r}\,\delta r + \frac{\partial L_{2q}^{\pm}}{\partial \widetilde{\sigma}^{\pm}}\,\delta_r\widetilde{\sigma}^{\pm} = 6\,Z^{\pm}\,\delta r + 6\,Y^{\pm}\,\delta_r\widetilde{\sigma}^{\pm}, \quad (3.31)$$

где введены следующие обозначения:

$$X^{\pm} = \frac{\partial L_{2q}^{\pm}}{\partial \widetilde{R}^{\pm}} = \alpha_4\, r^2 - \frac{12\beta}{r}\,\widetilde{\sigma}^{\pm} + (2\alpha_3 + 2\alpha_1 + \alpha_2)\left(\widetilde{R}^{\pm} - 2\right), \\ Y^{\pm} = \frac{1}{6}\frac{\partial L_{2q}^{\pm}}{\partial \widetilde{\sigma}^{\pm}} = -\frac{2\beta}{r}\left(\widetilde{R}^{\pm} - 2\right) + \frac{12\beta}{r^2}\widetilde{\sigma}^{\pm} - \alpha_4\, r \;= -2\beta\, r\, R^{\pm} - \alpha_4\, r\,, \\ Z^{\pm} = \frac{1}{6}\frac{\partial L_{2q}^{\pm}}{\partial r} = (\widetilde{R}^{\pm} - 2)\left(\frac{1}{3}\alpha_4\, r + 2\beta\frac{\widetilde{\sigma}^{\pm}}{r^2}\right) - 12\beta\,\frac{(\widetilde{\sigma}^{\pm})^2}{r^3} - \alpha_4\,\widetilde{\sigma}^{\pm} + \frac{2}{3}\alpha_5\, r^3\Lambda\,. \quad (3.32)$$

Воспользовавшись соотношениями для вариации двумерной скалярной кривизны и инварианта $\widetilde{\sigma}$:

$$\delta_{\widetilde{\gamma}}\widetilde{\sigma} = \frac{1}{2}\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}\,\widetilde{\Box}r\,\delta\widetilde{\gamma}^{\alpha\beta} + \widetilde{\nabla}_\alpha\left\{\left(\frac{1}{2}\widetilde{\gamma}^{\mu\nu}\,\widetilde{\nabla}^\alpha r - \widetilde{\gamma}^{\mu\alpha}\,\widetilde{\nabla}^\nu r\right)\delta\widetilde{\gamma}_{\mu\nu}\right\}, \quad \delta_r\widetilde{\sigma} = \widetilde{\Box}\,\delta r\,,$$

$$\delta_{\widetilde{\gamma}}\widetilde{R} = \frac{1}{2}\,\widetilde{R}\,\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}\,\delta\widetilde{\gamma}^{\alpha\beta} + \widetilde{\nabla}_\alpha\left\{\left(\widetilde{\gamma}^{\beta\mu}\,\widetilde{\gamma}^{\alpha\nu} - \widetilde{\gamma}^{\mu\nu}\,\widetilde{\gamma}^{\beta\alpha}\right)\widetilde{\nabla}_\beta\,\delta\widetilde{\gamma}_{\mu\nu}\right\}\,,$$

получим окончательный результат для вариации действия гравитации:

$$\begin{aligned}\delta S_{2q} = &-\frac{1}{4}\int_{\Omega_2^+}\sqrt{|\widetilde{\gamma}|}\,\left(H^+_{\alpha\beta}\,\delta\widetilde{\gamma}^{\alpha\beta} + 6\left(Z^+ + \widetilde{\Box}Y^+\right)\delta r + \widetilde{\nabla}_\alpha V_2^{+\alpha}\right)d^2x - \\ &-\frac{1}{4}\int_{\Omega_2^-}\sqrt{|\widetilde{\gamma}|}\,\left(H^-_{\alpha\beta}\,\delta\widetilde{\gamma}^{\alpha\beta} + 6\left(Z^- + \widetilde{\Box}Y^-\right)\delta r + \widetilde{\nabla}_\alpha V_2^{-\alpha}\right)d^2x,\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}H^\pm_{\alpha\beta} = \widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}\,&\left(\frac{1}{2}\widetilde{R}^\pm X^\pm + \widetilde{\Box}X^\pm + 3Y^\pm\,\widetilde{\sigma}^\pm + 3\widetilde{\partial}^\nu Y^\pm\,\partial_\nu r - \frac{1}{2}L^\pm_{2q}\right) - \\ &- \widetilde{\nabla}_\alpha\widetilde{\nabla}_\beta X^\pm - 3\partial_\alpha Y^\pm\,\partial_\beta r - 3\partial_\beta Y^\pm\,\partial_\alpha r,\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}V_2^{\pm\alpha} = &\left(\widetilde{\gamma}^{\beta\mu}\,\widetilde{\gamma}^{\alpha\nu} + \widetilde{\gamma}^{\beta\nu}\,\widetilde{\gamma}^{\alpha\mu} - 2\,\widetilde{\gamma}^{\mu\nu}\,\widetilde{\gamma}^{\alpha\beta}\right)\left\{\frac{1}{2}(X^\pm)^2\widetilde{\nabla}_\beta\left(\frac{\delta\widetilde{\gamma}_{\mu\nu}}{X^\pm}\right) - 3\partial_\beta r\,Y^\pm\,\delta\widetilde{\gamma}_{\mu\nu}\right\} - \\ &- 3\,\widetilde{\partial}^\alpha r\,\widetilde{\gamma}^{\mu\nu}\,Y^\pm\,\delta\widetilde{\gamma}_{\mu\nu} + 6(Y^\pm)^2\,\widetilde{\nabla}^\alpha\left(\frac{\delta r}{Y^\pm}\right).\end{aligned} \tag{3.35}$$

Вариация двумерного эффективного действия материи получается интегрированием (1.32) по углам:

$$\begin{aligned}\delta S_m = &\,2\pi\int_{\Omega_2^+} r^4\sqrt{|\widetilde{\gamma}|}\left(T^+_{ab}\delta g^{ab}\right)d^2x + 2\pi\int_{\Omega_2^-} r^4\sqrt{|\widetilde{\gamma}|}\left(T^-_{ab}\delta g^{ab}\right)d^2x - \\ &- 2\pi\int_{\Sigma_0} r^4\sqrt{|\widetilde{h}|}\left(S^{ab}\delta g_{ab}\right)dy = 2\pi\int_{\Omega_2^+} r^2\sqrt{|\widetilde{\gamma}|}\left(T^+_{\alpha\beta}\delta\widetilde{\gamma}^{\alpha\beta} - 2rT^+\,\delta r\right)d^2x + \\ &+ 2\pi\int_{\Omega_2^-} r^2\sqrt{|\widetilde{\gamma}|}\left(T^-_{\alpha\beta}\delta\widetilde{\gamma}^{\alpha\beta} - 2rT^-\,\delta r\right)d^2x - \\ &- 2\pi\int_{\Sigma_0} r^3\sqrt{|\widetilde{h}|}\left(r^3\,S^{\alpha\beta}\,\delta\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta} + 2S\,\delta r\right)dy,\end{aligned} \tag{3.36}$$

здесь y - произвольная координата, дополняющая систему координат $\{n, y\}$, $\widetilde{h} = \widetilde{\gamma}(0,y)$ - ограничение детерминанта двумерной метрики на гиперповерхность, $T^{\pm} = r^2 \left(T^{\pm\alpha\beta}\,\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta} - 2\,T^{\pm 22}\right)$ - след четырехмерного тензора энергии-импульса в областях $\Omega^{\pm}$, $S = r^2 \left(S^{\alpha\beta}\,\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta} - 2\,S^{22}\right)$ - след четырехмерного поверхностного тензора энергии-импульса.

Из принципа наименьшего действия получаем аналог системы (1.33,1.34) для сферически-симметричного случая:

$$H^{\pm}_{\alpha\beta} = 8\pi r^2 T^{\pm}_{\alpha\beta}\,, \quad Z^{\pm} + \widetilde{\Box}\, Y^{\pm} = -\frac{8\pi}{3}\, r^3 T^{\pm}\,, \tag{3.37}$$

$$\epsilon\,[V_2^{\alpha}]\, N_{2\alpha} = 8\pi\, r^3 \left(r^3\, S^{\alpha\beta}\, \delta\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta} + 2S\,\delta r\right)\,. \tag{3.38}$$

Необходимо отметить, что $N_{2\alpha}$ - внешняя нормаль к гиперповерхности в двумерном многообразии Ω_2, в общем случае она отличается от внешней нормали в исходном четырехмерном многообразии, так как само уравнение гиперповерхности $n(x^{\alpha}) = 0$ перестает быть нормированым при переходе к Ω_2. Так, для времениподобных и пространственноподобных гиперповерхностей нормальные гауссовы координаты Σ_0 различны для Ω и Ω_2. Тем не менее, для светоподобных гиперповерхностей нормировка произвольна, поэтому для них можно считать, что $N_{2\alpha} = N_{\alpha}$.

Перейдем к координатам $\{n,\widetilde{\lambda}\}$, которые связаны с исходными заменой переменной λ: $\widetilde{\lambda} = \int \frac{d\lambda}{r^2(0,\lambda)}$. В результате такой замены получим: $\widetilde{\gamma}_{n\widetilde{\lambda}}(0,\lambda) = 1$. В этих координатах непрерывны компоненты двумерной «метрики» $\widetilde{\gamma}_{ij}$, но кроме того, отдельно необходимо потребовать непрерывность радиуса на гиперповерхности: $r^{-}(0,\widetilde{\lambda}) = r^{+}(0,\widetilde{\lambda})$.

Как и в четырехмерном случае, на гиперповерхность высаживается только n-я компонента вектора $[V_2^{\alpha}]$. Отбросив слагаемые, которые представляют себя полную дивергенцию уже по гиперповерхности, получим:

$$\begin{aligned}[V_2^{n}] = -\Big(6\,[\partial_n r\, Y] + 3\,\widetilde{\gamma}^{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}}\,\partial_{\widetilde{\lambda}} r\,[Y] + [\partial_n X] + \partial_{\widetilde{\lambda}}\widetilde{\gamma}_{nn}\,[X]\Big)\,\delta\widetilde{\gamma}_{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}} + \\ + [X\,\partial_n\,\delta\widetilde{\gamma}_{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}}] + 2[\partial_{\widetilde{\lambda}} X]\,\delta\widetilde{\gamma}_{n\widetilde{\lambda}} - 12[\partial_{\widetilde{\lambda}} Y]\,\delta r.\end{aligned} \tag{3.39}$$

Следует пояснить, что в данной модели скачки определенной величины на гиперповерхности Σ_0 считаются уже с учетом первых производных по n в том числе.

Подставляя этот скачок в (3.38), получаем уравнения движения для сферически-симметричного светоподобного двойного слоя:

$$
\begin{aligned}
&-\Big(6\,[\partial_n r\,Y] + 3\,\widetilde{\gamma}^{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}}\,\partial_{\widetilde{\lambda}} r\,[Y] + [\partial_n X] + \partial_{\widetilde{\lambda}}\widetilde{\gamma}_{nn}\,[X]\Big)\,\delta\widetilde{\gamma}_{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}} + \\
&+ [X\,\partial_n\,\delta\widetilde{\gamma}_{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}}] + 2[\partial_{\widetilde{\lambda}} X]\,\delta\widetilde{\gamma}_{n\widetilde{\lambda}} - 12[\partial_{\widetilde{\lambda}} Y]\,\delta r = 8\pi\left(r^6\,S^{\alpha\beta}\delta\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta} + 2r^3 S\,\delta r\right). \quad (3.40)
\end{aligned}
$$

Если теперь в уравнении (3.40) потребовать непрерывность на Σ_0 скаляров X и Y, то из него получится (3.24) в переменных $\{n,\widetilde{\lambda}\}$. Кроме того, из (3.40) следует, что даже для такой модели светоподобной сингулярной гиперповерхности $S^{nn} = 0$.

В этом случае $[\partial_n\,\delta\widetilde{\gamma}_{\lambda\lambda}] \neq 0$, поэтому данный множитель уже нельзя вынести за скобку, как это было сделано ранее. Тем не менее, в связи с неявным присутсвием производной дельта-функции в уравнениях движения, это слагаемое все так же выражается через комбинацию вариаций δg_{ij} с произвольными функциями в качестве коэффициентов:

$$
[X\,\partial_n\,\delta\widetilde{\gamma}_{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}}] = B^{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}}_{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}}(\widetilde{\lambda},r)\,\delta\widetilde{\gamma}_{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}} + B^{22}_{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}}(\widetilde{\lambda},r)\,\delta r\,. \quad (3.41)
$$

Для сравнения данной модели с предыдущими результатами рассмотрим частный случай конформной гравитации, для которого: $\beta = \alpha_4 = 0,\quad \alpha_3 = \frac{1}{3}\alpha_1,\quad \alpha_2 = -2\alpha_1$. Из (3.40) с соответствующими коэффициентами получим уравнения движения сферически-симметричного светоподобного двойного слоя в конформной гравитации:

$$
[\partial_{\widetilde{\lambda}}\widetilde{R}] = \frac{12\pi}{\alpha_1}\,r^6\,S^{n\widetilde{\lambda}}, \quad (3.42)
$$

$$
[\partial_n\widetilde{R}] + \partial_{\widetilde{\lambda}}\widetilde{\gamma}_{nn}\,[\widetilde{R}] - B^{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}}_{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}}(\widetilde{\lambda},r) = -\frac{12\pi}{\alpha_1}\,r^6\,S^{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}}, \quad (3.43)
$$

$$
B^{22}_{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}}(\widetilde{\lambda},r) = 16\pi r^3 S = 0\,. \quad (3.44)
$$

Известно, что для конформной гравитации след тензора энергии-импульса равен нулю [49] . Для рассматриваемой задачи это означает, что след объемной части тензора энергии-импульса равен нулю: $T^{\pm}_{ab}\,g^{ab} = 0$, но при этом в общем случае не обязательно, что след поверхностного тензора энергии-импульса S^a_a должен быть равен нулю, так как мы не предполагали по умолчанию сохранение конформной инвариантности непосредственно на Σ_0. Тем не менее, если принять, что рассматриваемая модель представляет из себя предельный случай некоторого несингулярного распределения материи, то имеет смысл в явном виде требовать: $S^a_a = 0$.

В системе уравнений движения (3.42-3.44) только первое определяет динамику светоподобного двойного слоя, так как остальные два задают неизвестные функции: $B^{22}_{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}}(\widetilde{\lambda},r)$, $B^{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}}_{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}}(\widetilde{\lambda},r)$.

Из уравнения (3.44) следует, что $S^{22} = S^{n\widetilde{\lambda}}$. В частности, это означает, что светоподобный двойной слой точно не может состоять из пыли, для которой в сферически симметричном случае $S^2_2 = S^3_3 = 0$, что естественно, так как частицы пыли не могут двигаться со скоростью света. С другой стороны, в данной модели существует светоподобный двойной слой, относящийся к так называемому «горению вакуума» [40; 41] , при котором $S^{\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}} = 0$. В этом случае можно проследить связь так называемого энтропийного источника, определенного в вышеупомянутой работе и входящего в состав S^{22} с излучением от двойного слоя, заданным предположительно через $S^{n\widetilde{\lambda}}$.

Двойной слой существует, только если скачок $[\partial_{\widetilde{\lambda}}\widetilde{R}]$ не равен нулю. Отсюда автоматически следует, что сшивка двух вакуумов с постоянной $\widetilde{R}$ не создает двойного слоя.

Для вакуума с переменной $\widetilde{R}$, описанной двумерной метрикой (1.90), светоподобная гиперповерхность является произвольной фунцией переменной u или v. Выберем гиперповерхность, заданную произвольной функцией от u: $n = F(u)$, тогда $\widetilde{\lambda} = \int \frac{df}{dn}(0)\, \widetilde{H}(f(0),v)\, dv$, соответственно, в координатах $\{n,\widetilde{\lambda}\}$ двумерная «метрика» имеет вид:

$$d\widetilde{s}_2^{+2} = 2\,\frac{\widetilde{H}(n,\widetilde{\lambda})\,\frac{df}{dn}(n)}{\widetilde{H}(0,\widetilde{\lambda})\,\frac{df}{dn}(0)} dn\, d\widetilde{\lambda},$$

где $f(n)$ - функция, обратная $F(u)$. С учетом вышеперечисленного, для вакуума с переменной $\widetilde{R}$ верно следующее:

$$\partial_{\widetilde{\lambda}}\widetilde{R}|_{\Sigma_0} = \left(\partial_v \widetilde{R}\,\frac{dv}{d\widetilde{\lambda}}\right)|_{\Sigma_0} = \frac{1}{\frac{df}{dn}(0)}\,. \tag{3.45}$$

Таким образом, при сшивке двух вакуумов, а именно, вакуума с переменной $\widetilde{R}$ и вакуума с постоянной $\widetilde{R}$ или двух вакуумов с переменной $\widetilde{R}$, выполняется следующее соотношение:

$$\frac{12\pi}{\alpha_1}\, r^6\, S^{n\widetilde{\lambda}} = \frac{12\pi}{\alpha_1}\, r^4\, S^{n\lambda} = const. \tag{3.46}$$

В качестве примера рассмотрим светоподобный двойной слой, разделяющий пространство-время Шварцшильда в качестве Ω^+ и вакуум Минковского в качестве Ω^-. В данной модели такая сшивка существует. Двумерная «метрика» в Ω^+:

$$d\widetilde{s}_2^{+2} = \frac{1}{r^2(u,v)}\left(1 - \frac{r_g}{r(u,v)}\right) du\, dv,$$

Для определенности выберем светоподобную гиперповерхность $u = u_0$, для которой: $n = u - u_0$, $\quad \widetilde{\lambda} = \int \frac{dv}{2\, r^2(u_0,v)}\left(1 - \frac{r_g}{r(u_0,v)}\right)$, поэтому

$$\partial_{\widetilde{\lambda}} \widetilde{R}\, |_{\Sigma_0} = \partial_{\widetilde{\lambda}}\left(2 - \frac{6\, r_g}{r}\right) |_{\Sigma_0} = \frac{6 r_g}{r^2}\, \partial_v r\, \frac{dv}{d\widetilde{\lambda}}\, |_{\Sigma_0} = 6\, r_g. \tag{3.47}$$

Динамика двойного слоя определяется уравнением:

$$r^4(\lambda) = \frac{r_g}{2\pi}\alpha_1 \left(S^{n\lambda}(\lambda)\right)^{-1}. \tag{3.48}$$

Поясним также, что (3.47) отличается от (3.45), так как координаты $\{u,v\}$ в формуле (1.90) для произвольного вакуума с переменной $\widetilde{R}$ не совпадают со стандартными двойными световыми координатами для метрики Шварцшильда:

$$d\widetilde{s}_2^{+2} = \frac{1}{r^2(u,v)}\left(1 - \frac{r_g}{r(u,v)}\right) du\, dv = \frac{du\, dv}{(6 r_g)^2}\, \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^3 - 12\widetilde{R} + 16\right)\,,$$

т.е., для приведения двумерной «метрики» к форме (1.90), необходима замена: $\frac{u}{6r_g} \mapsto u, \quad \frac{v}{6r_g} \mapsto v\;$.

Учитывая неопределенность нормировки $n(x)$ для светоподобной гиперповерхности, имеет смысл переписать уравнение движения двойного слоя (3.42) в инвариантной форме:

$$[N_a\, \partial^a \widetilde{R}] = \frac{6\pi}{\alpha_1}\, r^2\, S^{\alpha\beta}\, \gamma_{\alpha\beta} = \frac{6\pi}{\alpha_1}\, r^2\, S^{bc} N_b\, l_c\,. \tag{3.49}$$

В отличие от сферически симметричных светоподобных тонких оболочек, для двойных слоев существует сшивка метрики типа Вайдья с вакуумом с постоянной $\widetilde{R}$. Уравнение движения для этого случая:

$$\pm\,\partial_\alpha F(x)\,\partial^\alpha \widetilde{R} = \frac{6\pi}{\alpha_1}\,r^4\,S^{\alpha\beta}(x)\,\gamma_{\alpha\beta}(x)\,, \tag{3.50}$$

где $\{x^\alpha\}$ - произвольные непрерывные в окрестности Σ_0 координаты, $F(x) = F(u(x),\widetilde{R}(x))$ - функция, заданная уравнением (3.57). Верхний знак соответствует случаю, когда Ω^- - метрика типа Вайдья, Ω^+ - вакуум с постоянной $\widetilde{R}$, нижний - обратной ситуации.

3.5 Светоподобные тонкие оболочки в конформной гравитации

В данном разделе рассматриваются светоподобные тонкие оболочки, разделяющие два сферически симметричных решения (1.82). В частности, нас интересуют вакуумные решения и решения типа Вайдья.

3.5.1 Сшивки вакуумных решений

Разберем случай, когда в качестве $\Omega^\pm$ выступают два сферически симметричных вакуума конформной гравитации. В публикации [49] продемонстрировано, что есть три вида сферически симметричных вакуума конформной гравитации: с постоянными $\widetilde{R} = \pm 2$ и с переменным $\widetilde{R}$.

В силу условия $[\widetilde{R}] = 0$ возможны комбинации сшивки метрик с постоянным $\widetilde{R} = \pm 2$ с метрикой с переменным $\widetilde{R}$ и сшивки двух метрик с переменным $\widetilde{R}$ с разными C_0.

Разберем сначала первый случай. Выберем пространство-время с постоянным $\widetilde{R} = 2$ и пространство-время с метрикой (1.90) в качестве в качестве Ω^- и Ω^+ соответственно. Так как $[\widetilde{R}] = 0$ и следовательно $\widetilde{R}^+|_{\Sigma_0} = \widetilde{R}^-|_{\Sigma_0} = 2$, уравнение Σ_0 в Ω^+ выглядит как $\widetilde{R}^+ = 2$. Для того, чтобы гиперповерхность такого типа была светоподобной в Ω^+ необходимо положить $C_0 = 16$. В этом случае, гиперповерхность $\widetilde{R}^+ = 2$ становится аналогом двойного горизонта, встречающегося в экстремальных черных дырах, так как $A^+(\widetilde{R}^+) = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^+ - 2\right)^2 (\widetilde{R}^+ + 4)$. Перейдем к координатам $\{u^+, \widetilde{R}^+\}$ в Ω^+:

$$ds_2^{+2} = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^+ - 2\right)^2 (\widetilde{R}^+ + 4)du^{+2} + 2du^+ d\widetilde{R}^+. \tag{3.51}$$

Итак поверхность Σ_0 задана уравнением $\widetilde{R}^+ = 2$ в Ω^+ и $F^-(u^-) = 0$ в Ω^-, где F^- - произвольная функция. Случай, когда F^- - произвольная функция v^-, аналогичен данному. Как было отмечено выше, непрерывность компонент метрики обеспечивается согласованием соответствующих координат $u^+(v^-)$ на Σ_0, которое определяется из соотношения:

$$r^+(u^+,2) = r^-(f^-(0),v^-), \tag{3.52}$$

где f^- - функция, обратная к F^-. В данном случае $n^+ = \widetilde{R}^+ - 2$, $n^- = F^-(u^-)$, соответственно, оставшееся условие Лихнеровича сводится к следующему:

$$\partial_{n^+} r^+|_{\Sigma_0} = \partial_{\widetilde{R}^+} r^+(u^+,2) = \partial_{n^-} r^-|_{\Sigma_0} = \frac{df^-}{dn^-}(0)\,\partial_{u^-} r^-(f^-(0),v^-). \tag{3.53}$$

Так как решения уравнений движения конформной гравитации определяются с точностью до конформного фактора, которым в случае сферической симметрии выбран радиус, для любой дважды дифференцируемой функции $F^-(u^-)$ можно подобрать $r^+(u^+,\widetilde{R})$ и $r^-(u^-,v^-)$, которые удовлетворяют уравнению (3.53) при условии, что связь $u^+(v^-)$ на гиперповерхности Σ_0 определяется (3.52).

Далее, рассмотрим вариант, когда гиперповерхность разделяет два вакуума с переменной $\widetilde{R}$. Будем считать, что Σ_0 задана уравнениями $F^\pm(u^\pm) = 0$ в $\Omega^\pm$, в этом случае удобно перейти к координатам $n^\pm = F^\pm(u^\pm), \widetilde{R}^\pm$ в $\Omega^\pm$:

$$ds_2^{\pm 2} = A^\pm(\widetilde{R}^\pm)\left(\frac{df^\pm}{dn^\pm}\right)^2 dn^{\pm 2} + 2sign(A^\pm(\widetilde{R}^\pm))\frac{df^\pm}{dn^\pm}dn^+ d\widetilde{R}^\pm, \tag{3.54}$$

где $f(n)$ - функция, обратная к $F(u)$, $A^\pm = \frac{1}{6}(\widetilde{R}^{\pm 3} - 12\widetilde{R}^\pm + C_0^\pm)$. Из непрерывности метрики на Σ_0, а также условия $\widetilde{R}^+|_{\Sigma_0} = \widetilde{R}^-|_{\Sigma_0}$ следует, что $\frac{df^+}{dn^+}(0) = \frac{df^-}{dn^-}(0)$ $C_0^+ = C_0^-$. Это означает, что два данных вакуума могут отличаться только функциями $r^\pm(n^\pm,\widetilde{R}^\pm)$, но они также должны совпадать вплоть до второго порядка по $n^{\pm}$ на рассматриваемой гиперповерхности в силу непрерывности метрики и ее первых производных:

$$r^{+}(0,\widetilde{R}^{+}) = r^{-}(0,\widetilde{R}^{-}), \quad \partial_{n^{+}} r^{+}(0,\widetilde{R}^{+}) = \partial_{n^{-}} r^{-}(0,\widetilde{R}^{-}). \tag{3.55}$$

3.5.2 Сшивки с решениями типа Вайдья

В этом разделе рассмотрим ситуацию, когда одна из областей Ω^{+} представляет из себя решение типа Вайдья для сферически-симметричной конформной гравитации, также описанное в статье [49]. Таким образом, двумерная часть метрики в Ω^{+} задана следующим образом:

$$ds_2^{+2} = A^{+}(\widetilde{R}^{+},u^{+})du^{+2} + 2du^{+}d\widetilde{R}^{+},$$
$$A^{+}(\widetilde{R}^{+},u^{+}) = \frac{1}{6}(\widetilde{R}^{+3} - 12\widetilde{R}^{+} + C_0^{+}(u^{+})), \tag{3.56}$$

где $C_0^{+}(u^{+})$ - произвольная функция.

Для подобной метрики есть два типа светоподобных поверхностей, первый - гиперповерхности, заданные произвольной функцией от переменной u^{+}, второй - функцией $F^{+}(u^{+},\widetilde{R}^{+})$, которая удовлетворяет уравнению:

$$\partial_{u^{+}} F^{+} = \frac{1}{12}(\widetilde{R}^{+3} - 12\widetilde{R}^{+} + C_0^{+}(u^{+}))\partial_{\widetilde{R}^{+}} F^{+}, \tag{3.57}$$

мы сосредоточимся на втором типе поверхностей, так как он потенциально отвечает оболочке с излучением.

Если в качестве Ω^{-} выбрать вакуум с постоянным $\widetilde{R}^{-} = \pm 2$, то в силу условия $[\widetilde{R}] = 0$, это означает, что гиперповерхность Σ_0 задана уравнением $\widetilde{R}^{+} = \pm 2$ в Ω^{+}. Из уравнения (3.57) следует, что гиперповерхность такого типа может быть светоподобной, только если $C_0^{+}(u^{+}) = \pm 16$, но в этом случае метрика (3.56) фактически задает вакуумное решение с переменным $\widetilde{R}^{+}$.

Перейдем далее к случаю, когда Ω^- - вакуум с переменной $\widetilde{R}$. В координатах $\{n^{\pm},\widetilde{R}^{\pm}\}$ метрика в Ω^- имеет вид:

$$ds_2^{-2} = A^-(\widetilde{R}^-)\left(\frac{df^-}{dn^-}\right)^2 dn^{-2} + 2sign(A^-(\widetilde{R}^-))\frac{df^-}{dn^-}dn^- d\widetilde{R}^-, \tag{3.58}$$

аналогично для Ω^+:

$$ds_2^{+2} = A^+(\widetilde{R}^+,u^+)\left(\partial_{u+}F^+(u^+,\widetilde{R}^+)\right)^{-2} dn^{+2} - 2\left(\partial_{u+}F^+(u^+,\widetilde{R}^+)\right)^{-1} dn^+ d\widetilde{R}^+, \tag{3.59}$$

где $n^+(x^+) = F^+(u^+,\widetilde{R}^+)$ - функция, заданная уравнением (3.57) , $n^-(x^-) = F^-(u^-)$ - произвольная функция, f^- - функция, обратная к F^-. Из непрерывности метрики и $\widetilde{R}$ на гиперповерхности следует, что $A^+(\widetilde{R}^+,u^+)|_{\Sigma_0} = A^-(\widetilde{R}^-)$, откуда в свою очередь получим: $C_0^+(u^+)|_{\Sigma_0} = C_0^- = const$. Это означает, что либо C_0^+ константа во всем Ω^+, и вместо решения типа Вайдья мы имеем вакуум с переменной $\widetilde{R}$, либо гиперповерхность в Ω^+ относится к первовму типу - $n^+(x^+) = F^+(u^+)$, тогда:

$$ds_2^{+2} = A^+(\widetilde{R}^+,u^+)\left(\frac{df^+}{dn^+}\right)^2 dn^{+2} + 2\frac{df^+}{dn^+}dn^+ d\widetilde{R}^+,$$

где $f^+(n^+)$ - функция обратная к $F^+(u^+)$. В этом случае $C_0^+(u^+)|_{\Sigma_0} = C_0^+(f^+(0)) = C_0^-$, т.е. сшивка существует, но такой тип гиперповерхности отвечает отсутствию излучения.

Пусть $\Omega^{\pm}$ - два решения типа Вайдья, $n^{\pm}(x^{\pm})$ - функции, заданные уравнением (3.57). В координатах $\{n^{\pm},\widetilde{R}^{\pm}\}$:

$$ds_2^{\pm 2} = A^{\pm}\left(\partial_{u\pm}F^{\pm}\right)^{-2} dn^{\pm 2} - 2\left(\partial_{u\pm}F^{\pm}\right)^{-1} dn^{\pm} d\widetilde{R}^{\pm}. \tag{3.60}$$

Из непрерывности метрики и $\widetilde{R}$ на гиперповерхности следует, что $\partial_{u-}F^-(\widetilde{R}^-,u^-)|_{\Sigma_0} = \partial_{u+}F^+(\widetilde{R}^+,u^+)|_{\Sigma_0}$ и $A^+(\widetilde{R}^+,u^+)|_{\Sigma_0} = A^-(\widetilde{R}^-,u^-)|_{\Sigma_0}$, откуда - $C_0^+(u^+)|_{\Sigma_0} = C_0^-(u^-)|_{\Sigma_0}$.

Это означает, что два данных решения могут отличаться только функциями $r^{\pm}(n^{\pm},\widetilde{R}^{\pm})$, но они также должны совпадать вплоть до второго порядка по $n^{\pm}$ на Σ_0:

$$r^+(0,\widetilde{R}^+) = r^-(0,\widetilde{R}^-), \quad \partial_{n^+}r^+(0,\widetilde{R}^+) = \partial_{n^-}r^-(0,\widetilde{R}^-). \tag{3.61}$$

В этом случае, несмотря на то, что гиперповерхность может относиться ко второму типу, ее все же нельзя интерпретировать как оболочку с излучением.

Глава 4. Времениподобные и пространственноподобные сингулярные гиперповерхности в квадратичной гравитации

4.1 Гауссовы нормальные координаты

Как отмечено ранее, чтобы избежать появления неопределенных функций в лагранжиане, необходимо обеспечить непрерывность компонент метрики на рассматриваемой гиперповерхности. Этого всегда можно добиться подбором соответствующих координат. Так, для времениподобных и пространственноподобных гиперповерхностей, как правило, удобно использовать гауссовы нормальные координаты. В публикации [42] было продемонстрировано, что для данного типа сингулярных гиперповерхностей всегда возможно состыковать две различные гауссовы нормальные системы координат из областей $\Omega^{\pm}$ на рассматриваемой гиперповерхности таким образом, чтобы скачки компонент метрики были равны нулю.

Гауссовы нормальные координаты представляют из себя частный случай координат $\{n,y^i\}$. Метрика в окрестности гиперповерхности в гауссовых нормальных координатах имеет вид:

$$ds^2 = \varepsilon\, dn^2 + \gamma_{ij}\, dy^i\, dy^j, \quad i,j \neq n. \tag{4.1}$$

При этом здесь мы рассматриваем описанную выше объединенную систему координат, составленную из гауссовых нормальных координат в $\Omega^{\pm}$ областях.

Воспользовавшись формализмом, представленным в [59], кратко опишем построение гауссовой нормальной системы координат времениподобной (пространственноподобной) гиперповерхности для каждой из областей.

Временно опустим обозначения $\pm$ для удобства и будем записывать все уравнения в одной из областей. Рассмотрим времениподобную или пространственноподобную гиперповерхность Σ_0, заданную уравнением: $n(x) = 0$, в произвольных исходных координатах $\{x^a\}$. Будем считать, что уравнение гиперповерхности нормированное, т.е., удовлетворяет условию: $\partial_a n(x)\, \partial^a n(x)|_{\Sigma_0} = \varepsilon$. Внешняя нормаль задана условием: $N_a(x) = \epsilon \partial_a n(x)$.

Далее, рассмотрим конгруэнцию геодезических, пространственноподобных для времениподобной гиперповерхности или наоборот, перпендикулярно пересекающих Σ_0. Это всегда можно сделать, как минимум, локально, если тензор $\nabla_b N^a$ не имеет особенностей в окрестности Σ_0, и эта окрестность является геодезически полной. Заметим, что в данном случае речь идет об окрестности с одной стороны от Σ_0, так как на самой гиперповерхности нормаль непрерывна, но компоненты тензора внешней кривизны могут не совпадать с разных сторон от Σ_0. Для этого необходимо найти для каждой точки гиперповерхности $P \in \Sigma_0$ найти геодезическую соответствующего типа, проходящей через заданную точку, касательный вектор к которой в этой точке совпадает с $N^a|_P$. Затем можно положить синхронизированый натуральный параметр $\widetilde{n}(x)$ конгруэнции этих геодезических равным нулю на Σ_0. После этого саму гиперповерхность можно переопределить уравнением $\widetilde{n}(x) = 0$, для него соотношение $\partial_a \widetilde{n}(x)\, \partial^a \widetilde{n}(x) = \varepsilon$ выполняется не только непосредственно на Σ_0, но и в некоторой окрестности рассматриваемой гиперповерхности. Для удобства, ниже вернемся к обозначению $n(x)$ для уравнения гиперповерхности, имея в виду не исходную функцию, а $\widetilde{n}(x)$.

Выберем на Σ_0 внутренние координаты $\{y^i\}$, которые определяют альтернативный способ задания гиперповерхности соотношениями: $x^a = x^a(y^i)$, а также удовлетворяют следующим условиям:

$$N_a\, e^a_i = 0, \quad \pounds_N\, e^a_i = \nabla_b\, e^a_i\, N^b - \nabla_b\, N^a\, e^b_i = 0, \quad e^a_i = \frac{\partial x^a}{\partial y^i}.$$

Первое соотношение является следствием определения векторов e^a_i, второе подразумевает, что производная Ли этих векторов вдоль поля N^a равна нулю. Это, в свою очередь, означает, что для каждой точки гиперповерхности Σ_0, в которой определена тройка векторов e^a_i, они могут быть перенесены параллельно сами себе вдоль геодезической, которая принадлежит описаной выше конгруэнции, проходящей через данную точку, оставаясь перпендикулярными вектору N^a.

Таким образом, описаные выше векторные поля $\{N^a, e^a_i\}$ образуют базис в касательном расслоении $T\Omega$ на гиперповерхности и в некоторой ее малой окрестности, поэтому с их помощью можно записать соотношения полноты для обратной метрики:

$$g^{ab} = N^a\,N^b + \gamma^{ij}\,e_i^a\,e_j^b, \tag{4.2}$$

где γ^{ij} - обратная к индуцированной метрике на Σ_0: $\gamma_{ij} = g_{ab}\,e_i^a\,e_j^b$.

Выберем в качестве локальных координат в окрестности гиперповерхности $\{n, y^i\}$, тогда с учетом приведенных выше соотношений получим, что метрика в окрестности Σ_0 имеет структуру (4.1), поэтому полученные таким образом координаты являются искомыми гауссовыми нормальными координатами.

4.2 Полевые уравнения

Воспользовавшись определением (1.12), вычислим внешнюю кривизну в гауссовых нормальных координатах:

$$K_{ij} = -\nabla_a N_b\,\delta_i^a\,\delta_j^b = -\varepsilon\nabla_i\nabla_j n = \varepsilon\,\Gamma^n_{ij} = -\frac{1}{2}\,\partial_n\,\gamma_{ij}, \tag{4.3}$$

след тензора кривизны, соответственно:

$$\begin{aligned} K = \gamma^{ij}\,K_{ij} = -\varepsilon\,\gamma^{ij} e_i^a\,e_j^b\,\nabla_a\nabla_b n = -\varepsilon\,\left(g^{ab} - N^a N^b\right)\,\nabla_a\nabla_b n = \\ = -\varepsilon\,\Box n + N^a N^b\,\nabla_b N_a = -\varepsilon\,\Box n, \end{aligned} \tag{4.4}$$

при выводе этой формулы было использовано соотношение (4.2), а также тот факт, что при построении гауссовой нормальной системы координат находится векторное поле N^a является касательным к конгруэнции геодезических, которой ортогональны все гиперповерхности вида: $n = const$. Более того, если считать, что K - скаляр, определенный при всех n, то из полученной формулы ясно, что след тензора внешней кривизны пропорционален параметру расширения этой конгруэнции.

Уравнения движения (1.44-1.46) сингулярной гиперповерхности в гауссовых нормальных координатах значительно упрощаются. В частности для двойного слоя имеем:

$$-\frac{1}{2}\,\beta_2\,K\,[R] - \beta_1\,K_{ij}\,[R^{ij}] = 8\pi\,S^{nn},$$

$$-\frac{1}{2}\beta_2\left[\partial^i R\right]-\beta_1\left[\nabla_j R^{ij}\right]=8\pi\, S^{ni},$$

$$\beta_1\left[\nabla_n R^{ij}\right]-\beta_1\left(K^i_l\left[R^{lj}\right]+K^j_l\left[R^{li}\right]\right)+\frac{1}{2}\beta_2\,\gamma^{ij}\left[\partial_n R\right]+\frac{1}{2}\left(\beta_1-\beta_2\right)K^{ij}\left[R\right]-$$
$$-\left(\frac{1}{2}\,\beta_2\,\gamma^{kl}\left[R\right]+\beta_1\left[R^{kl}\right]\right)B^{ij}_{kl}(y)=8\pi\varepsilon\, S^{ij},\quad i,j,k,l\neq n. \quad (4.5)$$

Если в этих соотношениях положить $[R^{ab}]=0$, то получим уравнения движения для времениподобной или пространственноподобной тонкой оболочки:

$$S^{nn}=S^{ni}=0,\quad \beta_1\left[\nabla_n R^{ij}\right]+\frac{1}{2}\beta_2\,\gamma^{ij}\left[\partial_n R\right]=8\pi\varepsilon\, S^{ij},\quad i,j\neq n,$$

которые представляют из себя частный случай (1.50) для нормальных гауссовых координат.

4.3 Сферически-симметричные времениподобные и пространственноподобные сингулярные гиперповерхности

В данном разделе рассмотрим пространственно и времениподобные сферически симметричные сингулярные гиперповерхности в сферически-симметричной геометрии.

Как уже было отмечено, для этого типа гиперповерхностей удобно использовать гауссову нормальную систему координат. Для сферически симметричных геометрий метрика в этих координатах имеет вид:

$$ds^2=\varepsilon\, dn^2+\gamma_{00}(n,\tau)\,d\tau^2-r^2(n,\tau)\,d\Omega^2=r^2\left(\frac{\varepsilon}{r^2}\,dn^2+\widetilde{\gamma}_{00}d\tau^2-d\Omega^2\right), \quad (4.6)$$

где $\varepsilon=-1$ для времениподобной гиперповерхности и 1 для пространственноподобной, координата τ может быть как временной, так и пространственной координатой. Кроме того, для гауссовой нормальной системы коордиат всегда можно добиться того, чтобы $\gamma_{00}(0,\tau)=-\varepsilon$.

Воспользовавшись соотношениями (4.3,4.4) для частного случая метрики (4.6), выпишем компоненты тензора внешней кривизны и ее след:

$$K_{00} = -\frac{1}{2}\,\partial_n\gamma_{00}, \quad K_{22} = r\,\partial_n r = \frac{1}{sin^2\theta}\,K_{33}, \quad K = -\frac{1}{2\gamma_{00}}\,\partial_n\gamma_{00} - \frac{2}{r}\,\partial_n r, \tag{4.7}$$

причем $K(0,\tau) = \frac{\varepsilon}{2}\,\partial_n\gamma_{00} - \frac{2}{r}\,\partial_n r$.

В некоторых задачах имеет смысл выделить квадрат радиуса как конформный фактор в метрике (4.6), и работать с $\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}$, для которой по аналогии с K_{ij} можно ввести тензор $\widetilde{K}_{\alpha\beta}$ с единственной ненулевой компонентой:

$$\widetilde{K}_{00} = -\frac{1}{2}\,\partial_n\widetilde{\gamma}_{00}, \quad \widetilde{\gamma}_{00} = \frac{\gamma_{00}}{r^2}\,. \tag{4.8}$$

Его след относительно двумерной «метрики»: $\widetilde{K} = -\frac{1}{2}\frac{\partial_n\widetilde{\gamma}_{00}}{\widetilde{\gamma}_{00}}$ является инвариантом, так как $K = \widetilde{K} - \frac{3}{r}\,\partial_n r$ и величина $\partial_n r = N^a\,\partial_a r$ - также инвариант.

Выпишем уравнения движения двойного слоя (1.44-1.46) для частного случая метрики (4.6), выразив присутствующие в них величины через комбинации представленных выше инвариантов сферической геометрии:

$$-\frac{1}{2}\,(\beta_1+\beta_2)\,K\,[\widetilde{R}] - \beta_1\,\frac{\partial_n r}{r}\,[\widetilde{R}] + (\beta_1+3\beta_2)\,K\,r[\sigma] = 8\pi r^2\,S^{nn}\,, \tag{4.9}$$

$$(\beta_1+\beta_2)\,\frac{1}{2r^2}\,[\partial_0\widetilde{R}] - (\beta_1+3\beta_2)\left[\partial_0\left(\frac{\sigma}{r}\right)\right] - \beta_2\,\frac{\partial_0 r}{r^3}[\widetilde{R}] = 8\pi S^{n0}, \quad S^{n2} = S^{n3} = 0. \tag{4.10}$$

$$\begin{gathered}
-\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\,\frac{1}{r^2}[\partial_n\widetilde{R}] + \beta_2\,\frac{\partial_n r}{r^3}[\widetilde{R}] + (\beta_1+3\beta_2)\left[\partial_n\left(\frac{\sigma}{r}\right)\right] + \\
+\left(\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\,\frac{1}{r^2}[\widetilde{R}] - (\beta_1+3\beta_2)\frac{1}{r}[\sigma]\right)\left(K + \frac{2\partial_n r}{r} + B^{00}_{00}(\tau)\right) = 8\pi S^{00},
\end{gathered} \tag{4.11}$$

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}\beta_2\,\frac{1}{r^2}[\partial_n\widetilde{R}] - (\beta_1+3\beta_2)\,\frac{1}{r}[\partial_n\sigma] - \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\,\frac{\partial_n r}{r^3}[\widetilde{R}] - \\
-\left(\frac{1}{2}\beta_2\,\frac{1}{r^2}[\widetilde{R}] - (\beta_1+3\beta_2)\,\frac{1}{r}[\sigma]\right)B^{22}_{22}(\tau) = -8\pi\varepsilon r^2\,S^{22}, \\
S^{33} = \frac{1}{sin^2\theta}S^{22}, \quad S^{23} = S^{02} = S^{03} = 0\,.
\end{gathered} \tag{4.12}$$

При этом были использованы определения двумерной скалярной кривизны и σ (1.69,1.70) для гауссовой нормальной системы координат с метрикой (4.6):

$$\widetilde{R} = \frac{-\varepsilon}{2\partial_n\widetilde{\gamma}_{00}}\partial_n\left\{\frac{r^2(\partial_n\widetilde{\gamma}_{00})^2}{\widetilde{\gamma}_{00}}\right\} + \frac{r^3}{\partial_\tau r}\partial_\tau\left\{\frac{(\partial_\tau r)^2}{r^4\,\widetilde{\gamma}_{00}}\right\},$$

$$[\widetilde{R}] = r^2\,[\partial^2_{nn}\gamma_{00}] + 2\varepsilon\, r\,[\partial^2_{nn}r] = r^4[\partial^2_{nn}\widetilde{\gamma}_{00}], \quad (4.13)$$

$$\sigma = \varepsilon\,\partial^2_{nn}r + \gamma^{00}\partial^2_{\tau\tau}r + \frac{\varepsilon}{2}\,\partial_n\gamma_{00}\,\partial_n r - \frac{1}{2}\gamma^{00}\,\partial_\tau\gamma_{00}\,\partial_\tau r, \quad [\sigma] = \varepsilon\,[\partial^2_{nn}r]. \quad (4.14)$$

В нормальной гауссовой системе координат условия Лихнеровича сводятся к непрерывности $\partial_n r$ и $\partial_n\gamma_{00}$, соответственно они могут быть выражены через непрерывность инвариантов:

$$[K] = 0, \quad [\Delta] = 0, \quad (4.15)$$

где $\Delta = \varepsilon\,(\partial_n r)^2 + \gamma^{00}\,(\partial_\tau r)^2$, при условии, что $\partial_n r$ не меняет знак непосредственно на Σ_0. Альтернативно, условия Лихнеровича сводятся к следующим:

$$[\widetilde{K}] = 0, \quad [\Delta] = 0. \quad (4.16)$$

Аналогично уравнения движения сферически-симметричнной тонкой оболочки в гауссовой нормальной системе координат с метрикой (4.6), полученные из (1.50), также можно записать с помощью инвариантов сферической геометрии :

$$S^{nn} = S^{ni} = 0, \quad i \neq n, \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)\,[\partial_n\widetilde{R}] - (\beta_1 + 3\beta_2)\,r\,[\partial_n\sigma] = 8\pi\varepsilon\, r^2 S^0_0, \quad (4.18)$$

$$\frac{1}{2}\beta_2\,[\partial_n\widetilde{R}] - (\beta_1 + 3\beta_2)\,r[\partial_n\sigma] = 8\pi\varepsilon\, r^2 S^2_2, \quad S^3_3 = S^2_2. \quad (4.19)$$

Условием того, что сингулярная гиперповерхность представляет из себя тонкую оболочку, является отсутствие скачков в тензоре Риччи, поэтому в данном случае, помимо условий Лихнеровича (4.15), выполняются соотношения:

$$[\widetilde{R}] = 0, \quad [\sigma] = 0. \quad (4.20)$$

4.4 Времениподобные и пространственноподобные сингулярные гиперповерхности в конформной гравитации

Уравнения движения времениподобного (пространственноподобного) двойного слоя для сферически-симметричной конформной гравитации являются частным случаем (4.9, 4.10):

$$\widetilde{K}\,[\widetilde{R}] = -\frac{12\pi}{\alpha_1}\,r^2\,\varepsilon S^n_n\,, \tag{4.21}$$

$$\left[\partial_0\left(r\widetilde{R}\right)\right] = \frac{12\pi r^3}{\alpha_1}S^{n0}, \quad S^{n2} = S^{n3} = 0, \tag{4.22}$$

$$[\partial_n\widetilde{R}] - [\widetilde{R}]\left(\widetilde{K} - 2\frac{\partial_n r}{r} + B^{00}_{00}(\tau)\right) = \varepsilon\frac{12\pi}{\alpha_1}r^2 S^0_0, \tag{4.23}$$

$$-\frac{1}{2}\,[\partial_n\widetilde{R}] - \frac{\partial_n r}{r}[\widetilde{R}] + \frac{1}{2}\,[\widetilde{R}]\,B^{22}_{22}(\tau) = \frac{12\pi}{\alpha_1}\varepsilon r^2\,S^2_2, \quad S^3_3 = S^2_2. \tag{4.24}$$

Аналогично, для случая тонкой оболочки получим:

$$[\partial_n\widetilde{R}] = \frac{12\pi\varepsilon r^2}{\alpha_1}S^0_0, \quad S^3_3 = S^2_2 = -\frac{1}{2}S^0_0. \tag{4.25}$$

В конформной гравитации след тензора энергии-импульса равен нулю [48]. Для рассматриваемой задачи это означает, что $T^{\pm}_{ab}\,g^{ab} = 0$, но при этом в общем случае не обязательно, что след поверхностного тензора энергии-импульса S^a_a должен быть равен нулю, так как сохранение конформной инвариантности непосредственно на Σ_0 не предполагалось по умолчанию. Тем не менее, из физических соображений имеет смысл рассматривать задачу, которая представляет из себя предельный случай некоторого несингулярного распределения материи, тогда необходимо, чтобы $S^a_a = 0$.

Как видно из уравнения (4.25), для тонкой оболочки данное условие следует из уравнений движения непосредственно. Для двойного слоя существует дополнительная неопределенность, связанная с выбором «произвольных» функций $B^{kl}_{ij}(\tau)$, соответственно всегда можно положить:

$$S^0_0 + 2S^2_2 + S^n_n = 0\,,$$

откуда из уравнений движения следует, что:

$$B_{22}^{22}(\tau) - B_{00}^{00}(\tau) = 2\,\widetilde{K}.$$

4.4.1 Сшивка двух вакуумов

Рассмотрим сшивку двух сферически-симметричных вакуумов конформной гравитации с помощью двойного слоя или тонкой оболочки. В работе [49] показано, что существует три типа вакуума сферически-симметричной конформной гравитации: два решения с постоянной двумерной скалярной кривизной $\widetilde{R} = \pm 2$ и решение с переменной $\widetilde{R}$.

Для двойного слоя, разделяющего два вакуума, по определению: $S^{n0} = 0$, тогда уравнения движения (4.21,4.22) можно существенно упростить:

$$[\widetilde{R}] = \frac{C}{\rho} \tag{4.26}$$

$$\widetilde{K}\,\frac{C}{\rho} = -\frac{12\pi}{\alpha_1}\,\rho^2\,\varepsilon S^n_n\,, \tag{4.27}$$

где C - произвольная константа, $\rho(\tau) = r|_{\Sigma_0} = r(0,\tau)$. Здесь и далее будем использовать обозначение ρ, подразумевая, что это функция от переменной τ.

Возвращаясь к классификации вакуумов, несложно заметить, что сшивка двух вакуумов с одинаковой постоянной $\widetilde{R}$ не реализуется ни в виде двойного слоя, ни в виде тонкой оболочки.

Сшивка вакуумов с постоянными различными $\widetilde{R}$ возможна только в виде двойного слоя, так как $\partial_n \widetilde{R}^{\pm} = 0$. Рассмотрим случай, когда Ω^+ - вакуум с $\widetilde{R} = 2$ и Ω^- - вакуум с $\widetilde{R} = -2$:

$$ds^{2\pm} = (r^{\pm}(u^{\pm},v^{\pm}))^2\left(\frac{4\,du^{\pm}\,dv^{\pm}}{(u^{\pm} \mp v^{\pm})^2} - d\Omega^2\right),$$

тогда $[\widetilde{R}] = 4$, поэтому из уравнения (4.26) следует, что $\rho = \frac{C}{4} = const$. Это означает, что Σ_0 задана в $\Omega^{\pm}$ областях соотношениями $r^{\pm}(u^{\pm},v^{\pm}) = const = \frac{C}{4}$.

Нормированные уравнения гиперповерхности, т.е. удовлетворяющие условию (1.11): $n^\pm = \frac{r^\pm - C/4}{\sqrt{\Delta^\pm}}$. При этом функции $r^\pm(u^\pm,v^\pm)$ различны для $\Omega^\pm$, но совпадают на Σ_0 и удовлетворяют условию $[\Delta] = 0$.

Для остальных вариантов сшивки двух сферически-симметричных вакуумов конформной гравитации существуют как двойные слои, так и тонкие оболочки.

Рассмотрим сшивку с помощью двойного слоя вакуума с переменной $\widetilde{R}$ в качестве Ω^+ и вакуума с постоянной $\widetilde{R}$ в качестве Ω^-. Для определенности выберем $\widetilde{R}^- = 2$ и обозначим $\widetilde{R}^+ = \widetilde{R}$, тогда:

$$ds^{2+} = r^+(\eta, \widetilde{R})^2 \left(A\, d\eta^2 - A^{-1} d\widetilde{R}^2 - d\Omega^2\right), \quad A(\widetilde{R}) = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^3 - 12\widetilde{R} + C_0\right),$$

$$ds^{2-} = r^-(t,x)^2 \left(\frac{1}{x^2}(dt^2 - dx^2) - d\Omega^2\right).$$

Из соотношения (4.26) следует, что уравнение гиперповерхности в Ω^+ в исходных координатах: $\widetilde{R} - 2 - \frac{C}{r^+(\widetilde{R},\eta)} = 0$.

Уравнения движения (4.21,4.22) записаны в гауссовой нормальной системе координат, при этом переход от исходных произвольных координат $\{x^\pm\}$ в $\Omega^\pm$ к нормальным гауссовым координатам Σ_0 зависит от функций $n^\pm(x^\pm)$, которые заранее неизвестны. Соответственно, далее по умолчанию примем, что даже при использовании исходных координат $\{x^\pm\}$, они рассматриваются как функции от n и τ и, как следствие, только от τ непосредственно на Σ_0. Детали перехода от исходных координат к нормальным гауссовым для сферически-симметричных решений конформной гравитации разобраны в приложении Б.

Запишем условия Лихнеровича для рассматриваемой сшивки:

$$\begin{aligned}\Delta|_{\Sigma_0} &= \frac{1}{A\,\rho^2}\left(\partial_\eta r^+\right)^2 - \frac{A}{\rho^2}\left(\partial_{\widetilde{R}} r^+\right)^2 = \\ &= \frac{6\rho C^2 + C^3 + \rho^3(C_0 - 16)}{\rho^4} \frac{\dot{\rho}^2\left(\rho^2 + C\,\partial_{\widetilde{R}} r^+\right)^2}{6\rho\,\dot{\rho}^2\, C^2 - \varepsilon\left(6\rho\, C^2 + C^3 + \rho^3\left(C_0 - 16\right)\right)} - \\ &\quad - \frac{6\rho C^2 + C^3 + \rho^3(C_0 - 16)}{6\rho^5}\left(\partial_{\widetilde{R}} r^+\right)^2 = \frac{x^2}{\rho^2}\left(\left(\partial_t r^-\right)^2 - \left(\partial_x r^-\right)^2\right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$- \rho\, \widetilde{K}|_{\Sigma_0} = \kappa_- \frac{x^2}{\dot{x}} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\sqrt{\dot{x}^2 \rho^2 - \varepsilon\, x^2}}{x^2} \right) = \frac{\kappa_+}{\dot{\widetilde{R}}} \frac{d}{d\tau} \left(\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^2 \rho^2 - \varepsilon\, A} \right) =$$

$$= -sign(C)\, \kappa_+ \frac{\rho^2}{\dot{\rho}} \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{1}{\rho} \sqrt{\dot{\rho}^2 - \frac{\varepsilon}{6} \left(6 + \frac{C}{\rho} + \frac{\rho^2}{C^2} (C_0 - 16) \right)} \right\}, \quad (4.29)$$

где точкой обозначена полная производная по τ, константы κ_+ и κ_- - знаки $\partial_n \widetilde{R}(0,\tau)$ и $\partial_n x(0,\tau)$ соответственно. Выше также были использованы соотношения:

$$\dot{\rho} = \partial_\eta r^+ \,\dot{\eta} + \partial_{\widetilde{R}} r^+ \,\dot{\widetilde{R}} = \partial_\eta r^+ \,\dot{\eta} - \frac{C \dot{\rho}}{\rho^2} \partial_{\widetilde{R}} r^+,$$

$$\dot{\eta}^2 = \frac{\dot{\widetilde{R}}^2 \rho^2 - \varepsilon A}{\rho^2 A^2} = \frac{C^2 \dot{\rho}^2 - \varepsilon \rho^2 A}{\rho^4 A^2}, \quad A(0,\tau) = \frac{C^2}{6\, \rho^2} \left(\frac{C}{\rho} + 6 + \rho^2 \frac{C_0 - 16}{C^2} \right).$$

Уравнения движения (4.26,4.27) для данного двойного слоя:

$$\widetilde{R} - 2 = \frac{C}{\rho},$$

$$\kappa_+ \frac{|C|}{\dot{\rho}} \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{1}{\rho} \sqrt{\dot{\rho}^2 - \frac{\varepsilon}{6} \left(6 + \frac{C}{\rho} + \frac{\rho^2}{C^2} (C_0 - 16) \right)} \right\} = -\frac{12\pi}{\alpha_1} \rho^2\, \varepsilon S^n_n\,.$$

При сшивке двух вакуумов - с переменной $\widetilde{R}$ и постоянной $\widetilde{R}$, помимо двойных слоев, возможны также тонкие оболочки, для которых должны выполняться дополнительные ограничения (4.20).

Из условия непрерывности $\widetilde{R}$ для случая тонкой оболочки следует, что гиперповерхность в Ω^+ области определяется соотношением: $\widetilde{R} = 2$.

Условия Лихнеровича (4.28,4.29) при $\widetilde{R}(0,\tau) = 2$, соответственно:

$$\Delta|_{\Sigma_0} = -\varepsilon\, \dot{\rho}^2 - \frac{C_0 - 16}{6\, \rho^2} \left(\partial_{\widetilde{R}} r^+ \right)^2 = \frac{x^2}{\rho^2} \left(\left(\partial_t r^- \right)^2 - \left(\partial_x r^- \right)^2 \right), \quad (4.30)$$

$$- \rho\, \widetilde{K}|_{\Sigma_0} = \kappa_- \frac{x^2}{\dot{x}} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\sqrt{\dot{x}^2 \rho^2 - \varepsilon\, x^2}}{x^2} \right) = 0\,. \quad (4.31)$$

Уравнения движения для рассматриваемой тонкой оболочки:

$$\kappa_+ \sqrt{\varepsilon \frac{16 - C_0}{6}} = \frac{12\pi\varepsilon}{\alpha_1} \rho^3 S^0_0, \quad S^3_3 = S^2_2 = -\frac{1}{2} S^0_0,$$

из них следует, что

$$\frac{d}{d\tau}\left(\rho^3\, S_0^0\right) = 0\,. \tag{4.32}$$

Этот же результат можно получить из условий консервативности для тензора энергии-импульса сферически-симметричной тонкой оболочки в конформной гравитации (1.63):

$$\frac{1}{\rho^3}\frac{d}{d\tau}\left(S_0^0\,\rho^3\right) - \varepsilon\,[T^{0n}] = 0\,, \tag{4.33}$$

так как $[T^{n0}] = 0$ для сшивки двух вакуумов.

Рассмотрим также двойной слой, разделяющий два вакуума с переменной $\widetilde{R}$:

$$ds^{2\pm} = r^{\pm}(\eta^{\pm}, \widetilde{R}^{\pm})^2 \left(A^{\pm}\, d\eta^{\pm 2} - A^{\pm -1} d\widetilde{R}^{\pm 2} - d\Omega^2\right),$$

$$A^{\pm}(\widetilde{R}^{\pm}) = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^{\pm 3} - 12\widetilde{R}^{\pm} + C_0^{\pm}\right).$$

Выпишем условия Лихнеровича для данной сшивки:

$$[\Delta] = \frac{1}{\rho^2}[A\,(\partial_\eta r)^2 - A^{-1}\left(\partial_{\widetilde{R}} r\right)^2] = 0,$$

$$-\,\rho\,\widetilde{K}|_{\Sigma_0} = \frac{\kappa_+}{\dot{\widetilde{R}}^+}\frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^{+2}\rho^2 - \varepsilon\, A^+}\right) = \frac{\kappa_-}{\dot{\widetilde{R}}^-}\frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^{-2}\rho^2 - \varepsilon\, A^-}\right), \tag{4.34}$$

где $\kappa_\pm$ - знаки $\partial_n \widetilde{R}^{\pm}(0{,}\tau)$.

Уравнения движения для двойного слоя, разделяющего два вакуума с переменной $\widetilde{R}$:

$$\widetilde{R}^+ - \widetilde{R}^- = \frac{C}{\rho},$$

$$-\frac{C\,\kappa_+}{\rho^2\dot{\widetilde{R}}^+}\frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^{+2}\rho^2 - \varepsilon\, A^+}\right) = -\frac{12\pi}{\alpha_1}\,\rho^2\,\varepsilon S_n^n\,.$$

Перейдем к сценарию тонкой оболочки для тех же $\Omega^{\pm}$. В силу дополнительных соотношений (4.20): $\widetilde{R}^+ = \widetilde{R}^- = \widetilde{R}$. Соответственно, условия Лихнеровича сводятся к следующим соотношениям:

$$[A\,(\partial_\eta r)^2 - A^{-1}\left(\partial_{\widetilde{R}} r\right)^2] = 0,$$

$$[\partial_n \widetilde{R}] = \kappa_+ \sqrt{\dot{\widetilde{R}}^{+2} - \frac{\varepsilon}{\rho^2} A^+} - \kappa_- \sqrt{\dot{\widetilde{R}}^{-2} - \frac{\varepsilon}{\rho^2} A^-} = \frac{C_1}{\rho},$$

где C_1 - произвольная константа.

Уравнения движения для тонкой оболочки, разделяющей два вакуума с переменной $\widetilde{R}$:

$$C_1 \frac{\alpha_1}{12\pi\varepsilon} = \rho^3 S_0^0, \quad S_3^3 = S_2^2 = -\frac{1}{2} S_0^0.$$

Таким образом, для данного случая также выполняется соотношение (4.32), так как он тоже относится к сшивке двух вакуумных сферически-симметричных решений конформной гравитации.

Далее, перейдем к исследованию сферически-симметричных времениподобных и пространственноподобных сингулярных гиперповерхностей, которые представляют из себя аналоги для конформной гравитации таких физических моделей, как горение вакуума [40; 41], фазовый переход [88], коллапс сферически-симметричной тонкой оболочки. При этом, как уже было указано ранее, в качестве $\Omega^{\pm}$ рассматриваются решения сферически-симметричной конформной гравитации, полученные в работе [49], а именно, использованы различные вакуумы и решения типа Вайдья.

4.4.2 Фазовый переход в вакууме

Рассмотрим сшивку с помощью двойного слоя пространства-времени Фридмана-Робертсона-Уокера в качестве Ω^+ и геометрии Шварцшильда в качестве Ω^-:

$$ds^{2-} = f(r)(dt^-)^2 - f^{-1}(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad f(r) = 1 - \frac{r_g}{r},$$

$$ds^{2+} = dt^2 - \frac{a(t)^2}{1-kx^2} dx^2 - a(t)^2 x^2 d\Omega^2.$$

Заметим, что для метрики Шварцшильда выполняется соотношение: $\widetilde{R}^- = 2 - \frac{6\, r_g}{r}$, из которого следует, что её невозможно сшить с вакуумом с $\widetilde{R} = 2$, которым является метрика Фридмана-Робертсона-Уокера, тонкой оболочкой. Для этого типа сингулярной гиперповерхности $[\widetilde{R}] = 0$, что означает $r = +\infty$ на Σ_0.

Так как здесь рассматривается двойной слой, описывающий фазовый переход в вакууме, то Σ_0 - пространственноподобная гиперповерхность, т.е. $\varepsilon = 1$. Эта модель может интерпретироваться как образование новой Вселенной под горизонтом черной дыры. В частности, в работе [89] показано, что S-брана, которая возникает под горизонтом черной дыры, когда тензор Вейля достигает струнного масштаба, описывает гиперповерхность перехода между внутренней частью черной дыры и началом новой Вселенной. В общем случае, S-брана и сингулярная гиперповерхность - различные физические модели, но для данного примера между ними можно провести аналогию, как минимум, на уровне действия.

Для рассматриваемого двойного слоя удобно представить условия Лихнеровича в следующей форме:

$$\left(-\widetilde{K} + \frac{\partial_n r}{r}\right)|_{\Sigma_0} = \frac{\partial_n \gamma_{00}}{2\,\gamma_{00}}|_{\Sigma_0} = \frac{\kappa_+}{a\,\dot{t}}\,\frac{d}{d\tau}\left(a\sqrt{1+\dot{t}^2}\right) = \frac{\kappa}{\dot{\rho}}\frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{-1+\frac{r_g}{\rho}+\dot{\rho}^2}\right)\,,$$

$$\Delta = x^2\,(\partial_t a)^2 + k\,x^2 - 1 = -1 + \frac{r_g}{\rho},$$

где κ_+ и κ - знаки $\partial_n t(0,\tau)$ и $\partial_n r(0,\tau)$ соответственно.

Последнее соотношение определяет уравнение гиперповерхности в Ω^+ области:

$$a(t)\,x = \rho(t) = \left(\frac{r_g\,a(t)^2}{(\partial_t a(t))^2 + k}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Для метрики Шварцшильда в нормальной гауссовой системе координат имеем:

$$\widetilde{K} = -\kappa\frac{\rho}{\dot{\rho}}\,\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\rho}\sqrt{\dot{\rho}^2 - 1 + \frac{r_g}{\rho}}\right),$$

эта формула полностью согласуется с (4.29), так как пространство-время Шварцшильда - частный случай вакуума с переменной $\widetilde{R}$, для которого $C = -6r_g$, $C_0 = 16$.

Уравнения движения для сшивки рассматриваемых метрик:

$$\kappa\frac{r_g}{\dot{\rho}}\,\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\rho}\sqrt{\dot{\rho}^2 - 1 + \frac{r_g}{\rho}}\right) = \frac{2\pi}{\alpha_1}\,\rho^2\,S^n_n\,,$$

$$S^{n0} = 0.$$

Так как одной из возможных интерпретаций данной модели является образование новой Вселенной под горизонтом черной дыры, то логично предположить, что Σ_0 должна быть однородной и изотропной по пространственным координатам. Соответственно, учитывая тот факт, что рассматривается пространственноподобная гиперповерхность, имеет смысл требовать постоянной двумерной скалярной кривизны по обе стороны Σ_0: $\widetilde{R}^{\pm} = const$.

Для метрики Шварцшильда из условия $\widetilde{R}^{+} = const$ следует, что радиус является постоянным на гиперповерхности, т.е. Σ_0 в $\Omega^{\pm}$-областях задана соотношением: $r = \rho_0 = const$. Как уже было отмечено ранее, $\rho_0 < r_g$, сшивка происходит под горизонтом. Это условие также связано с тем, что рассматриваемая гиперповерхность является пространственноподобной, а r - времениподобная координата под горизонтом.

Для $\Omega^{\pm}$ нормированное уравнение гиперповерхности постоянного радиуса:

$$n^{-}(r) = \kappa \frac{r - \rho_0}{\sqrt{|\Delta^{-}|}} = 0\,,$$

$$n^{+}(t,x) = \kappa^{+} \frac{a(t)x - \rho_0}{\sqrt{|\Delta^{+}|}} = 0\,.$$

Выпишем условия Лихнеровича для частного случая $\rho = \rho_0$:

$$\frac{\kappa_{+}}{a\,\dot{t}}\,\frac{d}{d\tau}\left(a\sqrt{1+\dot{t}^2}\right) = -\kappa \frac{r_g}{2\rho_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{r_g - \rho_0}}\,,$$

$$\frac{1}{a^2}\left(\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + k\right) = \frac{r_g}{\rho_0^3},$$

из последнего уравнения находим функцию $a(t)$ на Σ_0:

$$a(t) = a_0\, exp\left\{\pm\sqrt{\frac{r_g}{\rho_0^3}}\,t\right\},\quad k = 0,$$

$$a(t) = \sqrt{\frac{\rho_0^3}{r_g}}\,ch\left\{\sqrt{\frac{r_g}{\rho_0^3}}\,t + arch\left(\sqrt{\frac{r_g}{\rho_0^3}}\,a_0\right)\right\},\quad k = 1,$$

$$a(t) = \sqrt{\frac{\rho_0^3}{r_g}}\,sh\left\{\pm\sqrt{\frac{r_g}{\rho_0^3}}\,t + arsh\left(\sqrt{\frac{r_g}{\rho_0^3}}\,a_0\right)\right\},\quad k = -1. \quad (4.35)$$

Эти решения описывают метрику де Ситтера, но они, строго говоря, не относятся ко всей области Ω^+, так как условия Лихнеровича выполняются только непосредственно на гиперповерхности.

Если же с самого начала рассмотреть в качестве Ω^+ метрику де Ситтера, то из непрерывности инварианта Δ:

$$\Delta|_{\Sigma_0} = \frac{r_g}{\rho} - 1 = \frac{\rho^2}{\alpha^2} - 1\,,$$

автоматически следует, что единственно возможный вариант сшивки - гиперповерхность постоянного радиуса: $r = \rho_0 = \sqrt[3]{r_g\,\alpha^2}$. Здесь α - космологический горизонт метрики де Ситтера, который связан с космологической постоянной, в четырехмерном случае: $\Lambda = \frac{3}{\alpha^2}$.

Перейдем к уравнениям движения для гиперповерхности постоянного радиуса $\rho = \rho_0$:

$$-\kappa \frac{r_g}{2\,\rho_0^4} \frac{3r_g - 2\rho_0}{\sqrt{\rho_0\,(r_g - \rho_0)}} = \frac{2\pi}{\alpha_1}\;S^{nn}, \quad S^{n0} = 0.$$

В случае пространственноподобной гиперповерхности S^{nn} играет роль плотности энергии. Для того, чтобы она была положительна, необходимо: $-\kappa\,\alpha_1 > 0$.

4.4.3 Горение вакуума

Исследуем времениподобный ($\varepsilon = -1$) двойной слой, разделяющий пространство-время де Ситтера:

$$ds^{2+} = f(r)dt^2 - f^{-1}(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2\,, \quad f(r) = 1 - \frac{r^2}{\alpha^2},$$

и решение типа Вайдья:

$$ds^{2-} = (r^-(v,\widetilde{R}))^2\left(A(v,\widetilde{R})\,dv^2 - 2dv\,d\widetilde{R} - d\Omega^2\right),$$

$$A(v,\widetilde{R}) = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^3 - 12\widetilde{R} + C_0(v)\right).$$

Рассмотрим сингулярную гиперповерхность особого вида, впервые открытую и исследованную в работах [40; 41] для общей теории относительности. Подобные гиперповерхности описывают так называемое «горение вакуума». В этом случае стенка пузыря - сферически-симметричной времениподобной гиперповерхности, не несет энергии, т.е. $S_0^0 = 0$, но поверхностное натяжение $S_2^2 = S_3^3$ ненулевое. В отличии от общей теории относительности, для сингулярной гиперповерхности в конформной гравитации компоненты S_n^n и S^{n0} также ненулевые даже для модели «горение вакуума». Более того, так как для конформной гравитации след поверхностного тензора энергии-импульса равен нулю, существует связь меджу поверхностным натяжением и «внешним давлением»:

$$S_2^2 = S_3^3 = -\frac{1}{2} S_n^n.$$

Внутренняя область пузыря заполнена некоторой материей, созданной из высвободившейся вокруг нее энергии вакуума. В ссылках, цитируемых выше, это идеальная жидкость, здесь ее можно интерпретировать как излучение в силу того, что рассматривается аналог метрики Вайдья.

Выпишем условия Лихнеровича (4.16) для данного случая, воспользовавшись формулами перехода от исходных координат $\{t,r\}$, $\{v,\widetilde{R}\}$ в $\Omega^{\pm}$ к нормальным гауссовым $\{n,\tau\}$:

$$\widetilde{K}|_{\Sigma_0} = \frac{1}{4}\left(\widetilde{R}^2 - 4\right)\dot{v} + \frac{d}{d\tau}\left\{ln\left(\rho\,\dot{v}\right)\right\} = -\frac{\rho}{\dot{\rho}}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{\alpha^2} + \dot{\rho}^2}}{\rho}\right), \tag{4.36}$$

$$\Delta|_{\Sigma_0} = -\frac{\partial_{\widetilde{R}} r^-}{\rho^2}\left(2\,\partial_v r^- + A\,\partial_{\widetilde{R}} r^-\right) = -1 + \frac{\rho^2}{\alpha^2}\,. \tag{4.37}$$

Подставляя полученное выражение для $\widetilde{K}$ в уравнения движения (4.21,4.22), получим:

$$\frac{1}{\dot{\rho}}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{\alpha^2} + \dot{\rho}^2}}{\rho}\right)\left(2 - \widetilde{R}\right) = \frac{12\pi}{\alpha_1}\,\rho\, S_n^n\,, \tag{4.38}$$

$$\dot{\rho}\left(2 - \widetilde{R}\right) - \rho\,\dot{\widetilde{R}} = \frac{12\pi\rho^3}{\alpha_1} S^{n0}, \quad S^{n2} = S^{n3} = 0. \tag{4.39}$$

Найти общее решение подобной системы достаточно сложно, поэтому ограничимся частным случаем: $\rho = \rho_0 = const$. При этом $\rho_0 < \alpha$, так как только тогда гиперповерхность $r = const$ может быть времениподобной в Ω^+. Нормированные уравнения гиперповерхности в областях $\Omega^\pm$:

$$n^-(v,\widetilde{R}) = \frac{r^- - \rho_0}{\sqrt{|\frac{\partial_{\widetilde{R}} r^-}{(r^-)^2}\left(2\,\partial_v r^- + A\,\partial_{\widetilde{R}} r^-\right)|}} = \frac{r^- - \rho_0}{\sqrt{|\Delta^-|}} = 0\,,$$

$$n^+(r) = \frac{r - \rho_0}{\sqrt{|1 - \frac{r^2}{\alpha^2}|}} = \frac{r - \rho_0}{\sqrt{|\Delta^+|}} = 0\,.$$

Перепишем условия Лихнеровича (4.36,4.37) для частного случая $r = const$:

$$\dot{y} + \frac{\alpha}{\rho_0\sqrt{\alpha^2 - \rho_0^2}}\,y = \frac{1}{4}\left(\widetilde{R}^2 - 4\right)\,, \quad y = \frac{1}{\dot{v}}\,, \tag{4.40}$$

$$\Delta|_{\Sigma_0} = -\frac{\partial_{\widetilde{R}} r^-}{\rho_0^2}\left(2\,\partial_v r^- + A\,\partial_{\widetilde{R}} r^-\right) = -1 + \frac{\rho_0^2}{\alpha^2}\,. \tag{4.41}$$

Уравнения движения для рассматриваемого двойного слоя постоянного радиуса:

$$\frac{\alpha}{\rho_0^2\sqrt{\alpha^2 - \rho_0^2}}\left(\widetilde{R} - 2\right) = \frac{12\pi}{\alpha_1}\,\rho_0\,S^n_n\,, \tag{4.42}$$

$$\dot{\widetilde{R}} = -\frac{12\pi\rho_0^2}{\alpha_1}S^{n0}, \quad S^{n2} = S^{n3} = 0. \tag{4.43}$$

Заметим, что для метрики де Ситтера наблюдатель, находящийся на постоянном радиусе - так называемый «наблюдатель Кодамы» [90] , как отмечено в статье [91], «чувствует» постоянную локальную температуру:

$$T_{loc} = \frac{T_H}{\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\alpha^2}}} = \frac{\sqrt{a^2 + \frac{1}{\alpha^2}}}{2\pi}\,,$$

где $T_H = \frac{1}{2\pi\alpha}$ - температура Хокинга для пространства-времени де Ситтера, $a^2 = a^c\,a_c = -\frac{\rho_0^2}{\alpha^2(\alpha^2 - \rho_0^2)}$ - квадрат ускорения для траектории $r = \rho_0$.

Так как «внешний поток» связан с излучением, то можно предположить, что постоянство локальной температуры в Ω^+ для наблюдателя, находящегося на гиперповерхности, связано с постоянством S^{n0}. В этом случае из уравнения

(4.43) следует, что двумерная скалярная кривизна Ω^- на Σ_0 линейно зависит от собственного времени τ:

$$\widetilde{R}(0,\tau) = -\frac{12\pi\,\rho_0^2}{\alpha_1}\,S^{n0}\,\tau + \widetilde{R}_0\,, \quad \widetilde{R}_0 = \widetilde{R}(0,0)\,. \tag{4.44}$$

Таким образом, получается гиперповерхность, для которой радиус не меняется, но двумерная скалярная кривизна со стороны Ω^- линейно растет или падает. Здесь можно провести аналогию с полузамкнутыми мирами, которые впервые были исследованы О.Клейном (1961), а также И.Д. Новиковым и Я.Б. Зельдовичем (1962).

Воспользовавшись (4.44), преобразуем уравнение, полученное из условия непрерывности $\widetilde{K}$:

$$-\frac{12\pi\,\rho_0^2}{\alpha_1}\,S^{n0}\,\frac{dy}{d\widetilde{R}} + \frac{\alpha}{\rho_0\sqrt{\alpha^2-\rho_0^2}}\,y = \frac{1}{4}\left(\widetilde{R}^2 - 4\right),$$

для него можно получить общее решение:

$$y(\tau) = \frac{1}{\dot{v}(0,\tau)} = C1\,exp\left\{\frac{\alpha\,\alpha_1}{12\pi\,\rho_0^3\,S^{n0}\,\sqrt{\alpha^2-\rho_0^2}}\,\widetilde{R}\right\} +$$
$$+\frac{\rho_0\sqrt{\alpha^2-\rho_0^2}}{\alpha}\left\{\frac{1}{4}\,\widetilde{R}^2 + \frac{6\pi\,\rho_0^3\sqrt{\alpha^2-\rho_0^2}}{\alpha_1\,\alpha}S^{n0}\,\widetilde{R} + \frac{72\,\pi^2\rho_0^6\,(\alpha^2-\rho_0^2)}{\alpha_1^2\,\alpha^2}\left(S^{n0}\right)^2 - 1\right\}, \tag{4.45}$$

где $C1$ - константа, зависящая от начальных условий.

Следствием стандартных соотношений замены координат при переходе к гауссовой нормальной системе координат в Ω^- является связь: $\widetilde{\gamma}_{00} = \dot{v}\,(A\,\dot{v} - 2\,\dot{\widetilde{R}})$. Кроме того, для случая $\rho(\tau) = \rho_0$ верно следующее: $\widetilde{\gamma}_{00}|_{\Sigma_0} = \frac{1}{\rho_0^2}$. С учетом всех вышеперечисленных соотношений, можно выразить функцию $C_0(v)$ на Σ_0 через найденные ранее величины:

$$C_0(\tau) = C_0(v(0,\tau)) = 12\,\dot{\widetilde{R}}\,y + 6\,\frac{y^2}{\rho_0^2} - \widetilde{R}^3 + 12\,\widetilde{R}\,.$$

Что касается сшивки тех же геометрий с помощью времениподобной тонкой оболочки, то в отличии от общей теории относительности, для сферически-симметричной конформной гравитации никакая времениподобная тонкая оболочка не может описывать модель «горения вакуума», так как существует связь: $S^3_3 = S^2_2 = -\frac{1}{2}S^0_0$.

4.4.4 Фазовый переход

Исследуем пространственноподобный двойной слой ($\varepsilon = 1$), который описывает фазовый переход от пространства-времени Шварцшильда к решению типа Вайдья:

$$ds^{2-} = f(r)dt^2 - f^{-1}(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad f = 1 - \frac{r_g}{r},$$

$$ds^{2+} = \left(r^+(v,\widetilde{R})\right)^2 \left(A(v,\widetilde{R})\, dv^2 - 2dv\, d\widetilde{R} - d\Omega^2\right),$$

$$A(v,\widetilde{R}) = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^3 - 12\widetilde{R} + C_0(v)\right).$$

Запишем условия Лихнеровича для этой сшивки:

$$-\widetilde{K}|_{\Sigma_0} = \frac{1}{4}\left(\widetilde{R}^2 - 4\right)\dot{v} + \frac{d}{d\tau}\left\{ln\left(\rho\,\dot{v}\right)\right\} = -\frac{\rho}{\dot{\rho}}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\rho}\sqrt{\dot{\rho}^2 - 1 + \frac{r_g}{\rho}}\right), \quad (4.46)$$

$$\Delta|_{\Sigma_0} = -\frac{\partial_{\widetilde{R}} r^+}{\rho^2}\left(A\,\partial_{\widetilde{R}} r^+ + 2\,\partial_v r^+\right) = -1 + \frac{r_g}{\rho}\,. \quad (4.47)$$

Уравнения движения для рассматриваемого двойного слоя:

$$\frac{\rho}{\dot{\rho}}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\rho}\sqrt{\dot{\rho}^2 - 1 + \frac{r_g}{\rho}}\right)\left(2 - \frac{6\,r_g}{\rho} - \widetilde{R}\right) = -\frac{12\pi}{\alpha_1}\,\rho^2\,S^n_n\,, \quad (4.48)$$

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\rho\left(\widetilde{R} - 2\right)\right\} = \frac{12\pi\rho^3}{\alpha_1}\,S^{n0}\,. \quad (4.49)$$

Если данная модель, аналогично разобранному выше примеру фазового перехода в вакууме, представляет из себя фазовый переход к новой Вселенной под горизонтом, то в силу изотропии двумерная скалярная кривизна должна быть постоянна по обе стороны Σ_0:

$$\widetilde{R}^{-}|_{\Sigma_0} = 2 - \frac{6r_g}{\rho_0} = const, \quad \widetilde{R} = \widetilde{R}_0 = const,$$

откуда следует, что радиус - константа на Σ_0: $\rho = \rho_0 < r_g$, так как он является непрерывным инвариантом для сферически-симметричной задачи.

Нормированные уравнения гиперповерхности в $\Omega^{\pm}$ для случая постоянного радиуса:

$$n^{\pm} = \frac{\rho_0 - r}{\sqrt{|\Delta^{\pm}|}} = 0\,.$$

Подставляя соотношение $\rho = \rho_0$ в условия Лихнеровича (4.46,4.47) и уравнения движения (4.48,4.49), получим:

$$\dot{y} + \frac{\frac{3}{2}\,r_g - \rho_0}{\rho_0^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{r_g - \rho_0}}\,y = \frac{1}{4}\left(\widetilde{R}_0^2 - 4\right), \quad y = \frac{1}{\dot{v}},$$

$$\frac{\frac{3}{2}\,r_g - \rho_0}{\rho_0^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{r_g - \rho_0}}\left(-2 + \frac{6\,r_g}{\rho_0} + \widetilde{R}_0\right) = \frac{12\pi}{\alpha_1}\,\rho_0^2\,S^{nn}\,, \quad S^{n0} = 0.$$

Для пространственноподобной гиперповерхности S^{nn} интерпретируется как поверхностная плотность энергии. Из уравнений движения следует, что она неотрицательна, если верно следующее:

$$\widetilde{R}_0 \geq 2 - \frac{6\,r_g}{\rho_0}.$$

Для сшивки рассматриваемых метрик также возможен аналог «горения вакуума», для которого $S_n^n = S^{nn} = 0$, но он соответствует пространственноподобной тонкой оболочке, разобранной далее.

Как было отмечено выше, для решения типа Вайдья можно выразить функцию $C_0(v)$ на Σ_0 через y и $\widetilde{R}$:

$$\widetilde{\gamma}_{00} = \dot{v}\left(A\,\dot{v} - 2\,\dot{\widetilde{R}}\right), \quad \widetilde{\gamma}_{00}(0,\tau) = -\frac{1}{\rho^2} \Rightarrow$$

$$C_0(v(0,\tau)) = C_0(\tau) = 12\,\dot{\widetilde{R}}\,y - 6\,\frac{y^2}{\rho_0^2} - \widetilde{R}^3 + 12\,\widetilde{R},$$

откуда, учитывая полученные выше результаты, получаем:

$$C_0(\tau) = -\frac{6}{\rho_0^2}\left\{\left(y_0 - \frac{1}{4\lambda}\left(\widetilde{R}_0^2 - 4\right)\right)e^{-\lambda\tau} + \frac{1}{4\lambda}\left(\widetilde{R}_0^2 - 4\right)\right\}^2 - \widetilde{R}_0^3 + 12\,\widetilde{R}_0,$$
$$\lambda = \frac{\frac{3}{2}\,r_g - \rho_0}{\rho_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{r_g - \rho_0}}, \quad \widetilde{R}_0 = \widetilde{R}(0{,}0), \quad y_0 = \frac{1}{\dot{v}(0{,}0)}, \quad (4.50)$$

т.е. $C_0(\tau)$ стремится к константе при $\tau \to \infty$.

Рассмотрим сшивку решений, представленных выше, с помощью пространственноподобной тонкой оболочки. В силу непрерывности двумерной скалярной кривизны для этого типа сингулярных гиперповерхностей:

$$\widetilde{R}|_{\Sigma_0} = \widetilde{R}^-|_{\Sigma_0} = 2 - \frac{6\,r_g}{\rho},$$

подставляя это соотношение в (4.46), получим:

$$-\widetilde{K}|_{\Sigma_0} = \left(\frac{3}{2}r_g - \rho\right)\frac{6r_g}{\rho^2}\,\dot{v} + \frac{\ddot{v}}{\dot{v}} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{\rho}{\dot{\rho}}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{-1 + \frac{r_g}{\rho} + \dot{\rho}^2}}{\rho}\right). \quad (4.51)$$

Аналогичным образом используем непрерывность $\widetilde{R}$ для того, чтобы уменьшить количество неизвестных функций в уравнениях движения тонкой оболочки:

$$[\partial_n \widetilde{R}] = \sqrt{-1 + \frac{r_g}{\rho} + \dot{\rho}^2} + \frac{\kappa_+}{\rho}\sqrt{\dot{\rho}^2\,\rho^2 - \frac{\rho^4}{36\,r_g^2}A} = \frac{2\pi\,\rho^4}{\alpha_1\,r_g}S_0^0, \quad S_3^3 = S_2^2 = -\frac{1}{2}S_0^0, \quad (4.52)$$

где κ_+ - знак $\partial_n\widetilde{R}(0{,}\tau)$.

Из условия изотропности на гиперповерхности следует, что $\rho = \rho_0 = const$, соответственно, для постоянного радиуса из (4.51,4.52) получаем следующую систему уравнений:

$$\dot{y} + \frac{\frac{3}{2}\,r_g - \rho_0}{\rho_0^2\sqrt{\frac{r_g}{\rho_0} - 1}}\,y = \left(\frac{3}{2}r_g - \rho_0\right)\frac{6r_g}{\rho_0^2}, \quad y = \frac{1}{\dot{v}},$$

$$\frac{\alpha_1\,r_g}{2\pi\,\rho_0^4}\left(\sqrt{-1 + \frac{r_g}{\rho_0}} + \kappa_+\,\frac{|y|}{6r_g}\right) = S_0^0, \quad S_3^3 = S_2^2 = -\frac{1}{2}S_0^0.$$

Здесь используется соотношение: $-A = \frac{y^2}{\rho_0^2}$, которое является следствием формул перехода в Ω^+ от координат $\{v,\widetilde{R}\}$ к гауссовым нормальным для частного случая $\rho = const$.

С учетом всего вышеперечисленного, общее решение представленной выше системы уравнений:

$$y = 6r_g\sqrt{-1+\frac{r_g}{\rho_0}} + \left(y_0 - 6r_g\sqrt{-1+\frac{r_g}{\rho_0}}\right) exp\left\{-\frac{\frac{3}{2}\,r_g - \rho_0}{\rho_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{r_g-\rho_0}}\,\tau\right\},$$

$$\kappa_+\,\frac{\alpha_1\,r_g}{2\pi\,\rho_0^4}\left|\sqrt{-1+\frac{r_g}{\rho_0}} + \left(\frac{y_0}{6r_g} - \sqrt{-1+\frac{r_g}{\rho_0}}\right) exp\left\{-\frac{\frac{3}{2}\,r_g - \rho_0}{\rho_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{r_g-\rho_0}}\,\tau\right\}\right| + \\ + \frac{\alpha_1\,r_g}{2\pi\,\rho_0^4}\sqrt{-1+\frac{r_g}{\rho_0}} = S_0^0,$$

$$S_3^3 = S_2^2 = -\frac{1}{2}S_0^0,$$

откуда, в частности, следует, что если $\kappa_+ = -1$, то $S_0^0 \to 0$ при $\tau \to +\infty$.

Аналогично предыдущему случаю, для функции $C_0(\tau)$ получаем:

$$C_0(\tau) = -8\left(1-\frac{3\,r_g}{\rho_0}\right)^3 + 24\left(1-\frac{3\,r_g}{\rho_0}\right) - \\ - \frac{6}{\rho_0^2}\left(6r_g\sqrt{-1+\frac{r_g}{\rho_0}} + \left(y_0 - 6r_g\sqrt{-1+\frac{r_g}{\rho_0}}\right) exp\left\{-\frac{\frac{3}{2}\,r_g - \rho_0}{\rho_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{r_g-\rho_0}}\,\tau\right\}\right)^2. \quad (4.53)$$

Так как при выводе этой формулы были использованы только условия Лихнеровича и соотношения перехода к гауссовой нормальной системе координат, очевидно, что она представляет из себя частный случай (4.50) с $\widetilde{R}_0 = 2-\frac{6\,r_g}{\rho_0}$.

4.4.5 Коллапс

Исследуем времениподобный двойной слой, разделяющий вакуум Минковского и метрику типа Вайдья:

$$ds^{2-} = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2,$$

$$ds^{2+} = \left(r^+(u,\widetilde{R})\right)^2 \left(A(u,\widetilde{R})\, du^2 + 2du\, d\widetilde{R} - d\Omega^2\right),$$

$$A(u,\widetilde{R}) = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^3 - 12\widetilde{R} + C_0(u)\right).$$

Выпишем условия Лихнеровича, воспользовавшись формулами перехода от исходных координат $\{u,\widetilde{R}\}$, $\{t,r\}$ в $\Omega^\pm$ к нормальным гауссовым $\{n,\tau\}$:

$$-\widetilde{K}|_{\Sigma_0} = \frac{\rho}{\dot\rho}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{1+\dot\rho^2}}{\rho}\right) = -\frac{\dot\rho}{\rho} - \frac{\ddot u}{\dot u} + \frac{1}{4}\left(\widetilde{R}^2 - 4\right)\dot u\,, \tag{4.54}$$

$$\Delta|_{\Sigma_0} = \frac{\partial_{\widetilde{R}} r^+}{\rho^2}\left(2\,\partial_u r^+ - A\,\partial_{\widetilde{R}} r^+\right) = -1, \tag{4.55}$$

Уравнения движения для двойного слоя, разделяющего вакуум Минковского и метрику типа Вайдья:

$$\frac{\rho}{\dot\rho}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{1+\dot\rho^2}}{\rho}\right)\left(\widetilde{R} - 2\right) = -\frac{12\pi}{\alpha_1}\rho^2 S^n_n\,, \tag{4.56}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\rho\left(\widetilde{R} - 2\right)\right\} = \frac{12\pi\rho^3}{\alpha_1} S^{n0}, \quad S^{n2} = S^{n3} = 0. \tag{4.57}$$

Рассмотрим частный случай - двойной слой, состоящий из пыли, для которого: $S^2_2 = S^3_3 = 0$, $\quad S^0_0 = \frac{M}{4\pi\rho^2}$. Из условия равенства нулю следа поверхностного тензора энергии-импульса следует, что $S^n_n = -S^0_0 = -\frac{M}{4\pi\rho^2}$. Подставляя это выражение в уравнения движения (4.56,4.57), получим:

$$\frac{\rho}{\dot\rho}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{1+\dot\rho^2}}{\rho}\right)\left(\widetilde{R} - 2\right) = \frac{3M}{\alpha_1},$$

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\rho\left(\widetilde{R}-2\right)\right\} = \frac{12\pi\rho^3}{\alpha_1}S^{n0}, \quad S^{n2} = S^{n3} = 0.$$

Выразив из первого уравнения функцию $\rho\left(\widetilde{R}-2\right)$, можно свести систему к одному уравнению:

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\dot{\rho}\left(\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{1+\dot{\rho}^2}}{\rho}\right)\right)^{-1}\right\} = \frac{4\pi\rho^3}{M}S^{n0}.$$

Если $S^{n0} \propto \frac{1}{\rho^2}$, существует решение: $\rho(\tau) = \rho_0 + \omega\,\tau$, $\omega = \pm\left\{4\left(\frac{S^{nn}}{S^{n0}}\right)^2 - 1\right\}^{-\frac{1}{2}}$. В этом случае возникает определенное ограничение на соотношение между «внешним давлением» и «внешним потоком» : $\left|\frac{S^{n0}}{S^{nn}}\right| < 2$.

Двумерная скалярная кривизна на гиперповерхности со стороны Ω^+ для этого решения:

$$\widetilde{R}(\tau) = 2 - \frac{3M}{\alpha_1}\frac{\rho(\tau)}{\sqrt{1+\omega^2}} = 2 - \frac{3M}{\alpha_1}\frac{\rho_0+\omega\,\tau}{\sqrt{1+\omega^2}}.$$

Если $\omega < 0$, то радиус падает до нуля за конечное собственное время $\tau_1 = -\frac{\rho_0}{\omega}$, а $\widetilde{R}$ стремится к 2, что означает исчезновение двойного слоя.

Подставляя полученное выше выражение для $\rho(\tau)$ в уравнение (4.54), находим:

$$\frac{1}{\dot{u}} = \rho^2(\tau)\,\frac{3M}{2\alpha_1\sqrt{1+\omega^2}}\left\{\frac{2}{\omega+\sqrt{1+\omega^2}} - \frac{3M}{2\alpha_1\sqrt{1+\omega^2}}\frac{\rho(\tau)}{2\omega+\sqrt{1+\omega^2}}\right\},$$

При переходе к гауссовым нормальным координатам для исходящей метрики типа Вайдья выполняется соотношение: $\widetilde{\gamma}_{00} = \dot{u}\left(A\,\dot{u} + 2\dot{\widetilde{R}}\right)$, с помощью которого можно выразить $C_0(\tau)$ через найденные выше функции:

$$C_0(u(0,\tau)) = C_0(\tau) = \frac{6}{\dot{u}^2\rho^2} - \frac{12}{\dot{u}}\dot{\widetilde{R}} + 12\widetilde{R} - \widetilde{R}^3,$$

откуда, с учетом полученных результатов, получим:

$$C_0(\tau) = \frac{27M^2\,\rho^2}{2\alpha_1^2(1+\omega^2)}\left\{\frac{2}{\omega+\sqrt{1+\omega^2}} - \frac{3M}{2\alpha_1\sqrt{1+\omega^2}}\frac{\rho(\tau)}{2\omega+\sqrt{1+\omega^2}}\right\}^2 + \\ + \frac{54\,M^2\,\rho^2\,\omega}{\alpha_1^2(1+\omega^2)}\left\{\frac{2}{\omega+\sqrt{1+\omega^2}} - \frac{3M}{2\alpha_1\sqrt{1+\omega^2}}\frac{\rho(\tau)}{2\omega+\sqrt{1+\omega^2}}\right\} + \\ + 12\left(2 - \frac{3M}{\alpha_1}\frac{\rho}{\sqrt{1+\omega^2}}\right) - \left(2 - \frac{3M}{\alpha_1}\frac{\rho}{\sqrt{1+\omega^2}}\right)^3. \quad (4.58)$$

Из этой формулы, в частности, следует, что $C_0(\tau) \to 16$ при $\rho \to 0$.

Для представленных выше геометрий рассмотрим сшивку с помощью времениподобной тонкой оболочки. Так как метрика Минковского относится к типу вакуумов сферически-симметричной конформной гравитации с постоянной $\widetilde{R} = 2$, то в силу непрерывности двумерной скалярной кривизны имеем:

$$\widetilde{R}(0,\tau) = \widetilde{R}^-(0,\tau) = 2\,,$$

подставляя это соотношение в (4.54), получим:

$$-\,\widetilde{K}|_{\Sigma_0} = \frac{\rho}{\dot\rho}\,\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sqrt{1+\dot\rho^2}}{\rho}\right) = \frac{1}{2}\frac{\dot C_0}{C_0 - 16}\,. \quad (4.59)$$

Выпишем уравнения движения для рассматриваемой сингулярной гиперповерхности:

$$\kappa_+\sqrt{\frac{1}{6}\,(C_0-16)} = -\frac{12\pi\rho^3}{\alpha_1}S^0_0, \quad S^3_3 = S^2_2 = -\frac{1}{2}S^0_0. \quad (4.60)$$

Выше была использована формула:

$$\partial_n\widetilde{R}(0,\tau) = \kappa_+\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^2 + \frac{A}{\rho^2}}, \quad \kappa_+ = \pm 1\,,$$

которая получается из соотношений перехода для исходящего решения типа Вайдья от координат $\{\widetilde{R},u\}$ к нормальным гауссовым $\{n,\tau\}$.

Необходимо отметить, что из уравнений (4.25) следует, что в сферически-симметричной конформной гравитации не существует тонкой оболочки, состоящей из пыли.

В отличии от сшивки двух вакуумов, здесь $\frac{d}{d\tau}\left(\rho^3\, S_0^0\right) \neq 0$. Покажем, что из уравнений движения, как и в случае вакуумной тонкой оболочки, следует (4.33).

Для исходящего решения типа Вайдья единственная ненулевая компонента тензора энергии-импульса: $T_{uu} = \frac{\alpha_1}{144\,\pi r^2}\frac{d}{du} C_0(u)$. При переходе к координатам $\{n,\tau\}$ получим: $T_{0n} = \dot{u}\, u'\, T_{uu}$, откуда в свою очередь следует:

$$T^{0n}(0,\tau) = -\dot{u}\, u'\, T_{uu} = \frac{\alpha_1}{144\,\pi}\frac{\dot{C}_0}{A\,\rho^2}\left(-\dot{\tilde{R}} + \kappa_1\sqrt{\dot{\tilde{R}}^2 + \frac{A}{\rho^2}}\right) = \frac{\kappa_1\,\alpha_1}{144\,\pi}\frac{\sqrt{6}\,\dot{C}_0}{\sqrt{C_0 - 16\,\rho^3}}\,.$$

Таким образом, несложно убедиться, что выполняется равенство (4.33).

Заключение

В настоящей диссертации были изучены сингулярные гиперповерхности произвольного типа в квадратичной гравитации, были разобраны как общие теоретические проблемы этой тематики, так и их применение для конкретных физических моделей.

Показано, что не только для времениподобных и пространственноподобных сингулярных гиперповерхностей [32], но и для светоподобных сингулярных гиперповерхностей как в общей теории относительности, так и в квадратичной гравитации уравнения поля могут быть получены исключительно за счет принципа наименьшего действия.

Комбинации коэффициентов β_1, β_2, присутствующие в уравнениях движения сингулярной гиперповерхности самого общего типа в квадратичной гравитации, равны нулю для квадратичного слагаемого Гаусса-Бонне. Это означает, что для данного частного случая не существует ни двойных слоев, ни тонких оболочек, если выполняются условия Лихнеровича.

В наиболее общем виде сингулярная гиперповерхность в квадратичной гравитации представляет из себя двойной слой, частным случаем являются тонкие оболочки. Для времениподобного и пространственноподобного случаев критерием того, что гиперповерхность представляет из себя тонкую оболочку является отсутствие скачков в тензоре Риччи на гиперповерхности, для светоподобного - непрерывность скалярной кривизны. Из равенства нулю соответствующих скачков для любого типа гиперповерхностей автоматически следует, что «внешнее давление» и «внешний поток» равны нулю.

Для того, чтобы пояснить физический смысл «внешнего давления» и «внешнего потока», которые равны нулю в общей теории относительности, они были получены напрямую из лагранжиана материи. В частности, рассматривался лагранжиан идеальной жидкости с переменным числом частиц. Как оказалось, «внешнее давление» ненулевое даже для модели с постоянным числом частиц. Этот случай наиболее явно раскрывает его физическую интерпретацию, а именно, S^{nn} является поверхностным давлением частиц на Σ_0 для времениподобной гиперповерхности и поверхностной плотностью энергии - пространственноподобной. «Внешний поток» появляется только при добавлении в лагранжиан материи слагаемого, ответственного за рождение частиц, которое в отсутствии внешних полей пропорционально квадрату тензора Вейля.

Конформная инвариантность слагаемого в действии, ответственного за закон рождения частиц, приводит к ограничениям на инварианты внешних полей, ответственных за процессы рождения, от которых зависит функция Φ. В отсутствии внешних полей, когда единственной причиной рождения является гравитация, квадрат тензора Вейля представляет из себя наиболее базовый вариант.

При введении в закон рождения внешнего скалярного поля выбрана следующая комбинация: $\varphi\,\Box\varphi - \frac{1}{6}\,\varphi^2\,R + \Lambda_0\varphi^4$, где Λ_0 — константа, так как она дает нетривиальное уравнение движения и конформно-инвариантна при умножении на $\sqrt{|g|}$.

При добавлении внешнего скалярного поля в функцию Φ, поверхностная часть закона рождения может в правой части иметь источник, ответственный за процесс рождения, который происходит непосредственно на сингулярной гиперповерхности. При этом само скалярное поле не дает непосредственный вклад в поверхностный тензор энергии-импульса.

При изучении «беременного вакуума» для сферически-симметричных геометрий в рамках данной модели оказалось, что в отсутствии внешних полей в общей теории относительности нет сферически-симметричных вакуумных решений типа черной дыры, соответствующих «беременному вакууму». То же верно и для квадратичной гравитации, если рассматривать статическое пространство-время, где скалярная кривизна достаточно быстро стремится к константе на пространственной бесконечности. Для модели с внешним скалярным полем показано, что по крайне мере в общей теории относительности «беременный вакуум» для сферически-симметричного случая также не соответствует вакуумным решениям типа черной дыры.

Для сферически-симметричных сингулярных гиперповерхностей систему уравнений движения, наряду с условиями Лихнеровича, можно записать с помощью инвариантов сферической геометрии, а именно, радиуса, двумерной скалярной кривизны $\widetilde{R}$, а также инвариантов Δ и σ . В этом случае критерием того, что сингулярная гиперповерхность представляет из себя тонкую оболочку, является непрерывность двумерной скалярной кривизны и инварианта σ.

В качестве приложений исследованы сферически-симметричные времениподобные и пространственноподобные сингулярные гиперповерхности, разделяющие два сферически-симметричных решения конформной гравитации, полученные в работе [49]. В частности, использованы различные вакуумы и решения типа Вайдья. С помощью сшивок соответствующих решений рассмотрены аналоги таких физических моделей, как «горение вакуума», фазовый переход, коллапс сферически-симметричной тонкой оболочки для конформной гравитации.

В отличие от времениподобных и пространственноподобных двойных слоев светоподобный двойной слой в квадратичной гравитации не имеет так называемого «внешнего давления». Кроме того, можно предположить, что светоподобный двойной слой излучает, поскольку для этого типа нулевых сингулярных гиперповерхностей «внешний поток» не может быть равным нулю.

Показано, что для светоподобных сингулярных сферически-симметричных гиперповерхностей в квадратичной гравитации условия Лихнеровича влекут за собой непрерывность скалярной кривизны $[R] = 0$. Это означает, что такая сингулярная гиперповерхность может быть только тонкой оболочкой. С другой стороны, показано, что если светоподобная сингулярная гиперповерхность в квадратичной гравитации с лагранжианом (1.3) без слагаемого Гаусса-Бонне является, как минимум, локально, слоем некоторого светоподобного слоения Ω, то вместо условий Лихнеровича достаточно, чтобы на Σ_0 выполнялись соотношения (3.18). Для сферически-симметричных геометрий эти соотношения выполняются автоматически, поэтому условия Лихнеровича могут быть полностью сняты для светоподобных сингулярных гиперповерхностей. В этой модели существует сферически-симметричный светоподобный двойной слой, который также не имеет «внешнего давления».

В качестве приложений исследованы сферически-симметричные светоподобные тонкие оболочки и двойные слои, разделяющие два сферически-симметричных решения конформной гравитации. А именно, рассматривались сшивки сферически-симметричных вакуумов и решений типа Вайдья.

Для тонких оболочек непрерывность двумерной скалярной кривизны накладывает определенные ограничения на существование сингулярной гиперповерхности, разделяющей два заданных пространства-времени. В результате существует только четыре типа сшивок для рассматриваемых здесь метрик. Первый тип — это сшивка вакуума с постоянной $\widetilde{R}$ и вакуума с переменной $\widetilde{R}$, где Σ_0 оказалось аналогом двойного горизонта в метрике с переменной $\widetilde{R}$. Второй тип — сшивка двух вакуумов с переменной $\widetilde{R}$. Она существует, только если метрики совпадают с точностью до конформного множителя. Третий тип — это сшивка решения типа Вайдья и вакуума с переменной $\widetilde{R}$, где полученная светоподобная тонкая оболочка фактически является сингулярной частью решения типа Вайдья. Четвертый тип — сшивка двух метрик типа Вайдья, она также существует, только если метрики совпадают с точностью до конформного множителя. Отсутствие излучения в последних двух случаях, предположительно, связано с отсутствием «внешнего потока» для тонких оболочек.

Для сферически-симметричного светоподобного двойного слоя в конформной гравитации невозможна только сшивка двух вакуумов с постоянной $\widetilde{R}$. Все остальные комбинации сшивок вакуумных решений и решений типа Вайдья не запрещены.

Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы для изучения физических моделей, при описании которых применяются сингулярные гиперповерхности. Предложенная в данной работе методика обощается на другие теории гравитации, многообразия, размерность которых не равна 4, а также с геометриями, отличными от римановой. В частности, одной из возможных тем для дальнейших исследований является исследование сингулярных гиперповерхностей в гравитации Вейля.

Благодарности

В первую очередь я хочу поблагодарить своего научного руководителя Березина Виктора Александровича за поставленную задачу, помощь и поддержку при написании диссертации. Также я благодарна моей семье, близким друзьям, школьным учителям и преподавателям МФТИ, особенно хотелось бы отметить Ахмедова Эмиля Тофик оглы, с лекций которого начался мой интерес к гравитации.

Список литературы

1. *Davis S.*, *Luckock H.* The Quantum theory of the quadratic gravity action for heterotic strings // Gen. Rel. Grav. — 2002. — т. 34. — с. 1751—1765. — DOI: 10.1023/A:1020736626961. — arXiv: gr-qc/0201002.

2. Aspects of Quadratic Gravity / L. Alvarez-Gaume [и др.] // Fortsch. Phys. — 2016. — т. 64, № 2/3. — с. 176—189. — DOI: 10.1002/prop.201500100. — arXiv: 1505.07657 [hep-th].

3. *Ostrogradsky M.* Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres // Mem. Acad. St. Petersbourg. — 1850. — т. 6, № 4. — с. 385—517.

4. *Bender C. M.*, *Mannheim P. D.* No-ghost theorem for the fourth-order derivative Pais-Uhlenbeck oscillator model // Phys. Rev. Lett. — 2008. — т. 100. — с. 110402. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.110402. — arXiv: 0706.0207 [hep-th].

5. *Bender C. M.*, *Mannheim P. D.* Exactly solvable PT-symmetric Hamiltonian having no Hermitian counterpart // Phys. Rev. D. — 2008. — т. 78. — с. 025022. — DOI: 10.1103/PhysRevD.78.025022. — arXiv: 0804.4190 [hep-th].

6. *Stelle K. S.* Classical Gravity with Higher Derivatives // Gen. Rel. Grav. — 1978. — т. 9. — с. 353—371. — DOI: 10.1007/BF00760427.

7. *Avramidi I. G.*, *Barvinsky A. O.* ASYMPTOTIC FREEDOM IN HIGHER DERIVATIVE QUANTUM GRAVITY // Phys. Lett. B. — 1985. — т. 159. — с. 269—274. — DOI: 10.1016/0370-2693(85)90248-5.

8. *Salvio A.*, *Strumia A.* Agravity up to infinite energy // Eur. Phys. J. C. — 2018. — т. 78, № 2. — с. 124. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-018-5588-4. — arXiv: 1705.03896 [hep-th].

9. *Salvio A.* Quadratic Gravity // Front. in Phys. — 2018. — т. 6. — с. 77. — DOI: 10.3389/fphy.2018.00077. — arXiv: 1804.09944 [hep-th].

10. *Utiyama R., DeWitt B. S.* Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields // J. Math. Phys. — 1962. — т. 3. — с. 608—618. — DOI: 10.1063/1.1724264.

11. *Zel'dovich Y. B.* Partifcle Production in Cosmology // JETP Lett. — 1970. — т. 12, № 9. — с. 307—311.

12. *Grib A. A., Mamaev S. G.* On field theory in the friedman space // Yad. Fiz. — 1969. — т. 10. — с. 1276—1281.

13. *Zel'dovich Y. B., Pitaevskii L.* On the possibility of the creation of particles by a classical gravitational field // Commun.Math. Phys. — 1971. — т. 23. — с. 185—188. — DOI: 10.1007/BF01877740.

14. *Zel'dovich Y. B., Starobinsky A. A.* Particle production and vacuum polarization in an anisotropic gravitational field // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1971. — т. 61. — с. 2161—2175.

15. *Parker L., Fulling S. A.* Quantized matter fields and the avoidance of singularities in general relativity // Phys. Rev. D. — 1973. — т. 7. — с. 2357—2374. — DOI: 10.1103/PhysRevD.7.2357.

16. *Hu B. L., Fulling S. A., Parker L.* Quantized scalar fields in a closed anisotropic universe // Phys. Rev. D. — 1973. — т. 8. — с. 2377—2385. — DOI: 10.1103/PhysRevD.8.2377.

17. *Fulling S. A., Parker L., Hu B. L.* Conformal energy-momentum tensor in curved spacetime: Adiabatic regularization and renormalization // Phys. Rev. D. — 1974. — т. 10. — с. 3905—3924. — DOI: 10.1103/PhysRevD.10.3905.

18. *Fulling S. A., Parker L.* Renormalization in the theory of a quantized scalar field interacting with a robertson-walker spacetime // Annals Phys. — 1974. — т. 87. — с. 176—204. — DOI: 10.1016/0003-4916(74)90451-5.

19. *Lukash V. N., Starobinskii A. A.* The isotropization of the cosmological expansion owing to particle production // Sov. Phys. JETP. — 1974. — т. 39, № 5. — с. 742—747.

20. *Zel'dovich Y. B., Starobinskii A. A.* Rate of particle production in gravitational fields // JETP Lett. — 1977. — т. 26, № 5. — с. 252—255.

21. *Starobinsky A. A.* A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity // Phys. Lett. B. — 1980. — т. 91. — с. 99—102. — DOI: 10.1016/0370-2693(80)90670-X.

22. *'t Hooft G.*, *Veltman M. J. G.* One loop divergencies in the theory of gravitation // Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. A. — 1974. — т. 20. — с. 69—94.

23. *Weinberg S.* Problems in Gauge Field Theories // 17th International Conference on High-Energy Physics. — 1974. — с. 59—65.

24. *Deser S.* The State of Quantum Gravity // Conf. Proc. C. — 1975. — т. 750926. — с. 229—254.

25. *Stelle K. S.* Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity // Phys. Rev. D. — 1977. — т. 16. — с. 953—969. — DOI: 10.1103/PhysRevD.16.953.

26. *Senovilla J. M. M.* Junction conditions for F(R)-gravity and their consequences // Phys. Rev. D. — 2013. — т. 88. — с. 064015. — DOI: 10.1103/PhysRevD.88.064015. — arXiv: 1303.1408 [gr-qc].

27. *Senovilla J. M. M.* Gravitational double layers // Class. Quant. Grav. — 2014. — т. 31. — с. 072002. — DOI: 10.1088/0264-9381/31/7/072002. — arXiv: 1402.1139 [gr-qc].

28. *Senovilla J. M. M.* Double layers in gravity theories // J. Phys. Conf. Ser. — 2015. — т. 600, № 1. — с. 012004. — DOI: 10.1088/1742-6596/600/1/012004. — arXiv: 1410.5650 [gr-qc].

29. *Reina B.*, *Senovilla J. M. M.*, *Vera R.* Junction conditions in quadratic gravity: thin shells and double layers // Class. Quant. Grav. — 2016. — т. 33, № 10. — с. 105008. — DOI: 10.1088/0264-9381/33/10/105008. — arXiv: 1510.05515 [gr-qc].

30. *Eiroa E. F.*, *Figueroa Aguirre G.*, *Senovilla J. M. M.* Pure double-layer bubbles in quadratic F(R) gravity // Phys. Rev. D. — 2017. — т. 95, № 12. — с. 124021. — DOI: 10.1103/PhysRevD.95.124021. — arXiv: 1704.00698 [gr-qc].

31. *Senovilla J. M. M.* Equations for general shells // JHEP. — 2018. — т. 11. — с. 134. — DOI: 10.1007/JHEP11(2018)134. — arXiv: 1805.03582 [gr-qc].

32. Double layer from least action principle / V. A. Berezin [и др.] // Class. Quant. Grav. — 2021. — т. 38, № 4. — с. 045014. — DOI: 10.1088/1361-6382/abd143. — arXiv: 2008.01813 [gr-qc].

33. *Berezin V. A.* Unusual hydrodynamics // Int. J. Mod. Phys. A. — 1987. — т. 2. — с. 1591—1615. — DOI: 10.1142/S0217751X87000831.

34. *Berezin V. A.*, *Dokuchaev V. I.* Weyl cosmology // Int. J. Mod. Phys. A. — 2022. — т. 37, 20n21. — с. 2243005. — DOI: 10.1142/S0217751X22430059. — arXiv: 2203.04257 [gr-qc].

35. *Israel W.* Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity // Nuovo Cim. B. — 1966. — т. 44. — с. 1—14. — DOI: 10.1007/BF02710419.

36. *Israel W.* Gravitational collapse of a radiating star // Physics Letters A. — 1967. — т. 24, № 3. — с. 184—186. — DOI: 10.1016/0375-9601(67)90756-6.

37. *Cruz V. de la*, *Israel W.* Gravitational bounce // Il Nuovo Cim. A. — 1967. — т. 51. — с. 744—760. — DOI: 10.1007/BF02721742.

38. *Clarke C. J. S.*, *Dray T.* Junction conditions for null hypersurfaces // Classical and Quantum Gravity. — 1987. — т. 4, № 2. — с. 265. — DOI: 10.1088/0264-9381/4/2/010.

39. *Barrabes C.*, *Israel W.* Thin shells in general relativity and cosmology: The Lightlike limit // Phys. Rev. D. — 1991. — т. 43. — с. 1129—1142. — DOI: 10.1103/PhysRevD.43.1129.

40. *Berezin V. A.*, *Kuzmin V. A.*, *Tkachev I. I.* Could the metastable vacuum burn? // Phys. Lett. B. — 1983. — т. 124. — с. 479—483. — DOI: 10.1016/0370-2693(83)91556-3.

41. *Berezin V. A.*, *Kuzmin V. A.*, *Tkachev I. I.* Dissipative phase interfaces // Sov. Phys. JETP. — 1984. — т. 59. — с. 459—464.

42. *Berezin V. A.*, *Kuzmin V. A.*, *Tkachev I. I.* Dynamics of Bubbles in General Relativity // Phys. Rev. D. — 1987. — т. 36. — с. 2919. — DOI: 10.1103/PhysRevD.36.2919.

43. *Frolov V. P.*, *Markov M. A.*, *Mukhanov V. F.* Through a black hole into a new Universe? // Phys. Lett. B. — 1989. — т. 216. — с. 272—276. — DOI: 10.1016/0370-2693(89)91114-3.

44. *Frolov V. P., Markov M. A., Mukhanov V. F.* Black holes as possible sources of closed and semiclosed worlds // Phys. Rev. D. — 1990. — т. 41. — с. 383—394. — DOI: 10.1103/PhysRevD.41.383.

45. *Von Borzeszkowski H. H., Frolov V. P.* Massive shell models in the gravitational theories with higher derivatives // Annalen Phys. — 1980. — т. 37. — с. 285—293.

46. *Gravanis E., Willison S.* Israel conditions for the Gauss-Bonnet theory and the Friedmann equation on the brane universe // Phys. Lett. B. — 2003. — т. 562. — с. 118—126. — DOI: 10.1016/S0370-2693(03)00555-0. — arXiv: hep-th/0209076.

47. *Davis S. C.* Generalized Israel junction conditions for a Gauss-Bonnet brane world // Phys. Rev. D. — 2003. — т. 67. — с. 024030. — DOI: 10.1103/PhysRevD.67.024030. — arXiv: hep-th/0208205.

48. *Bach R.* Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs // Math. Zeit. — 1921. — т. 9. — с. 110—135. — DOI: 10.1007/BF01378338.

49. *Berezin V. A., Dokuchaev V. I., Eroshenko Y. N.* Particle creation phenomenology, Dirac sea and the induced Weyl and Einstein-dilaton gravity // JCAP. — 2017. — т. 01. — с. 018. — DOI: 10.1088/1475-7516/2017/01/018. — arXiv: 1604.07753 [gr-qc].

50. *Berezin V. A., Ivanova I. D.* Lightlike singular hypersurfaces in quadratic gravity // Int. J. Mod. Phys. D. — 2022. — т. 31, № 10. — с. 2250077. — DOI: 10.1142/S0218271822500778. — arXiv: 2201.09142 [gr-qc].

51. *Иванова И. Д.* Светоподобные сингулярные гиперповерхности в квадратичной гравитации // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. — 2022. — № 1. — с. 2211501.

52. *Иванова И. Д.* Сферически-симметричные сингулярные гиперповерхности в конформной гравитации // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. — 2022. — № 4. — с. 2241513.

53. *Ivanova I. D.* Spherically Symmetric Black Holes and Physical Vacuum // PEPAN Lett. — 2023. — т. 20, № 3. — с. 505. — DOI: 10.1134/S1547477123030366.

54. *Ivanova I. D.* Null shells and double layers in quadratic gravity // J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — т. 2081, № 1. — с. 012020. — DOI: 10.1088/1742-6596/2081/1/012020.

55. *Penrose R.* The geometry of impulsive gravitational waves // General relativity: Papers in honour of J.L. Synge / под ред. L. O'Raifeartaigh. — 1972. — с. 101—115.

56. *Darmois G.* Les ´equations de la gravitation einsteinienne // M´emorial des Sciences Math´ematiques, Fascicule XXV. — 1927. — т. 44. — с. 28—32.

57. *Manzano M.*, *Mars M.* Null shells: general matching across null boundaries and connection with cut-and-paste formalism // Class. Quant. Grav. — 2021. — т. 38, № 15. — с. 155008. — DOI: 10.1088/1361-6382/abfd91. — arXiv: 2102.05987 [gr-qc].

58. *Mars M.*, *Senovilla J. M. M.* Geometry of general hypersurfaces in space-time: Junction conditions // Class. Quant. Grav. — 1993. — т. 10. — с. 1865—1897. — DOI: 10.1088/0264-9381/10/9/026. — arXiv: gr-qc/0201054.

59. *Poisson E.* A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics. — Cambridge University Press, 2009. — DOI: 10.1017/CBO9780511606601.

60. *Lake K.* Revisiting the Darmois and Lichnerowicz junction conditions // Gen. Rel. Grav. — 2017. — т. 49, № 10. — с. 134. — DOI: 10.1007/s10714-017-2300-1. — arXiv: 1705.01090 [gr-qc].

61. *Palatini A.* Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton // Rend. Circ. Matem. Palermo. — 1919. — т. 43. — с. 203—212. — DOI: 10.1007/BF03014670.

62. *Deruelle N.*, *Madore J.* On the quasilinearity of the Einstein-'Gauss-Bonnet' gravity field equations //. — 05.2003. — arXiv: gr-qc/0305004.

63. *Chern S. S.* A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds // Ann. of Math. — 1944. — т. 45, № 4. — с. 747—752.

64. *B. A. Dubrovin A. T. F.*, *Novikov S. P.* Modern Geometry-Methods and Applications. Vol. 93. — Springer-Verlag, 1984. — (GTM). — ISBN 9781468499469.

65. *Yale A.*, *Padmanabhan T.* Structure of Lanczos-Lovelock Lagrangians in Critical Dimensions // Gen. Rel. Grav. — 2011. — т. 43. — с. 1549—1570. — DOI: 10.1007/s10714-011-1146-1. — arXiv: 1008.5154 [gr-qc].

66. *Dey S.*, *Majhi B. R.* Covariant approach to the thermodynamic structure of a generic null surface // Phys. Rev. D. — 2020. — т. 102, № 12. — с. 124044. — DOI: 10.1103/PhysRevD.102.124044. — arXiv: 2009.08221 [gr-qc].

67. *Dey S.*, *Bhattacharya K.*, *Majhi B. R.* Thermodynamic structure of a generic null surface and the zeroth law in scalar-tensor theory // Phys. Rev. D. — 2021. — т. 104, № 12. — с. 124038. — DOI: 10.1103/PhysRevD.104.124038. — arXiv: 2105.07787 [gr-qc].

68. *Chakraborty S.*, *Padmanabhan T.* Thermodynamical interpretation of the geometrical variables associated with null surfaces // Phys. Rev. D. — 2015. — т. 92, № 10. — с. 104011. — DOI: 10.1103/PhysRevD.92.104011. — arXiv: 1508.04060 [gr-qc].

69. Exact solutions to quadratic gravity / V. Pravda [и др.] // Phys. Rev. D. — 2017. — т. 95, № 8. — с. 084025. — DOI: 10.1103/PhysRevD.95.084025. — arXiv: 1606.02646 [gr-qc].

70. *Ray J. R.* Lagrangian Density for Perfect Fluids in General Relativity // J. Math. Phys. — 1972. — т. 13. — с. 1452. — DOI: 10.1063/1.1665861.

71. *Berezin V. A.* On the phenomenological description of particle creation and its influence on the space-time metrics // 15th Russian Gravitational Conference: International Conference on Gravitation, Cosmology and Astrophysics. — 2014. — arXiv: 1404.3582 [gr-qc].

72. *Berezin V. A.*, *Dokuchaev V. I.*, *Eroshenko Y. N.* Particle creation phenomenology, Dirac sea and the induced Weyl and Einstein-dilaton gravity // JCAP. — 2017. — т. 01. — с. 018. — DOI: 10.1088/1475-7516/2017/01/018. — arXiv: 1604.07753 [gr-qc].

73. *Berezin V.*, *Dokuchaev V.*, *Eroshenko Y.* Cosmological particle creation in conformal gravity // EPJ Web Conf. / под ред. V. A. Andrianov [и др.]. — 2016. — т. 125. — с. 03003. — DOI: 10.1051/epjconf/201612503003.

74. *Berezin V. A., Dokuchaev V. I., Eroshenko Y. N.* Phenomenology of cosmological particle creation, Dirac sea and all that // J. Phys. Conf. Ser. — 2018. — т. 1051, № 1. — с. 012006. — DOI: 10.1088/1742-6596/1051/1/012006.

75. *Berezin V., Dokuchaev V., Eroshenko Y.* Conformal Invariance and Phenomenology of Cosmological Particle Production // 18th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics. — 2019. — с. 305—308. — DOI: 10.1142/9789811202339_0058.

76. *Berezin V. A., Dokuchaev V. I.* Supervisor of the Universe // MDPI Physics. — 2021. — т. 3, № 4. — с. 814—820. — DOI: 10.3390/physics3040051. — arXiv: 2109.13544 [gr-qc].

77. *Nelson W.* Static Solutions for 4th order gravity // Phys. Rev. D. — 2010. — т. 82. — с. 104026. — DOI: 10.1103/PhysRevD.82.104026. — arXiv: 1010.3986 [gr-qc].

78. Spherically Symmetric Solutions in Higher-Derivative Gravity / H. Lü [и др.] // Phys. Rev. D. — 2015. — т. 92, № 12. — с. 124019. — DOI: 10.1103/PhysRevD.92.124019. — arXiv: 1508.00010 [hep-th].

79. Black holes and other spherical solutions in quadratic gravity with a cosmological constant / V. Pravda [и др.] // Phys. Rev. D. — 2021. — т. 103, № 6. — с. 064049. — DOI: 10.1103/PhysRevD.103.064049. — arXiv: 2012.08551 [gr-qc].

80. *Sakharov A. D.* Vacuum quantum fluctuations in curved space and the theory of gravitation // Dokl. Akad. Nauk Ser. Fiz. — 1967. — т. 177. — с. 70—71. — DOI: 10.1070/PU1991v034n05ABEH002498.

81. *Moncrief V., Isenberg J.* Symmetries of cosmological Cauchy horizons // Commun. Math. Phys. — 1983. — т. 89, № 3. — с. 387—413. — DOI: 10.1007/BF01214662.

82. *Friedrich H., Racz I., Wald R. M.* On the rigidity theorem for space-times with a stationary event horizon or a compact Cauchy horizon // Commun. Math. Phys. — 1999. — т. 204. — с. 691—707. — DOI: 10.1007/s002200050662. — arXiv: gr-qc/9811021.

83. *Racz I.* Stationary Black Holes as Holographs // Class. Quant. Grav. — 2007. — т. 24. — с. 5541—5572. — DOI: 10.1088/0264-9381/24/22/016. — arXiv: gr-qc/0701104.

84. A Boundary Term for the Gravitational Action with Null Boundaries / K. Parattu [и др.] // Gen. Rel. Grav. — 2016. — т. 48, № 7. — с. 94. — DOI: 10.1007/s10714-016-2093-7. — arXiv: 1501.01053 [gr-qc].

85. *Jezierski J.*, *Kijowski J.*, *Czuchry E.* Geometry of null-like surfaces in general relativity and its application to dynamics of gravitating matter // Rep. Math. Phys. — 2000. — т. 46, № 3. — с. 399—418. — DOI: 10.1016/S0034-4877(00)90009-0.

86. *Padmanabhan T.* Entropy density of spacetime and the Navier-Stokes fluid dynamics of null surfaces // Phys. Rev. D. — 2011. — т. 83. — с. 044048. — DOI: 10.1103/PhysRevD.83.044048. — arXiv: 1012.0119 [gr-qc].

87. On useful conformal tranformations in general relativity / D. F. Carneiro [и др.] // Grav. Cosmol. — 2004. — т. 10. — с. 305—312. — arXiv: gr-qc/0412113.

88. *Berezin V. A.*, *Kuzmin V. A.*, *Tkachev I. I.* New vacuum formation in the Universe // Phys. Lett. B. — 1983. — т. 130. — с. 23—27. — DOI: 10.1016/0370-2693(83)91055-9.

89. *Brandenberger R.*, *Heisenberg L.*, *Robnik J.* Through a black hole into a new universe // Int. J. Mod. Phys. D. — 2021. — т. 30, № 14. — с. 2142001. — DOI: 10.1142/S0218271821420013. — arXiv: 2105.07166 [hep-th].

90. *Kodama H.* Conserved Energy Flux for the Spherically Symmetric System and the Back Reaction Problem in the Black Hole Evaporation // Prog. Theor. Phys. — 1980. — т. 63. — с. 1217. — DOI: 10.1143/PTP.63.1217.

91. On the Unruh effect in de Sitter space / R. Casadio [и др.] // Mod. Phys. Lett. A. — 2011. — т. 26. — с. 2149—2158. — DOI: 10.1142/S0217732311036516. — arXiv: 1011.3336 [gr-qc].

Приложение А

Вариация действия квадратичной гравитации

Вариацию действия в общем виде можно записать следующим образом:

$$\delta S = \delta \left[\int_\Omega \sqrt{-g} L_q \, d^4x \right] = \int_\Omega \sqrt{-g} \left(\delta L_q - \frac{1}{2} \, g_{ab} \, L_q \, \delta g^{ab} \right) \, d^4x \,, \tag{A.1}$$

где L_q - лагранжиан квадратичной гравитации:

$$L_q = \alpha_1 R_{abcd} R^{abcd} + \alpha_2 R_{ab} R^{ab} + \alpha_3 R^2 + \alpha_4 R + \alpha_5 \Lambda \,.$$

Далее, рассмотрим вариацию отдельных слагаемых лагранжиана. Вариация тензора Римана записывается с помощью формулы Палатини [61]:

$$\delta R^a_{bcd} = \nabla_c \delta \Gamma^a_{db} - \nabla_d \delta \Gamma^a_{cb} \,, \tag{A.2}$$

откуда напрямую выводится формула для вариации тензора Риччи:

$$\delta R_{ab} = \nabla_c \delta \Gamma^c_{ab} - \nabla_b \delta \Gamma^c_{ac} \,. \tag{A.3}$$

Для того, чтобы упростить приведенное выше выражение, необходимо выразить вариацию символов Кристоффеля через метрику:

$$\delta \Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \left(\nabla_b \delta g_{ad} + \nabla_a \delta g_{bd} - \nabla_d \delta g_{ab} \right) \,. \tag{A.4}$$

Подставляя (A.4) в (A.3), получим окончательный ответ для вариции тензора Риччи:

$$\delta R_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \left[\nabla_c \nabla_b \delta g_{ad} + \nabla_c \nabla_a \delta g_{bd} - \nabla_a \nabla_b \delta g_{cd} - \nabla_c \nabla_d \delta g_{ab} \right] \,, \tag{A.5}$$

при помощи которого находим вариацию скалярной кривизны по метрике - слагаемого в лагранжиане при коэффициенте α_4:

$$\delta R = R_{ab} \delta g^{ab} + g^{ab} \delta R_{ab} = R_{ab} \delta g^{ab} + \nabla_c \left[\left(g^{ab} g^{cd} - g^{bd} g^{ac} \right) \nabla_a \delta g_{bd} \right] \,. \tag{A.6}$$

Этот результат можно использовать для того, чтобы вычислить вариацию слагаемого при α_3:

$$\delta(R^2) = \left(2RR_{ab} + 2(g_{ab}\Box - \nabla_a\nabla_b)R\right)\delta g^{ab} + \\ + \nabla_c\left[2R\left(g^{ab}g^{cd} - g^{bd}g^{ac}\right)\nabla_a\delta g_{bd} + 2(g^{bd}\nabla^c - g^{dc}\nabla^b)R\delta g_{bd}\right], \quad (A.7)$$

где $\Box = \nabla^a\nabla_a$ - оператор Лапласа-Бельтрами.

Рассмотрим вариацию слагаемого при α_2:

$$\delta\left(R_{ab}R^{ab}\right) = 2R^{ab}\delta R_{ab} + 2R_a^dR_{bd}\delta g^{ab}, \quad (A.8)$$

разберем более подробно первое слагаемое из этого соотношения:

$$R^{ab}\delta R_{ab} = \frac{1}{2}\left(2R^{ab}g^{cd} - R^{ac}g^{bd} - R^{bd}g^{ac}\right)\nabla_c\nabla_a\delta g_{bd} = \\ = \frac{1}{2}\nabla_c\left\{\left(2R^{ab}g^{cd} - R^{ac}g^{bd} - R^{bd}g^{ac}\right)\nabla_a\delta g_{bd}\right\} + \\ + \frac{1}{2}\nabla_c\left\{\left(-2\nabla^dR^{bc} + g^{bd}\nabla_aR^{ac} + \nabla^cR^{bd}\right)\delta g_{bd}\right\} + \\ + \frac{1}{2}\left(\Box R_{ab} + g_{ab}\nabla_c\nabla_dR^{cd} - 2\nabla_d\nabla_aR_b^d\right)\delta g^{ab}. \quad (A.9)$$

Следствие дифференциального тождества Бьянки:

$$\nabla_aR_b^a = \frac{1}{2}\nabla_bR,$$

позволяет упростить одно из слагаемых в (A.9):

$$\frac{1}{2}g_{ab}\nabla_c\nabla_dR^{cd} = \frac{1}{4}g_{ab}\Box R.$$

Последнее слагаемое в уравнении (A.9) можно преобразовать, используя правила коммутации ковариантных производных:

$$\nabla_d\nabla_aR_b^d = \nabla_a\nabla_dR_b^d + R_{dabc}R^{cd} + R_a^cR_{bc} = \frac{1}{2}\nabla_a\nabla_bR + R_{dabc}R^{cd} + R_a^cR_{bc}.$$

С учетом всего вышеперечисленного, находим вариацию слагаемого при α_2:

$$\delta\left(R_{ab}R^{ab}\right) = \nabla_c\left\{\left(2R^{ab}g^{cd} - R^{ac}g^{bd} - R^{bd}g^{ac}\right)\nabla_a\delta g_{bd}\right\} + \\ + \nabla_c\left\{\left(-2\nabla^b R^{cd} + \frac{1}{2}g^{bd}\nabla^c R + \nabla^c R^{bd}\right)\delta g_{bd}\right\} + \\ + \left(\Box R_{ab} + \frac{1}{2}g_{ab}\Box R - \nabla_a\nabla_b R - 2R^d_{bac}R^c_d\right)\delta g^{ab}\,. \quad (A.10)$$

Перейдем к вычислению вариации слагаемого при α_1:

$$\delta\left(R^l{}_{mnp}R_l{}^{mnp}\right) = 2R_l{}^{mnp}\delta R^l{}_{mnp} + 2R_{amnp}R_b{}^{mnp}\delta g^{ab}\,. \quad (A.11)$$

Используем формулы (A.2,A.4) для вычисления первого слагаемого:

$$R_l{}^{bca}\delta R^l{}_{bca} = R_l{}^{bca}\left[\nabla_c\delta\Gamma^l_{ba} - \nabla_a\delta\Gamma^l_{bc}\right] = \\ = 2R_l{}^{bca}\nabla_c\delta\Gamma^l_{ba} = R^{dbca}\nabla_c\left(\nabla_a\delta g_{db} + \nabla_b\delta g_{da} - \nabla_d\delta g_{ba}\right) = \\ = 2R^{bacd}\nabla_c\nabla_a\delta g_{db} = \nabla_c\left[2R^{bacd}\nabla_a\delta g_{db} - 2\nabla_a R^{bcad}\delta g_{db}\right] - 2\nabla^d\nabla^c R_{adcb}\delta g^{ab}\,. \quad (A.12)$$

Аналогично предыдущему случаю, воспользовавшись дифференциальным тождеством Бьянки, приходим к окончательному ответу:

$$\delta\left(R^l{}_{mnp}R_l{}^{mnp}\right) = \nabla_c\left[4R^{bacd}\nabla_a\delta g_{bd} + \left(-4\nabla^b R^{cd} + 4\nabla^c R^{bd}\right)\delta g_{bd}\right] + \\ + \left(2R_{amnp}R_b{}^{mnp} + 4\Box R_{ab} - 2\nabla_a\nabla_b R - 4R^d_{bac}R^c_d - 4R^c_a R_{bc}\right)\delta g^{ab}\,. \quad (A.13)$$

Складывая вариации всех слагаемых лагранжиана с соответствующими коэффициентами с учетом (A.1), находим полную вариацию действия квадратичной гравитации по метрике:

$$\delta S_q = \frac{1}{16\pi}\int_\Omega \sqrt{-g}\left(H_{ab}\,\delta g^{ab} + \nabla_c V^c\right)\,d^4x\,, \quad (A.14)$$

с H_{ab} и V^c заданными формулами (1.30) и (1.31), соответственно.

Приложение Б

Гауссовы нормальные координаты

В данном разделе рассмотрим переход от различных исходных координат к нормальным гауссовым координатам для сферически симметричных метрик, которые являются решениями конформной гравитации, в частности, рассматриваются вакуумные решения и решения типа Вайдья, представленные в работе [49].

Двумерная «метрика» для сферически-симметричного случая в нормальных гауссовых координатах:

$$d\widetilde{s}_2^2 = \frac{\varepsilon}{r^2}\, dn^2 + \widetilde{\gamma}_{00}\, d\tau^2.$$

При замене координат, не затрагивающей углы, компоненты двумерной «метрики» меняются согласно стандартному соотношению для тензоров типа (0,2) при замене базиса, поэтому:

$$\widetilde{\gamma}_{00} = \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta\, \widetilde{\gamma}_{\alpha\beta} = |_{\Sigma_0} = -\frac{\varepsilon}{\rho^2}, \quad \frac{\varepsilon}{r^2} = x^{\alpha\prime}\, x^{\beta\prime}\, \widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}, \quad \dot{x}^\alpha\, x^{\beta\prime}\, \widetilde{\gamma}_{\alpha\beta} = 0, \tag{Б.1}$$

где $\{x^\alpha,\theta,\phi\}$ - некоторые исходные координаты рассматриваемого пространства-времени, здесь и далее в данном разделе штрихом и точкой обозначены частные производные по n и τ соответственно, $\rho(\tau) = r(0,\tau)$. Функции, описывающие данную замену координат $x^\alpha(n,\tau)$, должны быть как минимум дважды дифференцируемыми.

Решение системы уравнений (Б.1) заранее неизвестно, так как в приложениях неизвестными являются уравнения гиперповерхности в $\Omega^\pm$ областях: $n^\pm(x^\alpha) = 0$, которые альтернативно можно задать с помощью этих же функций замены координат, если выбрать в качестве внутренних координат $\{\tau,\theta,\phi\}$: $x^\alpha = x^\alpha(\tau) = x^\alpha(0,\tau), \theta = \theta, \phi = \phi$. Они определяются условиями Лихеровича и уравнениями движения. Тем не менее, далее будет показано, что соотношения (Б.1), а также существование вторых производных $x^\alpha(n,\tau)$ позволяют уменьшить количество неизвестных функций, выразив геометрические инварианты, присутствующие в условиях Лихнеровича и уравнениях движения только через функции $x^\alpha(\tau)$ и $\rho(\tau)$ при $n=0$.

Б.1 вакуум с постоянной $\widetilde{R}=2$

Рассмотрим вакуум с постоянной $\widetilde{R}=2$, двумерная «метрика» в координатах $\{t,x\}$:

$$d\widetilde{s}_2^2 = \frac{1}{x^2}(dt^2 - dx^2)\,.$$

Соотношения (Б.1) для данного случая имеют вид:

$$\frac{1}{x^2}\left(t'^2 - x'^2\right) = \frac{\varepsilon}{r^2}, \quad t'\,\dot{t} = x'\,\dot{x}, \quad \widetilde{\gamma}_{00} = \frac{1}{x^2}\left(\dot{t}^2 - \dot{x}^2\right), \tag{Б.2}$$

с помощью этих уравнений можно выразить $\dot{t}, t', \widetilde{\gamma}_{00}$ через $x(n,\tau)$ для того, чтобы уменьшить количество неизвестных функций:

$$t' = \kappa_1\sqrt{\frac{\varepsilon x^2}{r^2} + x'^2}, \quad \dot{t} = \frac{\kappa_1\, x'\,\dot{x}}{\sqrt{\frac{\varepsilon x^2}{r^2} + x'^2}}, \quad \widetilde{\gamma}_{00} = \frac{-\varepsilon\,\dot{x}^2}{\varepsilon x^2 + r^2 x'^2}, \quad \kappa_1 = \pm 1. \tag{Б.3}$$

Так как $t(n,\tau)$ как минимум дважды дифференцируемая функция, то $\partial^2_{n\tau} t = \partial^2_{\tau n} t$, если применить этот факт к (Б.3), то получаем следующую связь:

$$\partial_n\left(\ln\left\{\frac{\varepsilon x^2 + r^2 x'^2}{x^4}\right\}\right) = -\frac{2\,x'\,\dot{r}}{r\,\dot{x}},$$

с помощью которой можно избавиться от второй производной по n в выражении для $\widetilde{K}$:

$$-\widetilde{K} = \frac{\partial_n \widetilde{\gamma}_{00}}{2\,\widetilde{\gamma}_{00}} = \frac{x^2}{r\,\dot{x}}\,\partial_\tau\left(\frac{r\,x'}{x^2}\right).$$

В то же время значение $x'(n,\tau)$ при $n=0$ определяется из (Б.2) с учетом условия $\widetilde{\gamma}_{00}(0,\tau) = -\frac{\varepsilon}{\rho^2}$:

$$x'(0,\tau) = \frac{\kappa}{\rho}\sqrt{\dot{x}^2\,\rho^2 - \varepsilon\,x^2}, \quad \kappa = \pm 1,$$

откуда находим:

$$-\widetilde{K}(0,\tau) = \frac{\kappa\, x^2}{\rho\, \dot{x}}\, \partial_\tau \left(\frac{\sqrt{\dot{x}^2\, \rho^2 - \varepsilon\, x^2}}{x^2} \right).$$

Инвариант Δ в координатах $\{t,x\}$: $\Delta = \frac{x^2}{r^2}\left((\partial_t r)^2 - (\partial_x r)^2\right)$, также выражается через $x(\tau)$ при $n = 0$, если использовать тот факт, что функция $t(\tau)$ задана уравнением:

$$\dot{t}^2 = \dot{x}^2 - \frac{\varepsilon x^2}{\rho^2}.$$

Б.2 вакуум с переменной $\widetilde{R}$

Двумерная «метрика» для вакуума с переменной $\widetilde{R}$ в координатах $\{\eta, \widetilde{R}\}$:

$$d\widetilde{s}_2^2 = A\, d\eta^2 - A^{-1} d\widetilde{R}^2, \quad A(\widetilde{R}) = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^3 - 12\widetilde{R} + C_0\right).$$

Соотношения (Б.1) для данного случая:

$$A\,\eta'^2 - A^{-1}\,\widetilde{R}'^2 = \frac{\varepsilon}{r^2}, \quad A\,\eta'\dot{\eta} = A^{-1}\widetilde{R}'\dot{\widetilde{R}}, \quad A\,\dot{\eta}^2 - A^{-1}\,\dot{\widetilde{R}}^2 = \widetilde{\gamma}_{00}, \qquad \text{(Б.4)}$$

с их помощью выразим $\eta', \dot{\eta}, \widetilde{\gamma}_{00}$ через фукнцию $\widetilde{R}(n,\tau)$:

$$\eta' = \frac{\kappa_1}{A}\sqrt{\frac{\varepsilon A}{r^2} + \widetilde{R}'^2}, \quad \dot{\eta} = \frac{\kappa_1}{A}\frac{\widetilde{R}'\dot{\widetilde{R}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon A}{r^2} + \widetilde{R}'^2}}, \quad \widetilde{\gamma}_{00} = -\frac{\varepsilon\,\dot{\widetilde{R}}^2}{A\,\varepsilon + r^2\widetilde{R}'^2}, \quad \kappa_1 = \pm 1.$$

Так как функциия $\eta(n,\tau)$ дважды дифференцируема, то $\partial_\tau\eta' - \partial_n\dot{\eta} = 0$, откуда с учетом полученных выше формул, находим:

$$\partial_n\left\{ln\left(A\varepsilon + r^2\widetilde{R}'^2\right)\right\} = -\frac{2\dot{r}\widetilde{R}'}{r\dot{\widetilde{R}}}.$$

Это соотношение в свою очередь позволяет избавиться от вторых производных по n в инварианте $\widetilde{K}$:

$$-\widetilde{K} = \frac{\partial_n \widetilde{\gamma}_{00}}{2\,\widetilde{\gamma}_{00}} = \frac{1}{r\dot{\widetilde{R}}}\,\partial_\tau\left(r\widetilde{R}'\right).$$

С другой стороны значение $\widetilde{R}'$ при $n=0$ находится из (Б.4), если воспользоваться условием: $\widetilde{\gamma}_{00}(0,\tau) = -\frac{\varepsilon}{\rho^2}$:

$$\widetilde{R}'(0,\tau) = \frac{\kappa}{\rho}\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^2\,\rho^2 - \varepsilon\,A}\,, \quad \kappa = \pm 1,$$

поэтому при $n=0$ имеем:

$$\widetilde{K}(0,\tau) = -\frac{\kappa}{\rho\dot{\widetilde{R}}}\,\partial_\tau\left(\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^2\,\rho^2 - \varepsilon\,A}\right).$$

Инвариант Δ в координатах $\{\eta,\widetilde{R}\}$: $\Delta = \frac{1}{Ar^2}\left(\partial_\eta r\right)^2 - \frac{A}{r^2}\left(\partial_{\widetilde{R}} r\right)^2$.

Б.3 Космология

Для космологического решения, которое формально также входит в класс решений с $\widetilde{R}=2$, но требует отдельного рассмотрения, удобнее оказывается работать с полной метрикой, которая в координатах $\{t,x,\theta,\phi\}$ имеет вид:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a(t)^2}{1-kx^2}dx^2 - a(t)^2x^2d\Omega^2,$$

аналог соотношений (Б.1) для этой метрики:

$$t'^2 - \frac{a(t)^2}{1-kx^2}x'^2 = \varepsilon, \quad \dot{t}t' = \frac{a(t)^2}{1-kx^2}\dot{x}x', \quad \gamma_{00} = \dot{t}^2 - \frac{a(t)^2}{1-kx^2}\dot{x}^2. \qquad \text{(Б.5)}$$

С их помощью выразим $\frac{x'}{\sqrt{1-k\,x^2}}$, $\frac{\dot x}{\sqrt{1-k\,x^2}}$ и γ_{00} через функцию $t(n,\tau)$:

$$\frac{x'}{\sqrt{1-kx^2}}=\frac{\kappa_1}{a(t)}\sqrt{t'^2-\varepsilon},\quad \frac{\dot x}{\sqrt{1-kx^2}}=\frac{\kappa_1}{a(t)}\frac{\dot t\,t'}{\sqrt{t'^2-\varepsilon}},$$
$$\gamma_{00}=-\varepsilon\,\frac{\dot t^2}{t'^2-\varepsilon},\quad \kappa_1=\pm1. \quad (\text{Б}.6)$$

В силу того, что функция $x(n,\tau)$ дважды дифференцируема, выполняется соотношение:

$$\partial_\tau\left(\frac{x'}{\sqrt{1-k\,x^2}}\right)-\partial_n\left(\frac{\dot x}{\sqrt{1-k\,x^2}}\right)=0,$$

из него с учетом (Б.6) следует уравнение:

$$\dot t\,\partial_n\left\{a(t)^2\left(t'^2-\varepsilon\right)\right\}=0.$$

При $\dot t\neq0$ с учетом того, что $\gamma_{00}(0,\tau)=-\varepsilon$, получим:

$$t'=\frac{\kappa}{a}\sqrt{\varepsilon\,a^2+a_0^2\,\dot t_0^2},\quad t_0(\tau)=t(0,\tau),\quad a_0(\tau)=a(t_0(\tau)),\quad \kappa=\pm1.$$

С помощью полученной формулы избавимся от производных по n в выражении для инварианта $\frac{\partial_n\gamma_{00}}{2\gamma_{00}}=\frac{\partial_n r}{r}-\widetilde K$:

$$\frac{\partial_n\gamma_{00}}{2\gamma_{00}}=\frac{\kappa}{a\,\dot t}\,\partial_\tau\left(\sqrt{\varepsilon\,a^2+a_0^2\,\dot t_0^2}\right),$$

соответственно при $n=0$ имеем:

$$\frac{\partial_n\gamma_{00}}{2\gamma_{00}}(0,\tau)=\frac{\kappa}{a_0\,\dot t_0}\,\partial_\tau\left(a_0\sqrt{\varepsilon+\dot t_0^2}\right).$$

Инвариант Δ в координатах $\{t,x\}$: $\Delta=x^2\left(\frac{da}{dt}\right)^2+k\,x^2-1$, выражается через функцию $t_0(\tau)$ с помощью соотношения, которое выполняется при $n=0$:

$$\frac{\dot x^2}{1-kx^2}=\frac{\varepsilon+\dot t_0^2}{a_0^2}.$$

Разберем также случай, когда $\dot t=0$, гиперповерхность задана уравнением типа $t=t_0=const$ и является пространственноподобной. Из соотношений (Б.5) получим:

$$\dot{t} = 0, \quad t' = \kappa, \quad x' = 0, \quad \gamma_{00} = -\frac{a^2}{1 - kx^2}\dot{x}^2,$$

отсюда следует, что:

$$\frac{\partial_n \gamma_{00}}{2\gamma_{00}} = \frac{\kappa}{a}\frac{da}{dt},$$

нетрудно убедиться, что эта формула совпадает с полученной ранее, если в ней устремить $\dot{t}$ к нулю.

Б.4 Метрика типа Вайдья

Для исходящего решения типа Вайдья двумерная «метрика» в координатах $\{u,\widetilde{R}\}$:

$$d\widetilde{s}_2^2 = A(u,\widetilde{R})\, du^2 + 2du\, d\widetilde{R}, \quad A(u,\widetilde{R}) = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^3 - 12\widetilde{R} + C_0(u)\right),$$

соответственно, соотношения (Б.1) для данного случая:

$$u'(Au' + 2\widetilde{R}') = \frac{\varepsilon}{r^2}, \quad u'(A\dot{u} + \dot{\widetilde{R}}) = -\dot{u}\widetilde{R}', \quad \widetilde{\gamma}_{00} = \dot{u}(A\dot{u} + 2\dot{\widetilde{R}}), \tag{Б.7}$$

воспользовавшись которыми можно получить следующие выражения для $\widetilde{\gamma}_{00}$:

$$\widetilde{\gamma}_{00} = -\frac{\varepsilon}{r^2}\frac{\dot{u}^2}{u'^2} = -\frac{\varepsilon}{r^2}\frac{(A\dot{u} + \dot{\widetilde{R}})^2}{\widetilde{R}'^2},$$

отсюда при условии $\widetilde{\gamma}_{00}(0,\tau) = -\frac{\varepsilon}{\rho^2}$, находим:

$$u'(0,\tau) = \kappa\, \dot{u}, \quad \widetilde{R}'(0,\tau) = -\kappa\, (A\dot{u} + \dot{\widetilde{R}}), \quad \kappa = \pm 1. \tag{Б.8}$$

Если разрешить уравнение: $\dot{u}(A\dot{u} + 2\dot{\widetilde{R}}) = -\frac{\varepsilon}{\rho^2}$, полученное из (Б.7) при $n = 0$, относительно функции $\dot{u}$, получим:

$$\dot{u}(0,\tau) = \frac{1}{A\,\rho}\left(\kappa_1\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^2\rho^2 - \varepsilon A} - \dot{\widetilde{R}}\,\rho\right), \quad \kappa_1 = \pm 1,$$

откуда с учетом (Б.8) также находим: $\widetilde{R}'(0,\tau) = -\kappa\,\kappa_1\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^2 - \frac{\varepsilon\,A}{\rho^2}}$. Эти соотношения вместе с (Б.7) позволяют избавится от производных по n в выражении для инварианта $\widetilde{K}$ при $n=0$:

$$
\begin{aligned}
-\,\kappa\,\widetilde{K}(0,\tau) &= \frac{\kappa}{2\,\widetilde{\gamma}_{00}}\,\partial_n\widetilde{\gamma}_{00}(0,\tau) = \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} - \frac{1}{2}\partial_{\widetilde{R}}A\,\dot{u} = \\
&= \frac{d}{d\tau}\left(ln\left|\kappa_1\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^2\rho^2 - \varepsilon A} - \dot{\widetilde{R}}\,\rho\right|\right) - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\partial_{\widetilde{R}}A}{2\,A\,\rho}\left(\kappa_1\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^2\rho^2 - \varepsilon A} - \dot{\widetilde{R}}\,\rho\right).
\end{aligned}
\tag{Б.9}
$$

Инвариант Δ в координатах $\{u,\widetilde{R}\}$: $\Delta = \frac{\partial_{\widetilde{R}}r}{r^2}\left(2\,\partial_u r - A\,\partial_{\widetilde{R}}r\right)$.

Дополнительно найдем компоненты тензора энергии-импульса в гауссовой нормальной системе координат для рассматриваемого решения конформной гравитации. Ненулевые ковариантные компоненты соответственно:

$$
T_{0n} = \dot{u}\,u'\,T_{uu}, \quad T_{nn} = u'^2\,T_{uu}, \quad T_{00} = \dot{u}^2,
$$

здесь мы использовали тот факт, что в координатах $\{u,\widetilde{R}\}$ единственная ненулевая компонента это $T_{uu} = \frac{\alpha_1}{144\,\pi r^2}\partial_u C_0$. С учетом того, что $\gamma^{nn}(n,\tau) = \varepsilon$, $\gamma^{00}(0,\tau) = -\varepsilon$, а также полученными выше соотношениями для $\dot{u}$ и u', находим:

$$
\begin{aligned}
-\,\kappa T^{0n}(0,\tau) = T^{00}(0,\tau) = T^{nn}(0,\tau) &= \frac{\alpha_1\,\dot{u}}{144\,\pi\rho^2}\dot{C}_0 = \\
&= \frac{\alpha_1}{144\,\pi}\frac{\dot{C}_0}{A\,\rho^2}\left(-\dot{\widetilde{R}} + \kappa_1\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^2 - \frac{\varepsilon\,A}{\rho^2}}\right).
\end{aligned}
\tag{Б.10}
$$

Для входящего решения типа Вайдья двумерная «метрика» в координатах $\{v,\widetilde{R}\}$:

$$
d\widetilde{s}_2^2 = A(v,\widetilde{R})\,dv^2 - 2dv\,d\widetilde{R}, \quad A(v,\widetilde{R}) = \frac{1}{6}\left(\widetilde{R}^3 - 12\widetilde{R} + C_0(v)\right),
$$

соответственно, соотношения (Б.1) для данного случая:

$$
v'\,(Av' - 2\widetilde{R}') = \frac{\varepsilon}{r^2}, \quad v'\,(A\dot{v} - \dot{\widetilde{R}}) = \dot{v}\,\widetilde{R}', \quad \widetilde{\gamma}_{00} = \dot{v}\,(A\,\dot{v} - 2\,\dot{R}),
\tag{Б.11}
$$

воспользовавшись которыми можно получить следующие выражения для $\widetilde{\gamma}_{00}$:

$$\widetilde{\gamma}_{00} = -\frac{\varepsilon}{r^2}\frac{\dot{v}^2}{v'^2} = -\frac{\varepsilon}{r^2}\frac{(A\,\dot{v} - \dot{\widetilde{R}})^2}{\widetilde{R}'^2}\,,$$

отсюда при условии $\widetilde{\gamma}_{00}(0,\tau) = -\frac{\varepsilon}{\rho^2}$, находим:

$$v'(0,\tau) = \kappa\,\dot{v}, \quad \widetilde{R}'(0,\tau) = \kappa\,(A\,\dot{v} - \dot{\widetilde{R}}), \quad \kappa = \pm 1. \tag{Б.12}$$

Если разрешить уравнение: $\dot{v}(A\dot{v} - 2\dot{\widetilde{R}}) = -\frac{\varepsilon}{\rho^2}$, полученное из (Б.11) при $n = 0$, относительно функции $\dot{v}$, получим:

$$\dot{v} = \frac{1}{A\,\rho}\left(\dot{\widetilde{R}}\,\rho + \kappa_1\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^2\,\rho^2 - \varepsilon\,A}\right), \quad \kappa_1 = \pm 1,$$

откуда, с учетом (Б.12), также находим: $\widetilde{R}'(0,\tau) = \frac{\kappa\,\kappa_1}{\rho}\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^2\,\rho^2 - \varepsilon\,A}$. Эти соотношения вместе с (Б.11) позволяют избавится от производных по n в выражении для инварианта $\widetilde{K}$ при $n = 0$:

$$-\,\kappa\,\widetilde{K}(0,\tau) = \frac{1}{2}\partial_{\widetilde{R}}A\,\dot{v} + \frac{d}{d\tau}\left\{ln\,(\rho\,\dot{v})\right\} = \frac{\partial_{\widetilde{R}}A}{2\rho\,A}\left(\dot{\widetilde{R}}\,\rho + \kappa_1\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^2\,\rho^2 - \varepsilon\,A}\right) + \\ + \frac{d}{d\tau}\left\{ln\left(\frac{1}{A}\left(\dot{\widetilde{R}}\,\rho + \kappa_1\sqrt{\dot{\widetilde{R}}^2\,\rho^2 - \varepsilon\,A}\right)\right)\right\}. \tag{Б.13}$$

Инвариант Δ в координатах $\{v,\widetilde{R}\}$: $\Delta = -\frac{\partial_{\widetilde{R}}r}{r^2}\left(2\,\partial_v r + A\,\partial_{\widetilde{R}}r\right)$.

Дополнительно найдем компоненты тензора энергии-импульса в гауссовой нормальной системе координат для рассматриваемого решения конформной гравитации. Ненулевые ковариантные компоненты соотвественно:

$$T_{0n} = \dot{v}\,v'\,T_{vv}, \quad T_{nn} = v'^2\,T_{vv}, \quad T_{00} = \dot{v}^2\,T_{vv},$$

здесь мы использовали тот факт, что в координатах $\{v,\widetilde{R}\}$ единственная ненулевая компонента это $T_{vv} = -\frac{\alpha_1}{144\,\pi r^2}\partial_v C_0$. С учетом того, что $\gamma^{nn}(n,\tau) = \varepsilon, \quad \gamma^{00}(0,\tau) = -\varepsilon$, а также полученными выше соотношениями для $\dot{v}$ и v', находим:

$$-\kappa T^{0n}(0,\tau) = T^{00}(0,\tau) = T^{nn}(0,\tau) = -\frac{\alpha_1\,\dot v}{144\,\pi\rho^2}\dot C_0 =$$
$$= -\frac{\alpha_1}{144\,\pi}\frac{\dot C_0}{A\,\rho^2}\left(\dot{\widetilde R} + \kappa_1\sqrt{\dot{\widetilde R}^2 - \frac{\varepsilon\,A}{\rho^2}}\right). \quad (Б.14)$$

Б.5 Стационарная метрика

Рассмотрим следующий класс сферически симметричных стационарных метрик в координатах $\{t,r\}$:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f^{-1}(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2,$$

в него может входить как вакуум с переменной $\widetilde R$ (метрика Шварцшильда), так и вакуум с $\widetilde R = 2$ (метрика де Ситтера). Аналог соотношений (Б.1) для данного случая:

$$f(r)\,\dot t^2 - f(r)^{-1}\dot r^2 = \gamma_{00}, \quad f(r)\,\dot t\,t' = f(r)^{-1}\dot r\,r', \quad f(r)\,t'^2 - f(r)^{-1}r'^2 = \varepsilon, \quad (Б.15)$$

с их помощью выразим $t', \dot t, \gamma_{00}$ через функцию $r(n,\tau)$:

$$t' = \frac{\kappa_1}{f(r)}\sqrt{\varepsilon\,f(r) + r'^2}, \quad \dot t = \frac{\kappa_1}{f(r)}\frac{\dot r\,r'}{\sqrt{\varepsilon\,f(r) + r'^2}}, \quad \gamma_{00} = -\varepsilon\frac{\dot r^2}{\varepsilon\,f(r) + r'^2}.$$

Так как функция $t(n,\tau)$ дважды дифференцируема, то $\partial_\tau\partial_n t - \partial_n\partial_\tau t = 0$, откуда, используя полученные выше соотношения, находим:

$$\partial_n\left\{r'^2 + \varepsilon f(r)\right\}\dot r = 0.$$

Если $\dot r \neq 0$, то из этого уравнения следует:

$$r' = \kappa\sqrt{-\varepsilon\,f(r) + \dot\rho^2}, \quad \kappa = \pm 1,$$

с помощью полученного соотношения можно избавится от производных по n в инвариантах $\widetilde{K}$ и $\frac{\partial_n \gamma_{00}}{2\gamma_{00}}$:

$$\widetilde{K} = -\frac{\partial_n \widetilde{\gamma}_{00}}{\widetilde{\gamma}_{00}} = -\frac{\kappa\, r}{\dot{r}}\, \partial_\tau \left(\frac{\sqrt{-\varepsilon\, f(r) + \dot{\rho}^2}}{r} \right) ,$$

$$\frac{\partial_n \gamma_{00}}{2\,\gamma_{00}} = \frac{r'}{r} - \widetilde{K} = \frac{\kappa}{\dot{r}}\, \partial_\tau \sqrt{-\varepsilon\, f(r) + \dot{\rho}^2}\, .$$

При $\dot{r} = 0$, гиперповерхность задана уравнением $r = r_0 = const$, и из соотношений (Б.15) следует:

$$t' = 0, \quad r' = \kappa \sqrt{-\varepsilon\, f(r)}, \quad \gamma_{00} = f(r)\dot{t}^2,$$

откуда для представленных выше инвариантов получим:

$$\frac{\partial_n \gamma_{00}}{2\,\gamma_{00}} = \frac{\kappa}{2f(r)} \frac{df}{dr} \sqrt{-\varepsilon f(r)}, \quad \widetilde{K} = \kappa \sqrt{-\varepsilon f(r)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2f(r)} \frac{df}{dr} \right) ,$$

как несложно убедиться, они совпадают с полученными ранее формулами, если в них устремить $\dot{r}$ к нулю.