

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи

Попов Федор Калинович

Современные подходы в квантовых теориях поля: от конформных дефектов до  
квантовых симметрий

Специальность 1.3.3 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Москва, 2024

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>5</b>
1.1	Актуальность и современное состояние исследований . . . . .	5
1.2	Цели и задачи диссертационного исследования . . . . .	24
1.3	Научная новизна и практическая значимость . . . . .	24
1.4	Методология и методы диссертационного исследования . . . . .	25
1.5	Положения, выносимые на защиту диссертации . . . . .	26
1.6	Степень достоверности . . . . .	28
1.7	Апробация работы . . . . .	28
1.8	Личный вклад . . . . .	29
1.9	Публикации по теме диссертации . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Предел больших степеней свободы</b>	<b>31</b>
2.1	Введение . . . . .	31
2.2	Точное решение в пределе большого $N$ . . . . .	33
2.3	Суперсимметричная модель SYK с $q = 3$ в $d = 3$ . . . . .	43
2.4	$3 - \epsilon$ разложение . . . . .	46
2.5	$\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия . . . . .	50
2.6	Суперсимметрия в 3 измерениях . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Конформные дефекты в теории поля</b>	<b>54</b>
3.1	Дефекты и их конформные пределы . . . . .	54
3.1.1	Скалярная квантовая теория поля и локализованные магнитные дефекты . . . . .	55
3.1.2	Краткое изложение основных результатов . . . . .	58
3.2	Дефекты в большом $N$ пределе и доминирование арбузных деревьев . . . . .	61
3.3	Уравнение Швингера-Дайсона и дефектные одноточечные функции . . . . .	67

3.3.1	Дефектное уравнение Швингера-Дайсона . . . . .	67
3.3.2	Конформный дефект на большом расстоянии . . . . .	69
3.3.3	Одноточечные функции примарных операторов для дефектов кразмерности один . . . . .	71
3.3.4	Бета-функции и РГ-потоки дефектных взаимодействий . . . . .	72
3.4	Энтропия дефекта и $g$ -функция . . . . .	77
3.4.1	Точная энтропия дефекта из мелонных деревьев . . . . .	78
3.4.2	Энтропия дефекта при малых $\epsilon$ . . . . .	81
3.5	Дефектные двухточечные функции . . . . .	83
3.5.1	Двухточечные функции $\phi_{abc}$ . . . . .	84
3.5.2	Одноточечные функции билинейных операторов . . . . .	85
3.5.3	Одноточечная функция тензора энергии импульса . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Нестандартное поведение ренормгруппового потока</b>	<b>88</b>
4.1	Модель . . . . .	90
4.2	Бифуркация Богданова-Такенса . . . . .	92
4.3	Гомоклинический поток RG . . . . .	94
4.4	Общие рассуждения о хаосе . . . . .	97
4.5	Модель Изинга с комплексной константой связи и преобразование Бернулли . . . . .	99
4.6	Преобразование Бейкера, подкова Смейла и гомоклинические орбиты Шильникова . . . . .	104
4.7	Хаотическая би-антисимметричная тензорная модель . . . . .	109
4.8	Обсуждение и перспективы . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Теория поля в кривых пространства времени</b>	<b>121</b>
5.1	Введение и общее обсуждение . . . . .	121
5.2	Кронекеровская аномалия в гармоническом осцилляторе при конеч- ной температуре . . . . .	126
5.3	Кронекеровская аномалия в теории Максвелла . . . . .	129
5.4	Математические аспекты аномалии Кронекера . . . . .	130
5.5	Двумерная скалярная электродинамика на торе . . . . .	133
5.6	Кронекерова аномалия в пространствах с постоянной кривизной . . . . .	136

5.6.1	Отсутствие аномалий Кронекера в пространствах де Ситтера четной размерности . . . . .	138
5.7	Лакуна де Ситтера . . . . .	139
<b>6</b>	<b>Квантовые симметрия и АдС/КТП соответствие</b>	<b>142</b>
6.1	Введение . . . . .	142
6.2	Обзор квантового диска . . . . .	144
6.2.1	$SU_q(1, 1)$ : группа симметрии квантового диска . . . . .	144
6.2.2	$U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$ : генераторы из $SU_q(1, 1)$ . . . . .	146
6.2.3	Координаты на квантовом диске и их алгебра . . . . .	148
6.3	$q$ -Голография . . . . .	155
6.3.1	Асимптотический анализ . . . . .	155
6.3.2	Пропагаторы . . . . .	157
6.3.3	Граничная двухточечная функция . . . . .	159
6.4	$q$ - Конформная квантовая механика . . . . .	159
6.4.1	Корреляционные функции . . . . .	160
6.5	Введение в квантовые группы . . . . .	163
6.5.1	Общая философия . . . . .	163
6.5.2	Алгебра Хопфа . . . . .	164
6.5.3	Инвариантные элементы . . . . .	170
6.5.4	Степени инвариантного расстояния . . . . .	170
6.6	$R$ Матричный подход к $SL_q(2)$ . . . . .	171
6.7	Казимир и производные . . . . .	172
<b>7</b>	<b>Двумерные модели КХД</b>	<b>174</b>
7.1	Введение и суперсимметричная квантовая электродинамика . . . . .	174
7.2	Гамильтониан и гильбертово пространство двумерных моделей КХД	177
7.3	Диагонализация Гамильтониана . . . . .	179
7.4	Интеграл по путям . . . . .	184
7.5	Возможные обобщения . . . . .	187
7.6	Обозначения и условности . . . . .	188
<b>8</b>	<b>Магические углы скрученного двухлистного графена</b>	<b>190</b>
8.1	Введение . . . . .	190

8.2	Интеграл Ферми, нули волновых функций и плоская зона . . . . .	193
8.2.1	Плоские зоны и зануление интеграла Ферми $I_F = 0$ . . . . .	194
8.3	Сингулярная волновая функция . . . . .	197
8.4	Скрытые уровни Ландау . . . . .	200
8.5	Уровни Ландау на торе . . . . .	202
8.6	Расщепление короткой точной последовательности . . . . .	204
<b>9</b>	<b>Заключение</b>	<b>207</b>

# Глава 1

## Введение

### 1.1 Актуальность и современное состояние исследований

Данная диссертация посвящена изучению свойств квантовых теорий поля. Перед тем как приступить к конкретным вопросам, посвящённым данной тематике, я попытаюсь дать объяснение того, что такое квантовая теория поля. Давайте начнём с простого и наивного подхода, который заключается в том, что квантовая теория поля — это просто квантование любой привычной теории поля. Это может быть просто теория электромагнетизма, но мы рассмотрим ещё более простую модель, а именно теорию скалярного поля  $\phi$ . Действие такой системы есть

$$S[\phi] = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (1.1)$$

где первый член является просто кинетическим членом, а второй потенциалом взаимодействия. Под квантованием мы будем понимать изучение данного интеграла по траекториям.

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp [-J\phi + S[\phi]], \quad (1.2)$$

данный интеграл нужно брать по специально выбранным граничным условиям, которые характеризуют состояние системы. Пока что мы рассмотрим случай, что мы не накладываем никакие граничные условия, но пытаемся взять интеграл по всему пространству времени. В некоторых ситуациях общего положения такой интеграл сведется к вычислению различных матричных элементов, усреднённых по вакуумному состоянию. Тогда если действие квадратично по полям  $\phi$ , выше приведенный

интеграл можно формально взять точно и получить

$$Z[J] = \exp \left( - \int d^d x_1 d^d x_2 J(x_1) J(x_2) G(x_1, x_2) \right), \quad G(x_1, x_2) = \left[ \frac{1}{\Delta + \mu^2} \right]_{x_1, x_2}, \quad (1.3)$$

можно подумать, что таким образом теория самосогласованна и у нас есть возможность вычислить все возможные корреляционные функции. Это правда, если мы будем рассматривать корреляционные функции, включающие поля  $\phi$  в несовпадающих точках. Так можно вывести знаменитую формулу Вика

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_{2n}) \rangle = \sum_{\text{perm}} G(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) \dots G(x_{\sigma(2n-1)}, x_{\sigma(2n)}), \quad (1.4)$$

но как только мы выйдем за пределы такого предположения, мы сразу же найдем расходимости. Так рассмотрим, например, одноточечную функцию следующего оператора

$$\langle \phi^2 \rangle = G(0, 0) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2} = c\Lambda^{d-2} + \dots, \quad (1.5)$$

где из-за расходимости данного интеграла в ультрафиолете (УФ) мы ввели руками параметр обрезания  $\Lambda$  и предположили, что  $d < 4$ . Это означает, что наше определение теории поля через действие (1.1) недостаточно для вычисления в квантовой теории поля, и нам нужно дополнительно доопределять теорию. Так мы должны ввести дополнительный массивный параметр  $\Lambda$  для доопределения теории. Мы будем называть такое доопределение "схемой регуляризации". И мы можем вычислять все корреляторы в нашей теории. Теперь наши корреляторы явно зависят от этого параметра  $\Lambda$ , что кажется достаточно странным, но если мы доопределим, что под оператором  $\phi^2$  мы понимаем следующий оператор

$$[\phi^2] = \phi^2 - c\Lambda^{d-2}, \quad (1.6)$$

то используя теорему Вика, можно легко показать, что оператор  $[\phi^2]$  уже хорошо определен, и все его корреляторы не зависят от параметра  $\Lambda$ . Такое доопределение мы будем называть перенормировкой. Таким же образом можно доопределить другие операторы, к примеру,

$$[\phi^3] = \phi^3 - 3c\Lambda^{d-2}\phi, \quad (1.7)$$

как мы видим в случае свободного скалярного поля, такая схема регуляризации была очень простой и на самом деле почти очевидной. Мы просто доопределили

наши операторы, с которыми мы работаем. Это важный факт, который говорит, что квантовая теория поля на самом деле самосогласованна, но она нуждается в доопределении. Так нужно ввести схему регуляризации и правильно перенормировать наши операторы.

В случае взаимодействующей теории нам также требуется доопределять, что мы понимаем под константами взаимодействия нашей теории. Так рассмотрим следующую теорию.

$$S = \int d^4x \left[ \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 + \frac{\lambda_0\phi^4}{4!} \right], \quad (1.8)$$

где параметр  $m_0, \lambda_0$  просто какие-то числа и все корреляторы мы будем вычислять при помощи регуляризации (1.5). Если мы будем вычислять амплитуду рассеяния (или ампутированную четырехточечную функцию) в данной теории, то мы обнаружим, что есть следующее разложение по малой константе  $\lambda_0$

$$\mathcal{A}(p_i) \sim -\lambda_0 + a\lambda_0^2 \log \frac{\Lambda}{s} + \dots, \quad (1.9)$$

как видно в этом случае все конечно (ибо мы уже регуляризовали теорию), но удобнее переопределить константу связи как  $\lambda_m = -\lambda_0 + a \log \frac{\Lambda}{m}$  и работать непосредственно с этой константой связи  $\lambda_m$ . Тогда утверждается, что после такого переопределения зависимость от этой константы  $\Lambda$  пропадет. Также можно увидеть, что и масса нуждается в доопределении, так масса частиц в данном порядке сдвигается на константу.

$$m^2 = m_0^2 + \lambda_0^2 \Lambda^{d-2} + \dots, \quad (1.10)$$

и поэтому настоящая корреляционная длина (которая и есть просто масса) определяется не  $m_0$ , а  $m$ . И поэтому лучше работать прямо с  $m^2$ , а не  $m_0^2$ . Этим и занимается в некотором смысле теория перенормировок. Это такой улучшенный бухгалтерский учет всех больших вкладов, который позволяет нам работать с физическими параметрами  $\lambda = \lambda(m_0, \lambda_0, \Lambda), m = m(m_0, \lambda_0, \Lambda)$ .

Можно относиться к регуляризации двояко. Первое, что это математический трюк, который позволяет нам решить теорию, и за этим не скрывается никакой физики. Второе, что это обрезание физическое, параметр  $\Lambda$  говорит о наличии нашего незнания полной самосогласованной теории, но которая может существовать. К примеру, параметр  $\Lambda$  мог возникнуть от того что полная теория имеет следующий



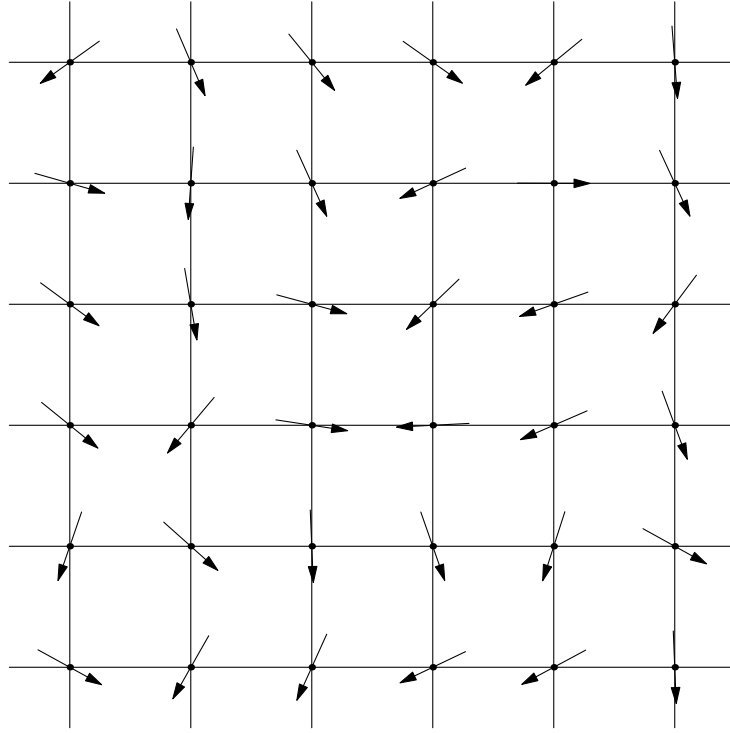


Рис. 1.1: Наш мир может просто оказаться набором спинов на квадратной решетке.

кинетический член

$$\begin{aligned}\delta_1 S &= \int d^d x \frac{1}{\Lambda^2} (\partial_\mu^2 \phi)^2, \\ \delta_2 S &= \int d^d x \phi(x) e^{-\frac{\Delta}{\Lambda^2}} \phi(x),\end{aligned}\tag{1.11}$$

тогда пропагатор поменялся бы, но (1.5) уже был бы сходящимся (и в пределе  $p^2 \ll \Lambda^2$  пропагаторы бы совпадали). Но чтобы заметить наличие такой поправки, мы должны были бы изучать распространения квантов полей массы  $m$  при энергии порядка  $\Lambda \gg m$ , что, конечно, является сложной задачей.

Кажется, достаточно странным, что, как мы заявили, параметр  $\Lambda$  является более важным, чем  $m$  (так как без него мы не можем доопределить теорию, тогда как с  $m$  мы вольны обращаться как хотим) и поэтому кажется, что мы должны знать, как наша теория доопределена, в то время как мы говорим, что эти поправки неважны. Наивно можно сказать, что без знания этих поправок мы не сможем изучить нашу теорию и понять, что происходит с ней в пределе  $m \ll \Lambda$ . Конечно, кажется важным знать, что происходит на таких больших энергиях (к примеру, что весь мир — это просто спины на решетке (1.1)). Но жизнь так устроена, что мы не всегда знаем всё про нашу систему, и, наверно, иногда можно спокойно жить на малых энергиях, не зная точно, что происходит при больших энергиях.

Грубо говоря, это позволяет нам изучать явления с точностью  $\mathcal{O}\left(\frac{m}{\Lambda}\right)$ . Поэтому предел  $\Lambda \gg m$  как раз и доопределяет, что мы подразумеваем, что такое теория поля. Если бы наоборот  $m \sim \Lambda$ , то мы должны были бы работать не только с членом (1.1), но и с членами старших порядков по производным, и нам действительно нужно знать всю нашу теорию поля со всеми старшими поправками. Отсюда мы делаем такое определение, что квантовая теория поля — это теория поля плюс регуляризация в пределе  $\Lambda \gg m$ . Из-за последнего неравенства можно убрать вообще слово «теория поля», и тогда мы получаем, что мы просто изучаем любую систему в пределе, когда корреляционная длина становится больше, чем характерный масштаб системы, и мы приходим к выводу, что мы просто изучаем фазовые переходы второго рода и их окрестности. Описание такой системы через теорию поля наряду с тем, что мы просто не знаем, как описать нашу систему, обладает большим преимуществом. Так в непрерывном пределе можно точно решать некоторые уравнения, которые могли бы быть недоступны через точное описание.

Из-за этого становится интересным изучать, как ведет себя теория поля в пределе  $m \rightarrow 0$  (иногда мы будем называть точку  $m^2 = 0$  критической) и как влияют взаимодействия системы на такой предел (если вообще такого предела можно добиться). Для этого рассмотрим следующий простой пример

$$S[\phi] = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + m^2 \phi^2 + g \phi^n \right], \quad (1.12)$$

где мы уже перенормировали наши константы связи. Предположим, что нашу теорию можно описать в пределе  $m \rightarrow 0$  как просто свободную теорию поля плюс малые поправки от взаимодействия. Для этого мы должны изучить следующую диаграмму

$$G^{-1} = G_0^{-1} - g^2 \Sigma, \quad \Sigma = G^{n-1}(x), \quad (1.13)$$

тогда поправка к массе должна быть

$$\frac{\delta m^2(g)}{m^2} = g^2 \int \frac{d^{d(n-2)k}}{k^{2(n-1)}} \sim g^2 m^{(d-2)n-2d}, \quad (1.14)$$

легко заметить, что если  $n \frac{d-2}{2} > d$  то тогда в пределе  $m \rightarrow 0$  поправка действительно мала, и мы можем ей пренебречь, тем самым мы можем убрать её из нашего рассмотрения. В противном случае поправка становится существенной в пределе  $m \rightarrow 0$  и мы не можем ей пренебречь. Теория будет несвободной в этом пределе.

Из-за того, что теория стала сильно взаимодействующей, может случиться, что предела  $m \rightarrow 0$  вообще не существует. Возникновение данного критерия можно легко понять — для этого восстановим зависимость от УФ обрезания  $\Lambda$  в нашей теории

$$S[\phi] = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + m^2 \phi^2 + g \Lambda^{d-n\frac{d-2}{2}} \phi^n \right], \quad (1.15)$$

как видно, последний член в этой теории при выполнении этого неравенства в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$  (или  $m \rightarrow 0$ ) может стать малым, если  $n$  достаточно большое или маленьким — отсюда и возникает ее влияние на теорию поля. Если добавление взаимодействия (можно сказать, что мы просто добавляем оператор к нашему действию) приводит к такой существенной перестройке теории, то мы будем говорить, что оператор релевантный или существенный. В противном случае, что оператор иррелевантный. Есть ещё маргинальные операторы, но тогда для понимания того, что действительно происходит, придётся изучать следующие порядки теории возмущений.

Обсудим теперь, что происходит в самой критической точке, когда перенормированная масса поля становится равной нулю. Так как теперь в инфракрасии мы не имеем масштабного параметра (все эффекты ультрафиолетового обрезания либо были учтены, либо они малы), то можно ожидать, что у нас система становится масштабно-инвариантной. Масштабная инвариантность ведет к тому, что наивно тензор энергии-импульса должен быть бесследовым. Это следует из следующего уравнения

$$\delta_\epsilon S = \int d^4 x T^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu \quad (1.16)$$

масштабные преобразования соответствуют следующему преобразованию  $\epsilon_\nu = \lambda x_\nu$  и, следовательно,

$$\delta_\epsilon S = \int d^4 x T^\mu_\mu, \quad (1.17)$$

но из этого не следует  $T^\mu_\mu = 0$  это просто означает, что след тензор энергии-импульса является просто полной производной от какого-то векторного поля  $V^\mu$ . Отсюда следует, что масштабная инвариантность не влечет за собой конформную инвариантность (однако это требует того, чтобы существовал оператор  $V^\mu$  размерности  $d-1$ , что в общем случае не происходит). Можно показать, что необходимым условием

является

$$T_{\mu}^{\mu} = \partial_{\rho} \partial_{\sigma} L_{\rho\sigma}, \quad (1.18)$$

тогда можно показать, что мы можем переопределить так тензор энергии импульса (что соответствует тому, что мы добавляем члены взаимодействия с гравитационным полем), что он станет бесследовым. Тогда теория должна стать конформноинвариантной, и мы можем использовать эту симметрию для непертурбативного доопределения теории.

Давайте посмотрим некоторую простую модель, на которой мы наглядно покажем, как работают описанные выше идеи. Так здесь мы рассмотрим пример скалярной  $O(N)$  модели. Интересная особенность данной модели — она точно решается в пределе больших  $N$ . Мы начинаем с общих размерностей пространства-времени и позже специализируемся на целочисленных размерностях. Действие модели определяется как

$$S = \int d^d x \left( \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi^i \partial^{\mu} \phi^i + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^i \phi^i + \frac{\lambda_0}{4} (\phi^i \phi^i)^2 \right), \quad (1.19)$$

где  $m_0$  и  $\lambda_0$  — это как раз затравочные масса и константа связи, определенные до перенормировок, а  $\phi^i$  принадлежит векторному представлению группы глобальной симметрии  $O(N)$ . Мы применим трюк Хаббарда-Стратоновича с использованием вспомогательного поля  $\sigma$ , также известного как поле ХС. Тогда, вплоть до постоянного сдвига, имеем

$$S = \int d^d x \left( \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi^i \partial^{\mu} \phi^i + \frac{1}{2} \sigma \phi^i \phi^i - \frac{\sigma^2}{4\lambda_0} + \frac{1}{2} r_0 \sigma \right), \quad (1.20)$$

с  $r_0 = \frac{m_0^2}{\lambda_0}$ . Заметим, что поле  $\sigma$  можно рассматривать как массу поля  $\phi^i$ . Интегрируя по полям  $\phi^i$ , мы получаем следующий эффективный лагранжиан для  $\sigma$ ,

$$\mathcal{F}(\sigma) = \frac{1}{2} N \log \det (-\square + \sigma) - \frac{\sigma^2}{4\lambda_0} + \frac{1}{2} r_0 \sigma. \quad (1.21)$$

Требуя  $\lambda_0 = \frac{\lambda_0^t}{N}$ ,  $r_0 = N r_0^t$  с  $\lambda_0^t, r_0^t$ , которые мы фиксируем в пределе большого  $N$ , мы видим, что

$$\mathcal{F}(\sigma) = \left[ \frac{1}{2} \log \det (-\square + \sigma) - \frac{\sigma^2}{4\lambda_0^t} + \frac{1}{2} r_0^t \sigma \right]. \quad (1.22)$$

так что параметр  $\frac{1}{N}$  играет роль эффективной постоянной Планка, которая приводит к классическому действию. И хотя кажется, что классическое действие не должно страдать от расходимостей, мы снова с ними столкнемся.

Из-за большого  $N$  мы можем использовать приближение ВКБ. Поэтому мы должны решить наше уравнение на поле  $\sigma$ ,

$$G_\phi(x, x) = \frac{\sigma(x)}{\lambda_0^t} - r_0^t, \quad (1.23)$$

где левая часть данного уравнения совпадает является пропагатором для поля  $\phi^i$ ,

$$(-\square + \sigma) G_\phi(x, y) = \delta(x - y). \quad (1.24)$$

В начале предположим, что  $\sigma(x) = \sigma$  является константой в пространстве-времени, тогда уравнение седловой точки для  $\sigma$  дается,

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + \sigma} = \frac{\sigma}{\lambda_0^t} - r_0^t, \quad (1.25)$$

которое также известно как уравнение щели, поскольку  $\sigma$  определяет массу для скалярных полей. Легко увидеть, что левая часть вышеприведенного уравнения расходится для  $d \geq 2$  и нуждается в регуляризации (это просто совпадает с регуляризацией, которую мы рассмотрели до этого на примере скалярного поля). Тем не менее, эти расходимости могут быть поглощены переопределением константы связи  $r_0^t$ . И мы можем привести систему к данной критической точке путем дальнейшей тонкой настройки этого параметра.

То что произошло совпадает с нашим примером с одним скалярным полем, которое мы рассмотрели до этого. Так мы возмутили свободную теорию поля оператором  $(\phi^i \phi^i)^2$  или  $\phi^4$  и наша теория становится совершенно другой. В этом случае нам нужно точно перенастроить массу  $r_0$  чтобы теория снова стала критической. Эта критическая точка описывает фазовый переход второго рода между упорядоченной и неупорядоченной фазами модели  $O(N)$ . Фактическое значение параметра  $r_0$ , при котором система становится критической, зависит от схемы регуляризации, и мы будем обозначать схему регуляризации через  $\mathcal{R}$ . Легко понять что теория будет критической когда  $\sigma = 0$  (заметим что  $\sigma < 0$  даст тахионные неустойчивости), поскольку  $\sigma$  контролирует корреляционную длину и массу поля  $\phi$ . Поэтому удобнее параметризовать затравочную константу связи  $r_0^t$  как

$$r_0^t = r^t - \int_{\mathcal{R}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2}, \quad (1.26)$$

где правая часть вычисляется при помощи выбранной схемы регуляризации в ультрафиолете (можно увидеть, что наша перенормировка параметра  $r^t$  не работает

в двух измерениях из-за наличия инфракрасной расходимости; мы чуть позже обсудим, что происходит в этом случае). Тогда легко понять, что  $r^t = 0$  как раз соответствует критической точке и решает (1.25) при  $\sigma = 0$ . Если мы восстановим зависимость от ультрафиолетового обрезания, то мы получим следующее уравнение

$$-r_t + \frac{\sigma}{\lambda_0^t \Lambda^{4-d}} = \int_{\mathcal{R}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + \sigma}. \quad (1.27)$$

Обсудим теперь поведение вблизи окрестности этой критической точки, подставляя значения из  $r_0^t$  (1.26) в уравнение щели (1.25)

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left( \frac{1}{k^2 + \sigma} - \frac{1}{k^2} \right) = \frac{\sigma}{\lambda_0^t \Lambda^{4-d}} - r^t. \quad (1.28)$$

Теперь, настраивая  $r^t$ , мы можем привести систему к фазовому переходу. Действительно, с помощью  $\sigma \neq 0$  мы получим следующее уравнение

$$\frac{r^t}{\sigma} - \frac{1}{\lambda_0^t \Lambda^{4-d}} = \int_{\mathcal{R}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2(k^2 + \sigma)}. \quad (1.29)$$

Разложение правой части вышеприведенного уравнения для малых  $\sigma$  на  $2 < d < 4$  дает

$$r^t - \frac{\sigma}{\lambda_0^t \Lambda^{4-d}} \sim K_d \sigma^{\frac{d}{2}-1} + I_{\mathcal{R}} \sigma + \dots, \quad (1.30)$$

где  $K_d$  - константа, не зависящая от схемы регуляризации

$$K_d \equiv -\frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \quad (1.31)$$

и  $I_{\mathcal{R}}$  - константа, зависящая от схемы регуляризации  $\mathcal{R}$  и её можно отправить в перенормировку константы связи  $\lambda_0^t$ .

В (1.30) мы опустили члены, которые являются сублидирующими в  $\sigma \rightarrow 0$ . Вблизи критической точки мы имеем масштабное поведение  $r^t \sim K_d \sigma^{\frac{d}{2}-1}$ . Отсюда следует, что если мы учтем поправку от наличия коэффициента  $\lambda_0^t$ , мы увидим, что она стала несущественной — все поправки от нее умирают в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Это немного странно, так как мы считали, что введение этого параметра в систему должно было существенно изменить поведение нашей теории. На самом деле это и случилось, но в этой новой точке, в которую пришла наша система, данный параметр стал как раз несущественным. Мы это объясним, когда посчитаем аномальную размерность оператора  $\sigma$ . Отсюда следует, что мы можем спокойно положить

$\lambda_0^t = \infty$ , что значительно упрощает наши дальнейшие формулы. Для аналитических вычислений наиболее удобной нам представляется размерная регуляризация (но я скажу, что она является самой нефизической и поэтому, используя ее, иногда невозможно понять, что скрывается за всеми математическими абстракциями). Для  $2 < d < 4$  это дает,

$$\int_{\text{dimreg}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2(k^2 + \sigma)} = K_d \sigma^{\frac{d}{2}-2}, \quad r^t = K_d \sigma^{\frac{d}{2}-1}, \quad (1.32)$$

поэтому для достижения критической точки нужно задать  $r^t = r_0^t = 0$ .

Обсудим сейчас случай  $d = 2$ , как видно, наша схема перенормировки не работает из-за логарифмической расходимости. Тогда давайте не будем перенормировать теорию и просто попытаемся найти корреляционную длину как функцию затравочных параметров. Так если мы проведем интегрирование по пространству времени с обрезанием  $\Lambda$ , мы получим следующее уравнение

$$\log \frac{\Lambda}{\sigma} = -r_0^t + \frac{\sigma}{\lambda_0^t \Lambda^2}, \quad (1.33)$$

отсюда видно, что ни при каких конечных  $r_0^t, \lambda_0^t$  система не становится критичной — она всегда находится в массивной точке. Тем не менее, мы всегда можем добиться того, что  $\sigma \ll \Lambda$  и данная система будет все-таки описываться свободной квантовой теорией поля.

Другой особый случай  $d = 4$ , в этом случае у нас снова возникают дополнительные расходимости. В этом случае уравнение щели имеет следующий вид

$$r^t - \frac{\sigma}{\lambda_0^t} = \sigma \log \frac{\Lambda}{\sigma}, \quad (1.34)$$

можно заметить, что хотя  $\sigma = 0$  формально остается решением при  $r^t = 0$ , но в отличие от случая  $2 < d < 4$  появляется дополнительное решение при  $\sigma = \Lambda e^{\lambda_0^t}$ , что говорит о наличии неустойчивости. Более того, можно проверить, что данное решение является настоящим минимумом действия  $\mathcal{F}(\sigma)$  и поэтому его нельзя описать квантовой теорией поля, так как масса такого поля будет порядка обрезания  $\sigma \sim \Lambda$  (есть тривиальный выход из этого положения — мы опишем его чуть позже).

Давайте теперь обсудим корреляционные функции полей  $\sigma$ , которые можно вычислить, используя эффективное действие. Так мы раскладываем действие до второго порядка по  $\sigma$  и просто изучаем квадратичную часть. Это дает нам следующее

уравнение

$$G_\sigma^{-1}(x, y) = G_\phi^2(x, y) + \frac{1}{\lambda_0^t} \delta^{(d)}(x - y) \quad (1.35)$$

Запишем его в импульсном представлении

$$G_\sigma^{-1}(x, y) = \frac{1}{\lambda_0^t \Lambda^{4-d}} + \int_0^1 dx \frac{1}{(\sigma + x(1-x)q^2)^{2-d/2}}, \quad (1.36)$$

можно заметить, что при  $2 < d < 4$  второй интеграл всегда ограничен снизу как  $\left[ \frac{1}{(\sigma + \frac{1}{4}q^2)^{2-d/2}} \right]$ , и поэтому, чтобы первый член мог как-нибудь существенно изменить поведение системы, то нужно брать  $\sigma, q^2$  порядка  $\Lambda$ , что, как обсуждалось выше, физически не оправдано. Поэтому мы спокойно пренебрегаем первым членом. Особый случай возникает при  $d = 4$ , тогда мы получаем

$$G_\sigma^{-1}(p) = \frac{1}{\lambda_0^t} + \int_0^1 dx \log \left[ \frac{\Lambda^2}{\sigma + x(1-x)p^2} \right], \quad (1.37)$$

отсюда видно, что чтобы теория около  $\sigma = 0$  пропагатор данного поля ведет себя как  $G_\sigma^{-1}(p) \approx \log \frac{\Lambda}{p}$ , что соответствует дельта-функциональному поведению полей  $\sigma$  и, следовательно, невзаимодействующей теории.

В случае  $2 < d < 4$  в критической точке мы можем вычислить пропагатор поля  $\sigma$

$$G_\sigma^{-1}(p) = \frac{\pi \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right) \Gamma(d-1)} N p^{d-4}, \quad G_\sigma(x, 0) = \frac{\sin\left(\frac{\pi d}{2}\right) \Gamma(d-1)}{\pi^5 \Gamma\left(\frac{d}{2}-2\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \frac{1}{N x^4}, \quad (1.38)$$

так что масштабная размерность оператора  $\sigma$  равна  $\Delta_\sigma = 2$ . Грубо говоря, из-за этого мы видели, что  $\frac{\sigma^2}{4\lambda_0^t}$  никак не влияла на нашу теорию поля — размерность этого возбуждения равна 4 и поэтому мы могли пренебречь ее вкладом в изучении данной теории. Данная теория называется векторной моделью в пределе больших  $N$ . Как видно, в этой модели из-за введения начального затравочного возбуждения мы перевели теорию, в которой хоть и похоже на нашу изначальную теорию (в ней есть поля  $\phi_i$ , которые формально ведут себя как свободно распространяющиеся поля с массой  $\sigma$ ) в ней есть операторы, которые существенно отличаются от наших операторов в свободной теории поля (к примеру,  $\sigma = \phi_i^2$  имеет другую размерность).

Просуммируем, что мы выучили. Самое важное, что квантовая теория поля всегда это теория поля плюс схема регуляризации. Мы изучаем ее в пределе, когда корреляционная длина намного больше, чем параметр ультрафиолетового обрезания.



Когда мы перенормируем теорию (формально убираем зависимость от ультрафиолетового обрезания), операторы и сама теория, которые мы наивно рассматривали в нашей изначальной теории поля, могут существенно перестроиться.

Рассмотрим еще один простой пример, в котором фундаментальные степени свободы  $\psi_{abc}$  имеют три индекса. Например, мы можем рассмотреть следующую модель

$$S = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_{abc})^2 + V(\phi_{abc}) \right], \quad a = 1, \dots, N_1, b = 1, \dots, N_2, c = 1, \dots, N_3, \quad (1.39)$$

Заметим, что теория обладает  $O(N)^3 = O(N_1) \times O(N_2) \times O(N_3)$  симметрией. Но если нет члена взаимодействия, то кинетический член фактически не ощущает присутствия трехиндексной структуры в поле и симметрия на самом деле  $O(N_1 N_2 N_3)$ . Чтобы получить модель, у которой симметрия будет меньше, чем у рассмотренных выше групп, нужно рассмотреть несколько более сложное взаимодействие

$$\mathcal{O}_t = g_t \phi_{abc} \phi_{ab'c'} \phi_{a'b'c} \phi_{a'b'c}, \quad (1.40)$$

Особенность данной модели заключается в том, что в данной модели доминируют так называемые мелонические диаграммы (см рис. (1.2)). Можно исследовать эту модель пертурбативно и обнаружить, что действительно в большом  $N$  пределе доминируют мелонные диаграммы. В начале выведем, как мы должны масштабировать константу связи в зависимости от  $N$ , чтобы получить гладкий предел большого  $N$ . Давайте изучим вакуумные фейнмановские графы этой теории, по очереди стирая линии одного из цветов. Мы получим жирные или ленточные графы, подобные тем, что используют для изучения матричных моделей. Чтобы получить максимальное количество факторов  $N$ , получающиеся ленточные графы должны быть планарными, так как это максимизирует число петель. Тогда легко показать, что число индексных петель равно

$$\begin{aligned} f_{rb} &= f_r + f_b = 2 + v_t - 2g_{rb}, \\ f_{rg} &= f_r + f_g = 2 + v_t - 2g_{rg}, \\ f_{bg} &= f_b + f_g = 2 + v_t - 2g_{bg}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

где мы использовали, что  $V - E + F = 2 - 2g$  — теорему Эйлера и свойство того, что каждый пропагатор заканчивается на вершине валентности 4. Складывая эти

уравнения, находим, что *максимальное* общее число замкнутых петель равно

$$f_r + f_b + f_g = 3 + \frac{3}{2}v_t - g, \quad g = \sum g_{ij} \geq 0. \quad (1.42)$$

Это означает, что максимальный вес любого графа ограничен фактором  $N^3 \left(g_t N^{\frac{3}{2}}\right)^{v_t}$  и достигается, когда  $g_{ij} = 0$ . Также мы получаем, как должны зависеть константы взаимодействия от  $N$

$$\lambda_t = g_t N^{3/2}, \quad (1.43)$$

должна быть фиксирована для достижения гладкого большого  $N$  предела. Теперь мы набросаем доказательство того, что модель с таким взаимодействием обладает мелоническим доминированием в большом  $N$  пределе. Как мы показали, графы, дающие ведущий вклад в большом  $N$  пределе, имеют  $g_{ij} = 0$ , т.е. любой выбор цветов и соответствующего жирного графа является планарным. В этом случае мы находим

$$f_{\text{total}} = 3 + \frac{3}{2}v. \quad (1.44)$$

Покажем, что существует цикл, проходящий только через 2 вершины. Пусть  $f_r$  обозначает количество циклов, проходящих через  $r$  вершин. Поскольку в каждой вершине проходит 6 индексных петель, находим, что

$$\sum f_r = f_{\text{total}} = 3 + \frac{3}{2}v, \quad \sum_r r f_r = 6v. \quad (1.45)$$

Комбинируя эти соотношения, находим,

$$\sum_r (4 - r) f_r = 12. \quad (1.46)$$

Можно доказать, что  $f_1 = f_3 = 0$ , тогда мы имеем <sup>1</sup>.

$$\frac{1}{2}f_2 = 6 + \sum_{r>4} (r - 4) f_r > 0, \quad (1.47)$$

сумма в правой части этого уравнения больше нуля. Это означает, что существует петля, проходящая ровно через две вершины. Будем называть эту пару вершин *базисом*, а сами вершины — левой и правой. Легко заметить, что эта петля, проходящая через эти две вершины, содержит только древесные пропагаторы (так как

---

<sup>1</sup>Можно доказать, что для любой такой диаграммы некоторые из жирных подграфов станут непланарными.

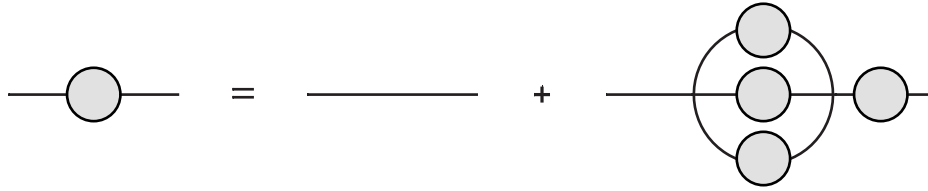


Рис. 1.2: Графическое представление уравнения Дайсона-Швингера для  $q = 4$  мелонной теории.

она не проходит больше ни через одну вершину), соединяющие поля с номерами  $1_L$  с  $1_R$  и  $2_L$  с  $2_R$ . Теперь выберем в левой вершине любое другое поле  $3_L$  или  $4_L$  (например, выберем  $3$ ). Сотрем все цвета, кроме цветов  $(1_L 3_L)$  и  $(3_L 2_L)$ . Мы можем сделать такую перестановку вершин, что  $3_L$  окажется между первым и вторым полем в вершине взаимодействия.

Поскольку ленточный граф, построенный из цветов  $(1_L 3_L)$  и  $(3_L 2_L)$ , должен быть планарным, то вывод  $3_L$  в левой вершине может быть соединен **только** с этими выводами  $r_3 > 0$ . И из-за планарности, эта вершина не может быть соединена с другими полями, а эти поля  $r_i > 0$  в правой вершине могут быть соединены **только** с  $3_L$ . Тоже самое верно для  $4_L$  и должно быть, что это поле должно быть соединено  $r_4 > 0$  вершинами. Так как  $r_3 + r_4 = 2$ , то следует, что  $r_3 = r_4 = 1$ . Отсюда следует, что  $3_L$  соединен "пропагатором" или фейнмановским подграфом с двумя концами с вершиной  $3_R$ . Аналогично для  $4_L$ . Мы можем соединить концы этих двух подграфов-"пропагаторов" чтобы получить вакуумные диаграммы, и применить к ним те же рассуждения. Применяя рекурсию, можно доказать тогда, что максимальный граф должен быть мелоническим. Таким образом, мы показали, что для того, чтобы граф обладал максимальным большим- $N$  фактором, он должен быть мелоническим.

Поэтому при наличии мелонного взаимодействия в системе в большом  $N$  пределе доминируют мелонические диаграммы. Приведенное выше доказательство является чисто комбинаторным, поэтому оно применимо к любым теориям: в любой размерности с любой теорией поля. Как только система обладает таким взаимодействием в большом  $N$  пределе, мы получим мелоническую теорию.

Обсудив комбинаторную часть проблемы, теперь обсудим динамику такой модели. Тогда мы можем с уверенностью сказать, что для изучения спектра данной

модели мы должны просто изучить следующее уравнение

$$G^{-1}(x, y) = G_0^{-1}(x, y) - g_t^2 G^3(x, y) \quad (1.48)$$

и изучить существует ли критическая точка и понять ее свойства. Следуя аргументам, которые мы дали ранее, заключаем, что при  $d > 4$  мы ожидаем, что в такой теории ничего не произойдет — в непрерывном пределе такая теория будет просто описываться свободным скалярным полем. При  $d < 4$  мы ожидаем, что будет сложная теория — она не будет описываться свободной квантовой теорией поля. Давайте сразу же обсудим критическую точку данной теории. Давайте покажем, что такая точка существует, для этого предположим в начале, что в инфракрасии мы имеем  $G^{-1} \gg G_0^{-1}$ . Тогда мы получаем следующее уравнение

$$G^{-1}(x, y) = -g_t^2 G^3(x, y), \quad (1.49)$$

легко показать, что если мы знаем одно решение данного уравнения, то тогда мы можем за бесплатно получить другое решение, используя следующее соотношение

$$G_f = (\det \partial_\mu f^\nu(x))^{\frac{d}{4}} (\det \partial_\mu f^\nu(y))^{\frac{d}{4}} G(f(x), f(y)), \quad (1.50)$$

если мы попытаемся найти решение инвариантного относительно такой большой группы преобразований решения, то мы получим, что единственным решением является только дельта-функция. Чтобы найти хоть какое-то решение данного уравнения, мы потребуем инвариантность относительно самой большой подгруппы всех возможных диффеоморфизмов — что является просто конформной группой. Тогда решение данного уравнения можно выбрать

$$G(x, y) = \frac{a}{|x - y|^{\frac{d}{2}}}, \quad (1.51)$$

покажем, что данный пропагатор действительно решает данное уравнение в ИК при каком-то выборе затравочной массы поля. А именно,

$$\Sigma(p) = \int d^d x \frac{e^{ipx}}{|x - y|^{\frac{3d}{2}}} \sim \Lambda^{\frac{d}{2}} + p^{\frac{d}{2}} + \mathcal{O}(1/\Lambda), \quad (1.52)$$

где мы выделили расходящуюся часть, которую можно убрать в перенормировку массы и тем самым не бояться о УФ расходимости. Теперь рассмотрим,

$$G(p) = \int \frac{d^d x}{|x|^{\frac{d}{2}}} e^{ipx} = \frac{1}{p^{\frac{d}{2}}}, \quad G^{-1}(p) = p^{\frac{d}{2}} \gg p^2, p \rightarrow 0 \quad (1.53)$$

где сходимость гарантируется правильной сдвижкой импульса  $p$  в комплексную плоскость, и последнее неравенство достигается при  $d < 4$ . По-видимому, такие мелонические теории впервые обсуждались в контексте сверхтекучести, где было показано, что такие теории являются конформно инвариантными, даже если будут учтены следующие порядки. Но эти уравнения были выведены в предположении, что другие диаграммы не влияют на решение в пределе  $p \rightarrow 0$ . К сожалению, это не так (в нашем случае другие диаграммы не влияют из-за факторов  $N$ ).

Давайте переформулируем то, что мы пронаблюдали. Мы написали уравнение Дайсона-Швингера на пропагатор

$$G^{-1} = G_0^{-1} - g_0^2 \Sigma[V, G], \quad V(p_i) = -g_0 + \Pi(V, G) \quad (1.54)$$

где мы написали в какой-то форме точное уравнение на  $\Sigma(V, G)$  (в общей форме мы не знаем его, но в данном примере мы получили его точно). В безмассовом пределе мы получили, что затравочными константами связи можно пренебречь (это предположение должно быть самосогласованно) и тогда мы получаем следующее уравнение

$$G^{-1} = -\Sigma[V, G], \quad V(p_i) = \Pi(V, G) \quad (1.55)$$

эти уравнения уже не зависят от начальной теории и могут быть решены (хотя бы приближенно). Единственное, что дала нам начальная теория, это то, что начальная теория дала "затравку" и теория сама перешла в какую-то универсальную точку, которая должна определяться из самосогласованных уравнений. В каком-то смысле данный способ решения теории эквивалентен методу Ньютона решения уравнения типа  $x = f(x)$ , где мы стартуем с какой-то точки  $x_0$  и последовательными приближениями приходим к универсальному ответу, который решает изначальное уравнение. Из-за этого возникает гипотеза, что такие теории можно найти, просто решая самосогласованные уравнения (конформный бутстрап). Эти уравнения эквиваленты написанным уравнениям Дайсона-Швингера, но переписанные в более удобном базисе.

Последний вопрос или технику, которую я хочу обсудить в этой главе, это так называемое  $\epsilon$ -разложение. В начале как способ пересуммирования лидирующих расходящихся диаграмм, а затем я её собираюсь обсудить в контексте теорий перенормировок.

Это идея, которая кардинальным образом отличается от того, что было до этого рассмотрено. А именно, в случае векторной и тензорной модели мы имели возможность точно решить теорию и предсказать ее поведение, так как мы имели дополнительный параметр  $N$ , который помогал нам решить данные модели в большом  $N$  пределе. То есть, с помощью этого параметра мы нашли лидирующие вклады в интересующие нас наблюдаемые и просуммировали их. В общем случае у нас нет такой возможности. Поэтому было бы очень полезно иметь какой-то дополнительный параметр разложения. Чтобы найти этот параметр разложения, давайте снова обратимся к следующей теории

$$S[\phi] = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{24} \phi^4 \right], \quad (1.56)$$

где мы перенормировали массовый параметр, но будем продолжать работать с затравочной константой связи. Рассмотрим поправки к четырехточечной функции. Легко увидеть, что пертурбативно поправки имеют следующий вид

$$V^{(2)}(p_i) = \langle \phi(p_1) \phi(p_2) \phi(p_3) \phi(p_4) \rangle = -\lambda_0 \Lambda^{4-d} + \frac{3\lambda_0^2 \Lambda^{8-2d}}{16\pi^2(4-d)} \int dx \frac{1}{(m^2 + x(1-x)p^2)^{2-d/2}} + \mathcal{O}((4-d)^0) \quad (1.57)$$

где мы выделили лидирующий кусок в пределе  $d \rightarrow 4$ . Отсюда видно, что мы можем попытаться понять, что происходит с такой теорией в пределе, когда  $\epsilon = 4-d \rightarrow 0$  и просуммировать лидирующие вклады порядка  $\frac{\lambda_0^2}{\epsilon}$ . Грубо говоря, как мы показали, чтобы теория стала сильно взаимодействующей, то нужно ввести взаимодействие с размерностью меньше чем размерность пространства-времени. Если эта разница мала, то можно ожидать, что эти возмущения можно точно пересуммировать (можно сказать, что мы изучаем конформную теорию возмущений). Для этого мы можем сделать следующее. Предположим, что мы изучаем, как выглядит двухточечная функция операторов  $\phi^2$ . Используя стандартную теорию возмущений, точный коррелятор есть

$$G(x, y, \lambda) = \sum \frac{\lambda^n}{n!} \langle \phi^2(x) \prod_{i=1}^n \phi^4(x_i) \phi^2(y) \rangle, \quad (1.58)$$

Давайте поймем, какие вклады в этом интеграле дают наибольший вклад в пределе  $\epsilon = 4-d \rightarrow 0$ . Для этого заметим, что эти вклады приходят от двух регионов, когда  $|x_i - x_j| \ll |x - y|$  и  $|x_i - x| \ll |x - y|$ . Рассмотрим, что происходит, когда мы учитываем все вклады, которые идут от расходимостей первого типа. Для этого мы

введем понятие "эффективного" оператора, которые приходят от учета всех членов взаимодействия в регионе радиуса  $\xi$

$$\mathcal{O}_4(x) = \Lambda(\xi)\phi^4(x) \quad (1.59)$$

тогда можно написать следующее уравнение на константу  $\Lambda(x)$

$$\Lambda(\xi) = \lambda_0 + a \int_{|x|<\xi} \frac{d^d x}{|x|^{2d-4}} \Lambda^2(x), \quad (1.60)$$

где мы просто сказали, что эффективное взаимодействие на расстоянии  $\xi$  дается учетом при помощи пропагаторной вставки между двумя потенциалами взаимодействия. Решение такого уравнения является

$$\Lambda(\xi) = -\frac{(d-4)\lambda_0\xi^d}{-a\lambda_0\xi^4 + (d-4)\Lambda^{4-d}\xi^d}, \quad (1.61)$$

мы видим, что эффективное взаимодействие спадает как  $\Lambda(\xi) \approx \frac{d-4}{a}\xi^{d-4}$  и что это взаимодействие мало, если  $d \rightarrow 4$ .

Применяя аналогичную идею для оператора  $\phi^2$ , мы получаем следующее уравнение:

$$\mathcal{O}_2(x) = \Gamma(\xi)\phi^2(x), \quad (1.62)$$

и снова мы получаем уравнение

$$\Gamma(\xi) = 1 + a \int_{|x|<\xi} \frac{d^d x}{|x|^{2d-4}} \Gamma(x)\Lambda(x), \quad (1.63)$$

где решение данного уравнения будет

$$\Gamma(\xi) = \frac{d-4}{d-4 - a\Lambda^{d-4}\xi^{4-d}} \quad (1.64)$$

тогда мы можем написать, что пропагатор в это приближении ведет себя как

$$G(x, y, \lambda) = \frac{d-4}{d-4|x-y|^{d-2} - a\Lambda^{d-4}|x-y|^2}, \quad (1.65)$$

отсюда мы видим, что на больших расстояниях или  $\Lambda \rightarrow \infty$  мы перетекаем из свободной конформной теории поля во взаимодействующую.

Мы видим, что когда число измерений близко к 4, то мы можем развить эффективно теорию возмущений, которая суммирует лидирующие вклады в пределе маленького  $\epsilon = 4 - d \ll 1$ . Наш подход был очень неточным, но очень физичным.

Рассмотрим другой пример, который более точный, но менее физичный. Для этого давайте обратимся к теории скалярного поля.

$$S[\phi] = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{24} \phi^4 \right], \quad (1.66)$$

в размерностях  $d < 4$ . Давайте предположим, что  $\lambda_0 \ll 1$ , так что мы можем использовать теорию возмущений по затравочной константе связи. Далее давайте мы поменяем масштаб обрезания с  $\Lambda$  до  $\Lambda'$ . Это все еще физический способ вывода — мы просто учтем вклад всех этих квантов. Это приведет к тому, что мы получим бесконечно большое количество новых взаимодействий для поля  $\phi$ , но следуя аргументу в начале этой главы, мы должны учитывать только те поправки, которые влияют на  $\phi^4$  взаимодействие. Тогда можно показать, что в разложении по  $\lambda_0$ , мы получим следующую константу связи.

$$\lambda'_0 \Lambda'^{4-d} = \lambda_0 \Lambda^{4-d} + \frac{3}{16\pi^2} \lambda_0^2 \frac{\Lambda^{d-4} - \Lambda'^{4-d}}{4-d}, \quad (1.67)$$

тогда если мы возьмем  $\Lambda'$  очень близко к  $\Lambda$ , то тогда можно написать следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d\lambda_0(\Lambda)}{d \log \Lambda} = (d-4)\lambda_0 + \frac{3}{16\pi^2} \lambda_0^2, \quad (1.68)$$

если  $\lambda_0 \ll 1$  то мы можем пользоваться этим уравнением вблизи окрестности не взаимодействующей теории и получить, что это теория, как мы меняем  $\Lambda$ , приходит в фиксированную точку  $\lambda_0 = \frac{16\pi^2(4-d)}{3}$ , и если мы работаем вблизи 4 измерений, то мы можем доверять этой фиксированной точке. Во-первых, это означает, что наша теория вблизи четырех измерений стала слабосвязанной, и мы можем просто использовать теорию возмущения для вычисления различных наблюдаемых.

Из-за того что зависимость от параметра  $\Lambda$  пропала, и если мы перенормировали массу в  $m^2 = 0$ , то тогда мы должны ожидать, что в нашей теории восстановилась масштабная инвариантность. Можно показать, что в  $\epsilon$  приближении тензор энергии импульса действительно становится бесследовым.

Из рассмотренных выше примеров мы увидели, что важно развивать различные методы, которые делают теорию точно решаемой. Такая точная решаемость помогает нам понять, как устроена теория поля в более разных ситуациях. Поэтому всегда важно развивать методы точного решения теорий поля.



## 1.2 Цели и задачи диссертационного исследования

Целью данного диссертационного исследования было изучение и обобщение стандартных методов работы с квантовыми теориями поля. Так одной из проблем было обобщение метода предела большого  $N$  в квантовых теориях поля, где квантовая динамика теории значительно упрощается в пределе, когда число степеней свободы становится очень большим. А также изучение первых поправок по параметру разложения  $1/N$  в таких теориях. В частности, векторная модель представляет собой такую простейшую систему, где в пределе большого числа степеней свободы теория эффективно свободная, но поправки по  $1/N$  могут быть систематически изучены, и можно посчитать различные корреляторы уже во взаимодействующей теории. Другая проблема состояла в изучении общих свойств ренормализационной группы, стандартного метода, который помогает изучить динамику квантовой теории в различных пределах (больших или малых энергий). К примеру, для общей статистической или квантовой теории поля стоял открытый вопрос о возникновении интересных поведений ренормализационной группы (возникновение предельных циклов, гомоклинических орбит или даже хаотического поведения). Наконец, изучение поведения квантовых теорий поля на фоне внешних гравитационных или электромагнитных полей может дать ответы на вопросы о структуре гильбертовых пространств данных теорий и поведения корреляторов. Такой вопрос также имеет и практическое применение, так как может дать предсказания о поведении вселенной в ранних эпохах ее существования.

## 1.3 Научная новизна и практическая значимость

Результаты, представленные в диссертационной работе, являются оригинальными и новаторскими разработками автора. Они были опубликованы в ведущих российских и зарубежных журналах, а также представлены на международных конференциях. Эти исследования получили широкое признание в научном сообществе и цитируются другими авторами.

Результаты работы имеют значительное теоретическое значение для исследований в таких областях, как квантовая теория поля в различных числах измерений с большим числом степеней свободы, теория двумерной квантовой хромодинамики, теории двухлистного скрученного графена, теории ренормализационной груп-

пы, и теории  $q$ -деформированных квантовых пространств. Полученные результаты открывают новые перспективы для изучения различных физических явлений и математических объектов с использованием вышеописанных теорий.

Существенный прогресс в установлении тесных связей между современными подходами теоретической физики и фундаментальной математики, достигнутый исследовательскими группами по всему миру, оказался исключительно плодотворным для обеих дисциплин. Разработанные автором методы и полученные результаты активно применяются как отечественными, так и зарубежными научными коллективами.

## 1.4 Методология и методы диссертационного исследования

В диссертации представлены результаты, полученные с использованием как аналитических, так и численных методов. Основным инструментом для исследования квантовых теорий поля выступил метод диаграмм Фейнмана, который эффективно вычисляет поправки в рамках возмущений для взаимодействующих теорий поля. Для анализа ренормализационных групповых потоков были использованы такие методы, как разложение вблизи критической размерности и метод трансформатриц. Особое внимание уделено методам, применяемым для систем с большим числом степеней свободы, что позволило расширить рамки анализа.

Кроме того, для изучения сильно взаимодействующих систем применялись методы теории представлений и алгоритмы быстрой численной диагонализации. Также в работе использовался метод дискретного численного подсчета в калибровке светового конуса, что оказалось ключевым для исследования калибровочных теорий. Применение этих методов позволило достичь глубинного понимания сложных квантовых систем и существенно расширить существующие знания в данной области. Также были использованы методы обыкновенных автономных дифференциальных уравнений и методы динамических систем для изучения хаотической динамики.

## 1.5 Положения, выносимые на защиту диссертации

- Была изучена инфракрасная динамика квантовых полей на фоне внешних гравитационных и электромагнитных полей. Были вычислены и просуммированы лидирующие секулярно растущие петлевые вклады в теории скалярного поля на фоне пространства де-Ситтера, черных дыр и постоянного электромагнитного поля. Было показано, что эти вклады могут кардинальным образом поменять динамику систему, и переводить систему с наивным состоянием близким к вакуумному к сильно измененному состоянию.
- Был предложен метод исследования компактных объектов. Так были изучены скалярные теории поля на фоне коллапсирующих и компактных звезд. Было показано, что спектр таких теорий кардинальным образом отличается, что может стать критерием для того чтобы различать эти две ситуации.
- Было изучены ультрафиолетовые расходимости в пространстве Анти Де Ситтера. Из-за наличия "границы" данная система введет себя как "коробка" что приводит к возникновению дополнительных сингулярностей в пропагаторах скалярного поля, а следовательно к нетривиальным УФ расходимостям (в случае настоящего АдС) или ИК расходимостей (в случае изучения накрывающего пространства АдС).
- Был изучен вопрос о наличии ненулевой дебаевской массы фотона. Из-за наличия "термального" спектра в статическом патче дС связанного с рождением частиц, возникает вопрос если такая температура может быть задетектирована фотоном (в случае пространства Минковского происходит возникновение ненулевой массы Дебая). Было показано, что фотон не получает массы.
- Был выведена непрерывная теория поля для изучения скрученного двулистного графена. Это теория оказывается эквивалентна теории дираковского фермиона во внешнем неабелевом поле. Было показано, что в такой модели возникают абсолютно плоские зоны. Было показано что в такой теории можно ввести инвариант Ферми, который дает необходимое и достаточное условия для возникновения плоских зон в хиральной модели. Изучено поведение скрученного двулистного графена во внешнем магнитном поле.

- Были обобщены векторные и матричные модели. Так были изучены тензорные модели, был дан простой комбинаторный критерий когда данная теория дает мелонный предел. Было выведено уравнение Дайсона-Швингера которая дает точную двухточечную функцию в такой теории. Был рассмотрен конформный предел такой теории и изучен спектр операторов, и  $\epsilon$  разложение таких теорий.
- Был изучен суперсимметричный аналог тензорной теории. Вычислены аномальные размерности операторов в пределе большого числа полей. Было решено уравнение Дайсона-Швингера для данной теории и показано что теория унитарная и стабильная. Также была предложена новая стабильная и унитарная сильно-взаимодействующая конформная теория в трех измерениях.
- Была предложена тензорная модель конформных дефектов. Было показано как возникает уравнение Дайсона-Швингера. Была вычислена энтропия дефекта.
- Был изучен квантовый диск, в котором изометрии образуют квантовую группы а не классические группы. Были посчитаны соответствующие пропагаторы и диаграммы Виттена. Также была показано как работает голографическая дуальность для таких симметрий.
- Было изучено аналитическое продолжение различных теорий поля из евклидовой сигнатуры в минковскую. Было введено понятие Кронекеровской аномалии и были показаны, когда они возникают в различных теориях и как они влияют на динамику квантовых теорий поля. Был предложено объяснение возникновения таких "аномалий" в различных теорий поля.
- Была изучена двумерная модель КХД с фермионами в присоединенном представлении. Было показано что в теории возникает суперсимметрия при определенных значениях масс фермиона. Было представлено простое доказательство данного факта на основе изучения суперсимметричных моделей ВЗВ.
- Были изучены различные нестандартные поведения РГ-потоков. Было показано что возникает нетривиальные траектории. Такие как предельные циклы, гомоклинические траектории и даже хаотическое поведение. Была предложена

на модель комплексной цепочки Изинга, в которой возникает такая хаотическая ренормгруппа. Была показана причина возникновения такой хаотической ренормгруппы через точное решение такой модели. В случае графена с критическим зарядом, было показано возникновение циклической ренормгруппы.

- Была предложена простая модель на основе тензорной модели для изучения конформных линейных дефектов в непертурбативных теориях поля. Был посчитан спектр аномальных размерностей для данного дефекта и была вычислена энтропия дефекта.

## 1.6 Степень достоверности

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается обоснованностью применяемых методов исследования и их сравнением с другими подходами, а также публикациями в престижных международных журналах со строгой политикой рецензирования. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

## 1.7 Апробация работы

Основные результаты, полученные в диссертации, были доложены на научных семинарах и конференциях в университетах Принстона, Санта-Барбары, Миннесоты, Чикаго и Стони Брука.

- Loop corrections to Hawking radiation, Conference on Quantum fields and IR issues in de Sitter space-time, Natal, Brazil 2015
- $3 - \epsilon$  expansion in tensor models, NYU, New York 2019
- $3 - \epsilon$  expansion for supersymmetric tensor models, Quantum Gravity, Paris, France 2019
- Quantum Fields in static patch of de Sitter, Quantum Field Theory in de Sitter space-time, Mainz, Germany 2019
- Kronecker Anomalies and Gravitational Strictures, LMU, Munich 2022

- Non-Perturbative Defects in Tensor Models from Melonic Trees, Tensor Club, Lyon 2022
- Kronecker Anomalies and Gravitational Strictions, UCSB, Santa Barbara 2022
- Chaotic RG flow, University of Chicago, Chicago 2022
- Chaotic RG flow, SCGP, Stony Brook 2022
- Two dimensional models of QCD, Carnegie Mellon University, Pittsburgh 2023
- Supersymmetry in QCD2 coupled to fermions, William I. Fine Theoretical Physics Institute, Minnesota 2023
- Non-Perturbative Defects in Tensor Models from Melonic Trees, SCGP, Stony Brook 2023
- Magic Angles in Twisted Trilayer Graphene, Flatiron Institute, New York 2023
- Хаотическая ренормализационная группа, МФТИ 2024
- Введение в конформную теорию поля, МФТИ 2024
- Конформные дефекты в тензорных моделях, ИЯИ 2024
- Магические углы в скрученном двумерном графене, ФИАН 2024
- Магические углы в скрученном двумерном графене, МИАН 2024
- Конформные дефекты в тензорных моделях, ВШЭ 2024

## 1.8 Личный вклад

Все результаты, включенные в диссертацию, получены лично соискателем или при его прямом участии. Соискатель принимал непосредственное участие в выполнении всех работ и написании текстов всех публикаций. Имена соавторов указаны в соответствующих публикациях.

## 1.9 Публикации по теме диссертации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 20 печатном издании, индексируемом Web of Science и Scopus [91, 256, 194, 18, 252, 259, 241, 54, 10, 135, 7, 9, 15, 16, 8, 17, 260, 257, 258, 178]

## Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения (Глава 1), семи глав основного текста (Главы 2-8), заключения (Глава 9) и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 238 страниц, включая 28 рисунков. Список литературы содержит 303 ссылки.

## Глава 2

# Предел больших степеней свободы

### 2.1 Введение

В последнее время в литературе наблюдается большой интерес к теориям, динамические поля которых являются тензорами ранга 3 или выше (обзор см. в [154, 85, 197]). Такие теории обладают рядом интересных особенностей. Например, в большом  $N$  пределе доминируют только мелонические диаграммы, в отличие от векторных моделей, где доминируют только улиточные диаграммы [197], и матричных моделей, где в большом  $N$  пределе выживают все планарные диаграммы. Этот факт делает тензорные модели похожими на знаменитую модель Сачдева-Е-Китаева (SYK) [268, 190, 228]. Модель SYK содержит беспорядок, что затрудняет использование стандартных инструментов квантовой теории поля. Считается, что модель SYK описывает квантовые свойства экстремальных заряженных черных дыр [230, 105, 175] и поэтому может служить моделью для понимания соответствия AdS/CFT [234, 148, 295]. Она уже используется для понимания свойств червоточин [117, 231, 227, 188]. Хотя тензорные модели [154] проявляют те же свойства в большом  $N$  пределе, в них нет беспорядка, что дает нам надежду на то, что их можно будет понять при конечном  $N$  с помощью стандартных методов квантовых теорий поля. Эти методы уже принесли много интересных результатов [71, 238, 155, 293, 199, 261, 23, 35, 31, 172, 171], [200]. Мы рассмотрим суперсимметричный аналог таких теорий, который недавно рассматривался как обобщение модели SYK [112, 240, 58] или как квантовомеханическая суперсимметричная тензорная модель [68, 245, 246, 69]. Здесь мы представим аналогичную модель в непрерывной размерности  $d$ . Мы рассматриваем минимальную  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричную модель, в которой



имеется некоторое число скалярных суперполей  $\Phi_{abc}(x, \theta)$ , а индексы  $a, b, c$  идут от 1 до  $N$ . Эти поля взаимодействуют через “тетраэдрический” суперпотенциал<sup>1</sup>.

$$S = \int d^d x d^2 \theta \left[ \frac{1}{2} (D_\alpha \Phi_{abc})^2 + g \Phi_{abc} \Phi_{ab'c'} \Phi_{a'bc'} \Phi_{ab'c'} \right]. \quad (2.1)$$

Эта теория, перенормируемая в  $d < 3$ , обладает симметрией  $O(N) \times O(N) \times O(N)$ , а не  $O(N^3)$  (суперпотенциал нарушает такую симметрию, тогда как свободная теория, конечно, обладает симметрией  $O(N^3)$ ). Эта модель была предложена в работе [199] как обобщение скалярной мелонической теории. Было доказано, что в этой теории имеет так называемое мелоническое доминирование в пределе, когда  $N \rightarrow \infty, g \rightarrow 0$ , но  $gN^{\frac{3}{2}}$  остаются фиксированными [63]. Доказательство этого своеобразного факта опирается на комбинаторные свойства потенциала и поэтому применимо в любых размерностях и в различных теориях при условии, что комбинаторные свойства остаются неизменными. В случае суперсимметричных теорий Фейнмановские диаграммы, записанные в терминах компонент, выглядят довольно сложно и, на первый взгляд, не обладают мелоническим пределом, как в случае скалярной модели или модели SYK. Однако можно развить суперсимметричную версию обычной техники диаграмм Фейнмана и работать явно с суперполями  $\Phi_{abc}$  и увидеть, что комбинаторные и топологические свойства такие же, как и в случае скалярно-тензорных моделей. Поэтому доказательство доминирования мелонических диаграмм [293, 195, 199, 63, 61] применимо и в этом случае, а теория (2.1) также обладает мелоническим доминированием в большом  $N$  пределе.

Свойства таких теорий в инфракрасии можно исследовать, решая уравнения Дайсона-Швингера (ДШ), которые резко упрощаются, если теория является мелонической. А именно, доминирование мелонических диаграмм в большом  $N$  пределе можно понимать как подавление поправок к вершинным операторам в системе уравнений ДШ. Решение уравнения ДШ в ИК дает конформный пропагатор, что позволяет предположить, что теория в ИК притекает в неподвижную точку, которая описывается некоторой конформной теорией поля. Существование тензора энергии-импульса правильной размерности и спектры операторов подтверждают эту гипотезу. Поэтому возникает вопрос, можно ли описать такой переход от УФ (где мы имеем голый конформный пропагатор, определяемый коммутационными соотношениями) к ИК-области с помощью РГ-потока, используя  $\epsilon$  разложение. Бы-

<sup>1</sup>Все обозначения и некоторые полезные формулы можно найти в главе 2.6 и статье [118].

ло предпринято несколько попыток реализовать эту идею. Например, мелоническая скалярная теория в 4 размерности [122] была рассмотрена во втором порядке теории возмущений. Для этой теории была найдена мелоническая неподвижная точка РГ-потока, несмотря на то, что соответствующие константы связи являются комплексными. Комплексные константы взаимодействия указывают на то, что теория неустойчива. Например, размерности некоторых операторов имеют мнимую часть. Одной из причин неустойчивости может быть то, что потенциал не ограничен снизу, что приводит к распаду вакуумного состояния. Теория (2.1), будучи суперсимметричной, лишена этого недостатка.

Интересно, что если отбросить фермионную часть действия (2.1) и проинтегрировать вспомогательное поле, то в большом пределе  $N$  теория по-прежнему обладает мелоническим доминированием. Такая "призматическая" теория была рассмотрена в работе [125]. Решение этой теории было найдено в большом  $N$  пределе и исследованы РГ-свойства в первых двух порядках теории возмущений. В отличие от стандартной мелонической теории [122], неподвижная точка является вещественной, и разложение первого порядка  $\epsilon$  совпадает с точным решением в большом  $N$  пределе.

## 2.2 Точное решение в пределе большого $N$

В этом разделе мы попытаемся найти решение уравнений для теории (2.1) в большом  $N$  пределе. Как уже упоминалось во введении, в большом  $N$  пределе теория обладает мелоническим доминированием. Это означает, что в большом  $N$  пределе выживают только специфические диаграммы, а именно те, которые рекурсивно порождаются уравнением Дайсона-Швингера (схематически изображено на рис.(2.1)). Полученное уравнение для скалярных или фермионных теорий поля было исследовано аналитически и численно для многих различных теорий [228, 199, 243]. Например, уравнение ДШ может быть решено в ИК-пределе, и решение обладает конформной симметрией в этом пределе. В случае суперсимметричных теорий одно из важных отличий состоит в том, что можно потребовать, чтобы решение уважало суперсимметрию. Для того чтобы сделать это явно, уравнение ДШ должно быть сформулировано в терминах суперполей. Конечно, можно провести это вычисление в терминах компонент, как в работе [68], и проверить, что эти два

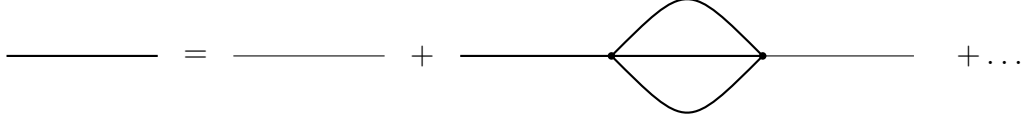


Рис. 2.1: Суперсимметричная версия уравнения Дайсона-Швингера для мелониче-ских теорий в пределе больших  $N$ .

подхода дают одинаковые ответы. Чтобы сделать обсуждение более общим, мы рассмотрим случай, когда в диаграммах имеются  $q - 1$  внутренних пропaгатора и рассматривается подходящий оператор взаимодействия [195]. Уравнение ДС в суперсимметричном случае читается как

$$G(p; \theta, \theta') = G_0(p; \theta, \theta') + \frac{\lambda^2}{16} \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 G_0(p; \theta, \theta_1) \int \prod_{i=1}^{q-1} \frac{d^d k_i}{(2\pi)^d} G(k_i; \theta_1, \theta_2) (2\pi)^d \delta^d \left( p - \sum_{i=1}^{q-1} k_i \right) G(p; \theta_2, \theta'), \quad (2.2)$$

где  $G_0(p; \theta, \theta')$  - голый суперпропaгатор (2.70),  $G(p; \theta, \theta')$  - точный суперпропaгатор и  $g = \lambda N^{\frac{3}{2}}$  - константа взаимодействия т-Хоофта. Аналогично скалярному случаю, мы рассматриваем конформный пропaгатор. Но если мы также требуем сохранения суперсимметрии и  $O(N) \times O(N) \times O(N)$  симметрии, то это дает только следующий анзац для решения

$$\langle \Phi_{abc}(p, \theta) \Phi_{a'b'c'}(-p, \theta') \rangle = \delta_{aa'} \delta_{bb'} \delta_{cc'} G(p; \theta, \theta'), \quad G(p; \theta, \theta') = A \frac{D^2 \delta(\theta - \theta')}{p^{2\Delta}}, \quad (2.3)$$

где  $\Delta < \Delta_0 = 1$ , чтобы решение было справедливо в ИК-пределе [230] (а именно, мы можем пренебречь голым пропaгатором по сравнению с точным  $G^{-1} \gg G_0^{-1}, p \rightarrow 0$ ). Подставляя форму пропaгатора в уравнение ДШ (2.2), получаем

$$A \frac{D^2 \delta(\theta - \theta')}{p^{2\Delta}} = \frac{D^2 \delta(\theta - \theta')}{p^2} + A^q \lambda^2 \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \frac{D^2 \delta(\theta - \theta_1)}{p^2} \times \times \prod_{i=1}^{q-1} \int \frac{d^d k_i}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^d \left( p - \sum_{i=1}^{q-1} k_i \right) \frac{D^2 \delta(\theta_1 - \theta_2)}{k_i^{2\Delta}} \frac{D^2 \delta(\theta_2 - \theta')}{p^{2\Delta}}. \quad (2.4)$$

Если  $\Delta < 1$  мы можем пренебречь левой частью уравнения по сравнению с правой частью в пределе  $p \rightarrow 0$ . После этого можно проинтегрировать по грасмановым переменным, используя тождества для суперпроизводной, чтобы получить

$$\lambda^2 A^q \prod_{i=1}^{q-1} \int \frac{d^d k_i}{(2\pi)^d} \frac{1}{k_i^{2\Delta}} (2\pi)^d \delta^d \left( p - \sum_{i=1}^{q-1} k_i \right) \frac{1}{p^{2\Delta-2}} = -1. \quad (2.5)$$

Это уравнение дает размерность суперполя  $\Delta = \frac{d(q-2)+2}{2q}$  и

$$A^q = \frac{(4\pi)^{\frac{d(q-2)}{2}} \Gamma^{q-1} \left( \frac{d}{2} - \frac{d-1}{q} \right) \Gamma \left( d - 1 - \frac{d-1}{q} \right)}{\lambda^2 \Gamma^{q-1} \left( \frac{d-1}{q} \right) \Gamma \left( \frac{d-1}{q} - \frac{d}{2} + 1 \right)}. \quad (2.6)$$

Из решения следует, что мы не можем работать непосредственно в размерности  $d_{\text{crit}}(q) = \frac{2q-2}{q-2}$ , поскольку голый пропагатор не подавляется в ИК-пределе, и теория, скорее всего, становится тривиальной. Например, для случая тетраэдрического потенциала  $q = 4$ ,  $d_{\text{crit}} = 3$ , поэтому тензорная мелоническая теория не является конформной в 3 измерениях. Тем не менее, мы все еще можем изучить теорию чуть ниже 3 измерений и сравнить ее, используя  $\epsilon$  разложение.

Если выбрать случай  $q = 3$ , то критическая размерность равна  $d_{\text{crit}} = 4$ , и такая мелоническая теория должна описывать конформную теорию поля в 3 измерениях. В следующем разделе мы рассмотрим эту модель более подробно.

Мы вычислили пропагатор (2.3) в импульсном представлении. Можно провести вычисления в координатном пространстве. С помощью соотношения

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} D^2 \delta(\theta - \theta') = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} (1 - ik^\mu \bar{\theta}' \gamma_\mu \theta + k^2 \bar{\theta}' \theta' \bar{\theta} \theta) = e^{\bar{\theta}' \gamma^\mu \theta \frac{\partial}{\partial x^\mu}}, \quad (2.7)$$

пропагатор в координатном представлении имеет вид

$$G(x, \theta, \theta') = \frac{B}{|x_\mu - \bar{\theta}' \gamma_\mu \theta|^{\frac{2(d-1)}{q}}}, \quad B^q = \frac{1}{4\pi^d \lambda^2} \frac{\Gamma \left( \frac{d-1}{q} \right) \Gamma \left( d - 1 - \frac{d-1}{q} \right)}{\Gamma \left( \frac{d}{2} - \frac{d-1}{q} \right) \Gamma \left( \frac{d-1}{q} - \frac{d}{2} + 1 \right)}. \quad (2.8)$$

Другой способ убедиться в том, что размерность суперполя равна  $\frac{d-1}{q}$ , - переписать действие в терминах компонент и наложить условия  $\Delta_\psi = \Delta_\phi + \frac{1}{2}$ , тогда действие содержит член

$$W(\Phi) = \Phi^q, \quad \Delta_\phi = \frac{d-1}{q}. \quad (2.9)$$

Решение (2.3) предполагает, что в ИК-пределе теория описывается некоторой конформной теорией поля (КТП). Один из интересных вопросов, который можно задать, - каков спектр двухчастичных конформных операторов в этой теории? Суперсимметричная теория (2.1) имеет различные типы двухчастичных операторов. Мы должны рассмотреть эти типы отдельно. Наиболее простые из них имеют следующую структуру [240]

$$V_{FF} = \Phi(x, \theta) \square^h \Phi(x, \theta), \quad V_{BB} = \Phi(x, \theta) \square^h D^2 \Phi(x, \theta). \quad (2.10)$$

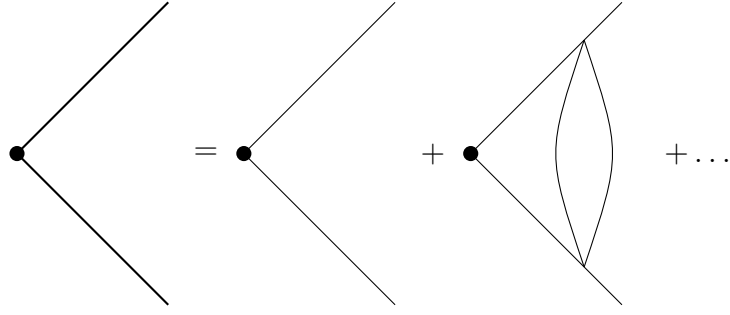


Рис. 2.2: Поправки к двухчастичному конформному оператору можно суммировать с помощью уравнения Бете-Солпитера.

Эти операторы следует рассматривать как набор операторов с разными спинами и размерностями, которые трансформируются друг через друга при преобразованиях суперсимметрии. Например, в терминах компонент (2.63) эти операторы можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
V_{FF}(x, \theta) &= \phi(x) \square^h \phi(x) + \phi(x) \square^h \psi^\alpha(x) \theta_\alpha + \\
&+ \theta^2 (\phi(x) \square^h F(x) + \square^h \phi(x) F(x) + \bar{\psi}(x) \square^h \psi(x)), \\
V_{BB}(x, \theta) &= \bar{\psi} \square^h \psi + (F \square^h \psi_\alpha + \square^h F \psi_\alpha + (\gamma^\mu \psi)_\alpha \partial_\mu \square^h \phi + (\gamma^\mu \square^h \psi)_\alpha \partial_\mu \square^h \phi) \theta^\alpha + \\
&+ \theta^2 (\partial_\mu \phi \square^h \partial_\mu \phi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \square^h \partial_\mu \psi + F \square^h F). \tag{2.11}
\end{aligned}$$

Аналогичный набор операторов рассматривался в работах [240] в двух измерениях и [68] в одном измерении. Позже мы сравним результаты этих работ с непрерывным решением для произвольного  $d$ . Мы можем попытаться добавить больше  $D^2$  в (2.10), чтобы получить больше семейств, но с помощью тождества  $(D^2)^2 = \square$  можно спустить эти операторы к рядам ВВ или FF. Поэтому мы можем рассмотреть только эти два семейства, чтобы получить весь спектр двухчастичных операторов, у которых низшая компонента имеет спин  $s = 0$ .

Как обычно, поправки к билинейным операторам в большом пределе  $N$  даются лестничными диаграммами (но опять же, по сравнению с [230, 199], эти диаграммы следует рассматривать в суперпространстве). Мы предполагаем следующий анзац для трехточечной корреляционной функции для этих семейств,

$$\begin{aligned}
G_{FF}(k, \theta, \theta') &= \langle V_{FF} \Phi(-k, \theta) \Phi(k, \theta') \rangle = \frac{\delta(\theta - \theta')}{k^{\Delta_V + 2\Delta}}, \\
G_{BB}(k, \theta, \theta') &= \langle V_{BB} \Phi(-k, \theta) \Phi(k, \theta') \rangle = \frac{D^2 \delta(\theta - \theta')}{k^{\Delta_V + 2\Delta}}, \tag{2.12}
\end{aligned}$$

где мы взяли операторы  $V_{BB}, V_{FF}$  на пространственной бесконечности и сделали

преобразование Фурье относительно пространственных координат, а  $\Delta_V$  - соответствующая размерность оператора. Вывод уравнений для размерностей  $\Delta_V$  является простым обобщением аналогичного расчета для скалярной модели [199] или модели SYK [228]. Здесь мы покажем вывод такого уравнения для операторов  $BB$ .

Добавление одной ступеньки лестницы можно рассматривать как действие следующего оператора,

$$\begin{aligned} \hat{K} &= K(p, k; \theta, \theta', \theta_1, \theta_2) = \\ &= (q-1) \prod_{i=1}^{q-2} \int \frac{d^d q_i}{(2\pi)^d} \frac{D^2 \delta(\theta_1 - \theta_2)}{q_i^{2\Delta}} \frac{D^2 \delta(\theta - \theta_1)}{p^{2\Delta}} \frac{D^2 \delta(\theta_2 - \theta')}{p^{2\Delta}} (2\pi)^d \delta^d \left( \sum q_i - (p-k) \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Действуем на (2.10) одной ступенькой лестницы,

$$(\hat{K}G_{BB})(p, \theta, \theta') = \int d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} K(p, k; \theta, \theta', \theta_1, \theta_2) G_{BB}(k, \theta_1, \theta_2). \quad (2.14)$$

Грассмановские переменные можно проинтегрировать. После этого нам остается простой интеграл

$$\begin{aligned} (\hat{K}G_{BB})(p, \theta, \theta') &= (q-1) A^q \lambda^2 D^2 \delta(\theta - \theta') \times \\ &\times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \prod_{i=1}^{q-2} \frac{d^d q_i}{(2\pi)^d} \frac{1}{q_i^{2\Delta}} \frac{1}{k^{\Delta_V + 2\Delta} p^{2\Delta - 2}} (2\pi)^d \delta^d \left( \sum q_i - (p-k) \right) = \\ &= g_B(\Delta_V) G_{BB}(p, \theta, \theta'), \end{aligned} \quad (2.15)$$

, где

$$g_B(\Delta_V) = -(q-1) \frac{\Gamma\left(\frac{2+d(q-2)}{2q}\right) \Gamma\left(\frac{(q-1)(d-1)}{4}\right) \Gamma\left(\frac{d}{4} - \frac{1}{q} - \frac{\Delta_V}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2} - \frac{1}{q} + \frac{d}{q} + \frac{\Delta_V}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2} + \frac{d-1}{q}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{q}\right) \Gamma\left(\frac{(q-1)(d-1)}{q} - \frac{\Delta_V}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} + \frac{1}{q} - \frac{d}{q} + \frac{\Delta_V}{2}\right)}. \quad (2.16)$$

Для того чтобы оператор был примарным, должно выполняться уравнение  $g_B(\Delta_V) = 1$ . Аналогичное уравнение можно записать и для оператора  $V_{FF}$ , но при этом видно, что

$$g_F(\Delta_V) = g_B(\Delta_V - 1), \quad (2.17)$$

Это наводит на мысль, что мы можем построить больший мультиплет и усилить суперсимметрию до  $\mathcal{N} = 2$  (позже мы увидим, что на самом деле этого не происходит, поскольку не существует дополнительных фермионных двойников для завершения супермультиплета).

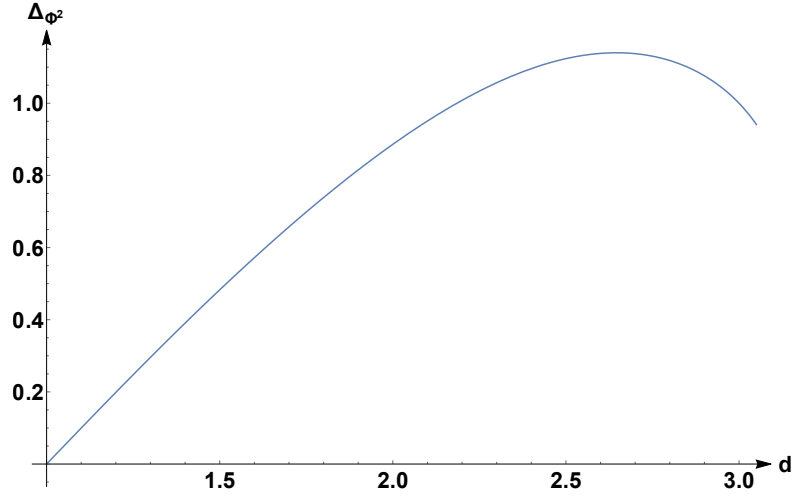


Рис. 2.3: Размерность оператора  $\Phi^2$  как функции размерности пространства-времени. В пределе  $d \rightarrow 1$  размерность оператора зануляется.

С этого момента мы будем рассматривать только случай  $q = 4$ , чтобы изучать теорию вблизи  $d = 3 - \epsilon$ . Таким образом, мы можем получить  $\epsilon$  разложение размерности оператора  $\Phi^2$  в большом  $N$  пределе

$$\Delta_{\Phi^2} = 1 + \epsilon + 3\epsilon^2 - \frac{\pi^2 + 24}{4}\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (2.18)$$

График  $\Delta_{\Phi^2}$  в зависимости от размерности изображён на рисунке 2.3. Аналогично получаем размерность оператора  $\Phi D^2 \Phi$

$$\Delta_{\Phi D^2 \Phi} = 2 + \epsilon + 3\epsilon^2 - \frac{\pi^2 + 24}{4}\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (2.19)$$

Можно обсудить размерность несинглетных операторов вида  $\Phi_{abc}\Phi_{a'bc}$ . Уравнение для размерности этого оператора можно переписать в виде

$$g_B(\Delta_{aa'}) = q - 1, \quad (2.20)$$

где коэффициент  $q - 1$  следует из комбинаторных рассуждений, а  $\Delta_{aa'}$  - размерность оператора. Мы можем получить  $\epsilon$  разложение этого оператора вблизи трех измерений для  $q = 4$

$$\Delta_{aa'} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{\pi^2}{24}\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (2.21)$$

Позже мы покажем, что решение совпадает с разложением по  $\epsilon$ , используя стандартную теорию возмущений.

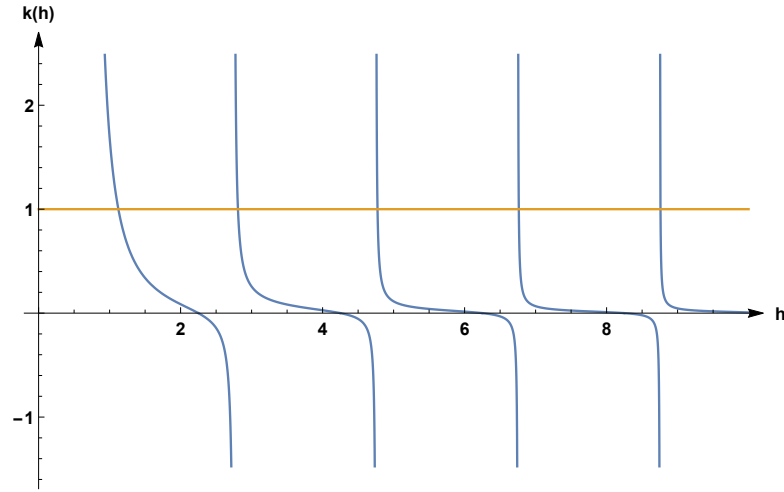


Рис. 2.4: Размерность оператора  $\Phi^2$  можно найти графически. График  $k(h)$  построен для случая  $d = 2.5$ .

Исходя из этого, следующим шагом будет изучение спектра операторов со спином

$$V_{FF}^s = \Phi(x, \theta) \square \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_s} \Phi(x, \theta), \quad V_{BB}^s = \Phi(x, \theta) \square \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_s} D^2 \Phi(x, \theta), \quad (2.22)$$

с соответствующими модификациями для анзатца. Например, для спектра операторов ВВ анзатц имеет вид

$$G_{\mu_1 \dots \mu_s, BB}^s(k, \theta, \theta') = \langle V_{\mu_1 \dots \mu_s, BB}^s \Phi(-k, \theta) \Phi(k, \theta') \rangle = \frac{D^2 \delta(\theta - \theta') k_{\mu_1} \dots k_{\mu_s}}{k^{\Delta_V + \frac{d+1}{2} + s}}. \quad (2.23)$$

В этом случае мы рассматриваем произвольно выбранный нуль-вектор  $\xi^\mu$  и считаем свертку анзатца (2.23) с вектором  $\xi$ . После этого можно проинтегрировать грасмановские переменные и провести интегрирование по вещественному пространству с помощью соотношения [122]:

$$\int d^d x \frac{(\xi \cdot x)^s}{x^{2\alpha} (x-y)^{2\beta}} = \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - \alpha + s\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - \beta\right) \Gamma\left(\alpha + \beta - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(d + s - \alpha - \beta)} \frac{(\xi \cdot y)^s}{y^{2\alpha + 2\beta - d}}. \quad (2.24)$$

В конечном счете, уравнение для размерности при заданном спине  $s$  имеет вид

$$g_B(d, \Delta_V, s) = -(q-1) \frac{\Gamma\left(\frac{2+d(q-2)}{2q}\right) \Gamma\left(\frac{(q-1)(d-1)}{4}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2} + \frac{d-1}{q}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{q}\right)} \times \\ \times \frac{\Gamma\left(\frac{d}{4} - \frac{1}{q} - \frac{\Delta_V - s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2} - \frac{1}{q} + \frac{d}{q} + \frac{\Delta_V + s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{(q-1)(d-1)}{q} - \frac{\Delta_V - s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} + \frac{1}{q} - \frac{d}{q} + \frac{\Delta_V + s}{2}\right)} = 1, \quad (2.25)$$



Можно было бы ожидать, что существует решение при любых  $d$  и  $s = 2$  с  $\Delta = d$ , поскольку существует тензор энергии-импульса. Однако найти такое решение не удастся. Причина довольно проста. Во-первых, в полевых разложениях операторов ВВ и FF нет тензора энергии-импульса. Во-вторых, у тензора энергии-импульса есть суперпартнер  $\mathcal{S}_\mu^\alpha$  (соответствующий супертрансляциям), обладающий спином  $\frac{3}{2}$ , и поэтому для его нахождения необходимо рассмотреть совсем другое семейство операторов, низшей компонентой которого является поле Рарита-Швингера. А именно, рассмотрим конформный примарный оператор Ферми

$$V_{BF, \mu_1 \dots \mu_{2n+1}}(x, \theta) = \partial_{\mu_i}^{2n+1} \Phi(x, \theta) D_\alpha \Phi(x, \theta), \quad (2.26)$$

, где для получения первичного оператора следует подставить нечетное число производных по пространству-времени. Действительно, если мы рассмотрим нулевое число производных

$$V_{BF} = \Phi_{abc} D_\alpha \Phi_{abc} = \frac{1}{2} D_\alpha (\Phi_{abc}^2), \quad (2.27)$$

, то это просто потомок оператора FF. Чтобы получить мультиплет, мы должны спроецировать операторы (2.26) на конкретную компоненту. Анзац для трехточечной функции имеет следующий вид

$$\langle V_{BF} \Phi(k, \theta) \Phi(-k, \theta') \rangle = \frac{D_\alpha \delta(\theta - \theta')}{k^{\Delta_V + 2\Delta}}. \quad (2.28)$$

Спектр размерностей полей даётся следующим уравнением

$$g_{BF}(d, \Delta_V, s) = -g_B \left( d, \Delta_V - \frac{1}{2}, s - \frac{1}{2} \right) = 1, \quad (2.29)$$

где спин должен быть выбран в виде  $s = 2n - \frac{1}{2}$ . Теперь мы можем попытаться найти тензор энергии импульса и его суперпартнера. И действительно, при любых  $d, q$  и  $s = \frac{3}{2}$  существует оператор с размерностью  $\Delta = d - \frac{1}{2}$ , который соответствует обычному супермультиплету тензора энергии-импульса.

В этот момент можно задаться вопросом, является ли ток  $J_{aa'}$ , ответственный за преобразования  $O(N)$ , примарным оператором. Суперсимметричный мультиплет, содержащий ток, должен быть также супермультиплетом Ферми со спином  $s = 1/2$  (этот оператор не является синглетным, и поэтому (2.26) неприменим). Ток должен удовлетворять уравнению

$$g_{BF}^{aa'}(d, \Delta_V, s) = \frac{1}{3} g_{BF}(d, \Delta_V, s) = 1, \quad (2.30)$$

при любых  $d$  и  $q$  всегда существует решение  $\Delta_V = d - 3/2$ . Видно, что размерность квадрата этого оператора дается прямой суммой размерностей  $\Delta_{J\bar{J}} = 2\Delta_V = 2d - 3$ . Этот оператор становится релевантным, когда  $\Delta_{J\bar{J}} = 2d - 3 \leq d - 1$ , где минус 1, приходит из учета размерности суперпространства. Отсюда видно, что оператор становится маргинальным в  $d = 2$  и релевантным в  $d < 2$ . Этот дополнительный маргинальный оператор в  $d = 2$  может дестабилизировать нашу конформную теорию поля. Единственным исключением является случай  $N = 1$ , когда теория не имеет никакой непрерывной симметрии и обладает суперпотенциалом  $\Phi^4$ . В  $d = 2$  эта теория перетекает в  $m = 4$  суперконформную минимальную модель, которая имеет центральный заряд  $c = 1$ .<sup>2</sup>

Соотношение (2.2) можно рассматривать как обобщение уравнения для ядра в 2 измерениях, полученного в работе [240]. В этом случае они рассмотрели две размерности,  $h = \frac{\Delta+s}{2}$  и  $\tilde{h} = \frac{\Delta-s}{2}$ , и можно проверить, что

$$\begin{aligned} k(h, \tilde{h}) &= g_B(d = 2, h + \tilde{h}, h - \tilde{h}) = \\ &= -(q - 1) \frac{\Gamma^2(1 - 1/q) \Gamma(1/q - \tilde{h}) \Gamma(1/q + h)}{\Gamma^2(1/q) \Gamma(1 - 1/q - \tilde{h}) \Gamma(h + 1 - 1/q)}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

что совпадает с уравнением (7.17) в [240].

Соотношение (2.29) также показывает, что если существует скалярный билинейный мультиплет с размерностью  $h$ , то не существует оператора  $BF$  с более высоким спином и размерностью  $\Delta = \Delta + \frac{1}{2}$ . Это показывает, что мы не можем завершить  $\mathcal{N} = 2$  супермультиплет. Интересно, что в  $d = 1$  есть аргумент, утверждающий, что оно должно произойти. По сути, он вытекает из того, что группа диффеоморфизмов суперпреобразований в одном измерении включает в себя  $\mathcal{N} = 2$  супералгебру [240].

Наконец, мы обсудим размерность четырехчастичных операторов, поскольку существует связь между их размерностью и собственными значениями матрицы  $\frac{\partial \beta_i}{\partial g_j}$ . Мы можем найти размерность таких операторов в большом  $N$  пределе. Например, в матричных моделях аномальная размерность оператора с двойным следом равна сумме аномальных размерностей соответствующих операторов с одиночным следом. С помощью того же анализа мы получаем, что аномальная размерность

---

<sup>2</sup>Я хотел бы поблагодарить И.Р.Клебанова за указание на эти факты

двойного следового оператора равна

$$\Delta_{\Phi^4} = 2\Delta_{\Phi^2} = 2 + 2\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.32)$$

Аналогичный анализ дает, что

$$\Delta_{\text{Pillow}} = 2\Delta_{aa'} = 2 + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.33)$$

Наконец, размерность тетраэдрического оператора можно определить как размерность оператора  $\Phi_{abc}D^2\Phi_{abc}$  (это следует из уравнений движения), и это даёт нам

$$\Delta_{\text{Tetra}} = 2 + \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.34)$$

Можно попытаться изучить поведение модели (2.1) вблизи размерности 1. Случай  $d = 1$  суперсимметричных тензорных моделей был рассмотрен недавно (см. [68]). Было обнаружено, что суперсимметрия нарушается в ИК-области. Самый простой способ убедиться в этом - предположить конформный анзац и подставить его в уравнение ДШ (2.2). Решение предлагает  $\Delta = 0$  в одном измерении, но константа или логарифм функции не удовлетворяют уравнению ДШ. Конформное решение, найденное в [68], показывает, что размеры компонент суперполя не связаны друг с другом обычными суперсимметричными соотношениями. Может оказаться, что для системы в одном измерении конформное решение не описывает истинное состояние вакуума, в то время как истинный вакуум соблюдает суперсимметрию, а пропагаторы экспоненциально распадаются на больших расстояниях. Это можно показать, изучив устойчивость конформного решения способом, описанным в [188] для двух связанных моделей SYK.

Кроме того, если рассмотреть предел  $d \rightarrow 1$  в уравнениях, полученных в предыдущих разделах, то пропагатор не имеет гладкого предела в одном измерении, а ядро равно константе  $\lim_{d \rightarrow 1} g_B(d, h, s) = -1$ . Последний факт подтверждает, что в одном измерении конформное ИК-решение не соблюдает суперсимметрию. Но в окрестности размерности 1 все работает нормально. Таким образом, можно изучить  $1 + \epsilon$ -разложение. Мы рассмотрим случай тензорных моделей для  $q = 4$ . Например, размерность оператора  $\Phi^2$  составляет

$$\Delta_{\Phi^2} = \epsilon - \frac{\pi^2}{48}\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad \Delta_{\Phi D^2\Phi} = 1 + \epsilon - \frac{\pi^2}{48}\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (2.35)$$

А размерность цветных операторов  $\Phi_{abc}\Phi_{a'bc}$  составляет

$$\Delta_{aa'} = \frac{3}{4}\epsilon - \frac{3\pi^2}{256}\epsilon^3 + \frac{9\zeta(3)}{128}\epsilon^4 + \mathcal{O}(\epsilon^5) \quad (2.36)$$

Было бы интересно получить эти результаты, рассматривая одномерную суперсимметричную мелоновскую квантовую механику, и поднять решение до размерности  $1 + \epsilon$ . Или просто вывести эти результаты, начиная с конформного решения, найденного в одном измерении [68], и показать, что в более высоких измерениях суперсимметрия немедленно восстанавливается.

## 2.3 Суперсимметричная модель SYK с $q = 3$ в $d = 3$

В предыдущем разделе мы в основном работали с тензорными моделями в нецелых измерениях. Основная проблема, которая не позволяла нам работать непосредственно в 3 измерениях, заключалась в том, что критической размерностью для такого взаимодействия является  $d_{\text{cr}} = \frac{2q-2}{q-2} = 3$ , а это значит, что непосредственно в 3 измерениях конформное IR-решение не работает. Тем не менее, если рассматривать случай  $q = 3$ , то критическая размерность становится  $d_{\text{cr}} = 4$  и, следовательно, должна прекрасно работать в 3 измерениях. К сожалению, мы не знаем никакой  $q = 3$  тензорной модели и, чтобы как-то изучить эту мелоническую модель, рассмотрим SYK-подобную модель с беспорядком, которая является частным случаем моделей, рассмотренных в работе [240].

Таким образом, мы попытаемся изучить следующую модель

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (D\Phi_i)^2 + C_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k, \quad \langle C_{ijk}^2 \rangle = \frac{J^2}{3N^2}, \quad i, j, k = 1, \dots, N, \quad (2.37)$$

, где мы рассматриваем беспорядочную константу связи  $C_{ijk}$ . Можно было бы опасаться, что такая теория нарушает причинность, поскольку предполагается, что поле  $C_{ijk}$  имеет одно и то же значение во всем пространстве-времени, и поэтому возбуждение такого поля изменяет его значение везде, нарушая тем самым его значение повсюду, нарушая тем самым причинность. Но мы требуем сначала зафиксировать значение  $C_{ijk}$ , которое делает теорию беспорядочной, а затем усреднить по этому полю. Это означает, что мы не можем возбудить поле  $C_{ijk}$  и нарушить причинность.

Эта модель похожа на тензорную, рассмотренную в предыдущем разделе, поскольку в большом  $N$  пределе опять выживают только мелонические диаграммы, но уже с двумя пропагаторами в каждом мелоне. Поэтому формулы, выведенные в предыдущем разделе, применимы и в этом случае, и с помощью замены  $\lambda \rightarrow J$  и

выбора  $q = 3$  мы можем восстановить большое  $N$  решение этой модели. Например, пропагатор в этом случае имеет вид

$$G(x, \theta, \theta') = \frac{B}{|x_\mu - \bar{\theta}' \gamma_\mu \theta|^{\frac{4}{3}}}, \quad B^3 = \frac{1}{12\sqrt{3}\pi^3 J^2}, \quad (2.38)$$

, а размерность поля  $\Phi_i$  равна  $\Delta = \frac{2}{3}$ . Спектр операторов снова можно разделить на три сектора, описанные в предыдущем разделе. Уравнение для операторов ВВ определяется уравнением

$$g_{BB}^{3,3}(h, s) = -\frac{2^{\frac{4}{3}} \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{2}{3} - \frac{h}{2} + \frac{s}{2}) \Gamma(\frac{1}{6} + \frac{h}{2} + \frac{s}{2})}{3\Gamma(\frac{1}{6}) \Gamma(\frac{4}{3} - \frac{h}{2} + \frac{s}{2}) \Gamma(\frac{5}{6} + \frac{h}{2} + \frac{s}{2})}, \quad (2.39)$$

где  $s$  - спин, который должен быть выбран четным. Можно попытаться найти спектры низколежащих состояний (2.5)

$[\Phi^2]_{\theta=0} s = 0$	$h = 1.69944, 3.42951, 5.38013, 7.36259, 9.354, \dots$
$[D_\alpha(\Phi^2)]_{\theta=0} s = 1/2$	$h = 2.19944, 3.92951, 5.88013, 7.86259, 9.854, \dots$
$[\Phi \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \Phi]_{\theta=0} s = 2$	$h = 3.51911, 5.39016, 7.3654, 9.35514, 11.3496, \dots$
$[D_\alpha(\Phi \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \Phi)]_{\theta=0} s = 5/2$	$h = 4.01911, 5.89016, 7.8654, 9.85514, 11.8496, \dots$

Легко видеть, что спектр имеет следующее асимптотическое поведение при больших спинах

$$h \approx \frac{4}{3} + 2n + s + \mathcal{O}(1/n, 1/s), \quad n \rightarrow \infty, s \rightarrow \infty.$$

На линии  $h = \frac{d}{2} + i\alpha$  ядро комплексное, это связано с тем, что в пространстве двухточечных функций нет хорошо определенной метрики [240]. Поэтому нет проблем с комплексными модами, которые могли бы разрушить конформное решение в ИК [188]. Таким образом,  $q = 3$  суперсимметричная модель SYK устойчива, по крайней мере, в канале ВВ. Также можно проверить, что в комплексной плоскости нет дополнительных решений уравнения  $g_{BB}^{3,3}(h, s) = 1$ , кроме тех, что лежат на вещественной прямой. Спектр операторов FF совпадает со спектром операторов ВВ, но смещен с  $h \rightarrow h + 1$ , поэтому мы можем не беспокоиться о неустойчивости теории в этом секторе.

Аналогичные расчёты можно провести для серии ВФ

$$g_{BF}^{3,3}(h, s) = -g_{BB}^{3,3}\left(h - \frac{1}{2}, s - \frac{1}{2}\right), \quad (2.40)$$

, где спин  $s$  должен иметь вид  $s = 2n - \frac{1}{2}$ . Можно заметить, что существует решение  $g_{BF}^{3,3}(5/2, 3/2) = 1$ , соответствующее существованию супертока и тензора энергии

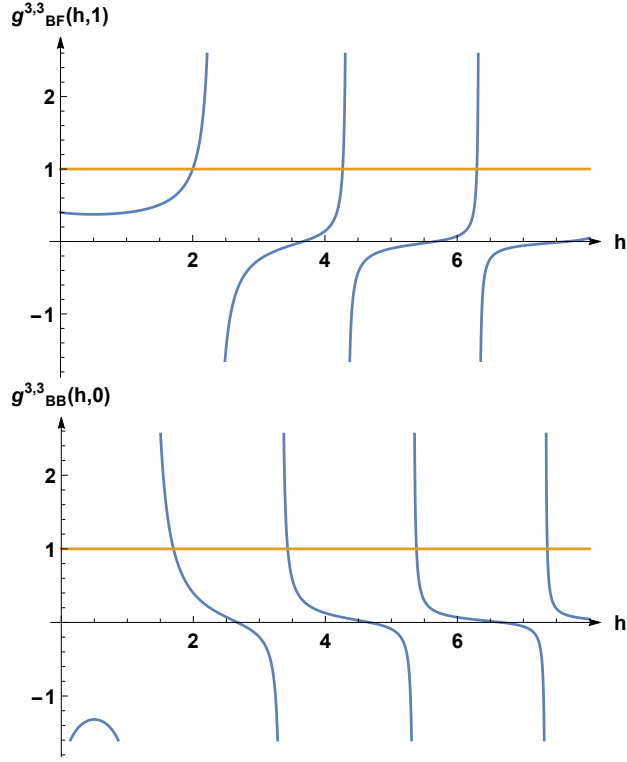


Рис. 2.5: Графики функций  $g_{BF}^{3,3}(h, 1)$ ,  $g_{BB}^{3,3}(h, 0)$  которые дают уравнения на размерности примарных полей в модели (2.37)

импульса (тензор энергии импульса не виден непосредственно, поскольку принадлежит супермультиплету супертока, но если изучать теорию в терминах компонент, то, конечно, найдется тензор энергии импульса). Дадим список некоторых низколежащих операторов в секторе FF (2.5)

$[\partial_\mu \Phi D_\alpha \Phi]_{\theta=0}$	$s = \frac{3}{2} : h = 2.5, 4.76759, 6.79738, 8.80934, 10.8157, \dots$
$[D_\beta (\partial_\mu \Phi D_\alpha \Phi)]_{\theta=0}$	$s = 2 : h = 3, 5.26759, 7.29738, 9.30934, 11.3157, \dots$
$[\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} \Phi D_\alpha \Phi]_{\theta=0}$	$s = \frac{7}{2} : h = 4.15398, 6.28752, 8.30627, 10.3143, 12.3189, \dots$
$[\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} D_\beta (\Phi D_\alpha \Phi)]_{\theta=0}$	$s = 4 : h = 4.65398, 6.78752, 8.80627, 10.8143, 12.8189, \dots$

Спектр имеет следующую форму асимптотического поведения

$$h \approx \frac{5}{6} + 2n + s + \mathcal{O}(1/n, 1/s), n \rightarrow \infty.$$

Ядро снова комплексное на главной линии, но если выбрать  $s = \frac{1}{2}$ , то будет дополнительное решение уравнения  $g_{BF}^{3,3} = 1$  в точке  $h = 1 + 0.496i$ , но поскольку оно не на главной линии и такое  $s$  недопустимо, то нам не нужно беспокоиться об этой комплексной моде и ожидать, что она сможет нарушить конформное решение. Таким

образом, эта  $q = 3$  суперсимметричная модель SYK может дать нам конформную теорию поля, которая является мелонической и устойчивой в  $d = 3$ .

## 2.4 $3 - \epsilon$ разложение

В этом разделе мы продолжаем исследование суперсимметричной тензорной модели (2.1) с точки зрения  $\epsilon$  разложения. Вычисления аналогичны тем, что проводились в работах [122, 125, 32]. Мы включаем все возможные  $O(N)^3$  симметричные взаимодействия, которые соблюдают суперсимметрию. Таким образом, суперпотенциал имеет следующий вид

$$W(\Phi) = g_1 \Phi_{abc} \Phi_{ab'c'} \Phi_{a'bc'} \Phi_{a'b'c} + \\ + \frac{g_2}{3} (\Phi_{abc} \Phi_{a'bc} \Phi_{ab'c'} \Phi_{a'b'c'} + \Phi_{abc} \Phi_{ab'c} \Phi_{a'bc'} \Phi_{a'b'c} + \Phi_{abc} \Phi_{abc'} \Phi_{a'b'c} \Phi_{a'b'c'}) + g_3 (\Phi_{abc}^2)^2, \quad (2.41)$$

По сравнению с "призматической" теорией [125], которая имеет 8 констант связи, суперсимметричная теория имеет только 3; это значительное упрощение.

Рассмотрим сначала общую перенормируемую  $d = 3$  теорию  $\mathcal{N} = 1$  суперполей  $\Phi^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$S[\Phi_i] = \int d^3 x d^2 \theta \left[ \frac{1}{2} (D\Phi_i)^2 + \frac{Y_{ijkl}}{4!} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \Phi_l \right], \quad (2.42)$$

где  $Y_{ijkl}$  - вещественный симметричный тензор. Адаптируя результаты из [22, 173], находим, что двухпетлевые поправки к гамма- и бета-функциям составляют

$$\gamma_{ab}^{(2)} = \frac{1}{3(8\pi)^2} Y_{ajkl} Y_{bjkl}, \\ \beta_{abcd}^{(2)} = \frac{1}{3(8\pi)^2} Y_{ijkl} (Y_{jkla} Y_{bcdi} + Y_{jklb} Y_{cdai} + Y_{jklc} Y_{acdi} + Y_{jkld} Y_{abci}) + \\ + \frac{2}{(8\pi)^2} (Y_{anom} Y_{bfom} Y_{nfc} + Y_{anom} Y_{cfom} Y_{nfb} + Y_{anom} Y_{dfom} Y_{nfb} + \\ + Y_{bnom} Y_{cfom} Y_{nfac} + Y_{bnom} Y_{dfom} Y_{nfac} + Y_{cnom} Y_{dfom} Y_{nfac}). \quad (2.43)$$

Эти двухпетлевые результаты тесно связаны с результатами в не суперсимметричной теории со связью Юкавы  $\frac{1}{4} Y_{ijkl} \psi^i \psi^j \phi^k \phi^l$  (см. [173]), за исключением того, что суперсимметрия требует, чтобы  $Y_{ijkl}$  была полностью симметричной.

Подставляя  $Y_{ijkl}$ , соответствующий суперпотенциалу (2.41), находим из (2.43):

$$\begin{aligned} \gamma_{abc,a'b'c'}^\Phi &= \delta_{aa'}\delta_{bb'}\delta_{cc'}\gamma^\Phi \\ \gamma^\Phi &= \frac{1}{6\pi^2} [12g_2g_1(1+N+N^2) + 6g_3^2(2+N^3) + 3g_1^2(2+3N+N^3) + \\ &+ g_2^2(5+9N+3N^2+N^3) + 36g_3g_1N + 12g_3g_2(1+N+N^2)] \end{aligned} \quad (2.44)$$

и

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\epsilon g_1 + \frac{2}{9\pi^2} (6g_1(12g_3^2(N^3+11) + g_2^2(N^3+6N^2+30N+29) + \\ &+ 12g_3g_2(2N^2+5N+5)) + \\ &+ 9g_1^3(N^3+12N+8) + 18g_1^2(g_2(4N^2+7N+16) + 24g_3N) + \\ &+ 2g_2^2(g_2(2N^2+13N+24) + 72g_3)), \\ \beta_2 &= -\epsilon g_2 + \frac{2}{9\pi^2} (g_2(72g_3^2(N^3+11) + g_2^2(7N^3+36N^2+162N+194) + \\ &+ 36g_3g_2((5N^2+9N+16)) + \\ &+ 54g_1^3(N^2+N+4) + 18g_1^2(g_2(N^3+3N^2+27N+26) + 18g_3(N+2)) + \\ &+ 18g_2g_1(g_2(7N^2+21N+32) + 48g_3(N+1))), \\ \beta_3 &= -\epsilon g_3 + \frac{2}{9\pi^2} (108g_3^3(N^3+4) + 252g_2g_3^2(N^2+N+1) + 7g_2^3(N^2+3N+5) + \\ &+ 18g_1^2(2g_3(N^3+3N+2) + g_2(N^2+N+4)) + 27g_1^3N + \\ &+ 12g_2^2g_3(N^3+3N^2+15N+14) + \\ &+ 36g_1(2g_2^2(N+1) + 2g_3g_2(2N^2+2N+5) + 21g_3^2N)) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Если подставить  $g_1 = g_2 = 0$ , то симметрия усиливается до  $O(N^3)$  и соответствует векторной модели  $O(n)$ , которая рассматривалась в [22].<sup>3</sup> Для суперсимметричной  $O(n)$  модели с суперпотенциалом  $g(\Phi^i\Phi^i)^2$ ,

$$\beta_g = -\epsilon g + \frac{24(n+4)}{\pi^2} g^3 + O(g^5), \quad (2.46)$$

в согласии с [22].

Если мы выберем  $N = 1$ , то константы связи  $g_1, g_2, g_3$  станут вырожденными, поскольку они описывают один и тот же оператор. Поэтому для получения правильного выражения необходимо сложить бета-функции. И действительно, если мы

---

<sup>3</sup>Обратите внимание, что там рассматривался случай  $SU(n)$ , который соответствует  $N^3 = 2n$ , и их определение  $\gamma^\Phi$  включает фактор два



выберем  $N = 1$  и просуммируем связи, то получим

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \mu \frac{d(g_1 + g_2 + g_3)}{d\mu} = -\epsilon(g_1 + g_2 + g_3) + \frac{120}{\pi^2}(g_1 + g_2 + g_3)^3, \quad (2.47)$$

, что является правильной бета-функцией для теории с суперпотенциалом  $(g_1 + g_2 + g_3)\Phi^4$  для одного кирального суперполя  $\Phi$ . Этот частный случай нашей теории является конформным во всем диапазоне  $2 \leq d < 3$ . Действительно, в  $d = 2$  суперсимметричная теория  $\mathcal{N} = 1$  с суперпотенциалом  $\Phi^m$  для одного суперполя  $\Phi$  перетекает в суперконформную минимальную модель с центральным зарядом

$$c = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{8}{m(m+2)} \right). \quad (2.48)$$

Поэтому случай  $N = 1$  супертензорной модели дает  $m = 4$ ,  $c = 1$  суперминимальную модель в  $d = 2$ . Для  $N > 2$  супертензорная модель  $O(N)^3$ , как ожидается, будет конформной в  $2 < d < 3$ , но не в  $d = 2$ .

Рассмотрим большой  $N$  предел, в котором мы фиксируем константы связи следующим образом:

$$g_1 = \frac{\pi \sqrt{2\epsilon} \lambda_1}{2 N^{\frac{3}{2}}}, \quad g_2 = \frac{\pi \sqrt{2\epsilon} \lambda_2}{2 N^{\frac{5}{2}}}, \quad g_3 = \frac{\pi \sqrt{2\epsilon} \lambda_3}{2 N^{\frac{7}{2}}}. \quad (2.49)$$

Применяя это к формуле (2.4), получаем

$$\begin{aligned} \gamma_\Phi &= \epsilon \frac{\lambda_1^2}{4}, & \beta_1 &= -\lambda_1 + \lambda_1^3, \\ \beta_2 &= -\lambda_2 + 2\lambda_2\lambda_1^2 + 6\lambda_1^3, & \beta_3 &= -\lambda_3 + 2(2\lambda_3 + \lambda_2)\lambda_1^2 + 3\lambda_1^3. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Отсюда можно найти неподвижную точку в большом  $N$  пределе. А именно,

$$\lambda_1^\infty = \pm 1, \quad \lambda_2^\infty = \mp 6, \quad \lambda_3^\infty = \pm 3, \quad \Delta_\Phi = \frac{d-2}{2} + \gamma_\Phi = \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{4}. \quad (2.51)$$

Мы можем попытаться вычислить  $1/N$  поправки к этим результатам, чтобы получить

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right), & \lambda_2 &= -6 + \frac{20}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right), \\ \lambda_3 &= 3 - \frac{16}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right), & \gamma_\Phi &= \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Аномальная размерность оператора поля материи  $\Phi$  совпадает с точной размерностью поля при решении уравнения ДШ, найденного выше. Это может указывать на то, что поправки к РГ-уравнениям (2.4) подавляются в большом  $N$  пределе. Было

$N$	$\frac{\lambda_1}{\lambda_1^\infty}$	$\frac{\lambda_2}{\lambda_2^\infty}$	$\frac{\lambda_3}{\lambda_3^\infty}$
100000	1.000	1.000	1.000
10000	1.000	1.001	1.002
1000	1.000	0.995	0.995
100	1.001	0.953	0.950
10	1.033	0.691	0.670
5	1.068	0.546	0.527
2	1.049	0.350	0.322
1	1.093	0.273	0.139

Таблица 2.1: Положение фиксированной точки РГ-поток как функции  $N$ . Видно что предел больших  $N$  хорошо работает при малых  $N$ .

бы интересно изучить эти подавления в  $N$  для общего суперпотенциала (2.41) с комбинаторной диаграммной точки зрения и сравнить результаты с исследованием решений уравнений (2.4) для конечного  $N$ .

Если рассмотреть неподвижную точку (2.51) потока РГ, управляемого уравнениями (2.4), и попытаться спуститься к конечной  $N$ , то можно обнаружить, что решение существует всегда (см. таблицу (2.1)) и довольно близко к найденной неподвижной точке (2.51), в отличие от "призматической" модели, где мелоническая неподвижная точка существует только при  $N > 54$  [125].

Мы можем изучить размерность различных операторов в неподвижной точке (2.51). Одним из таких операторов является  $\Phi_{abc}^2$ , который принадлежит спектру  $BB$ . Мы можем найти, что аномальная размерность этого оператора равна

$$\Delta_{\Phi^2} = \Delta_{\Phi^2}^0 + 2\gamma_\Phi + \gamma_{\Phi^2} = 1 + \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.53)$$

где мы использовали соотношение  $\gamma_{\Phi^2} = 6\gamma_\Phi$ , которое справедливо только до второго порядка теории возмущений. Ответ совпадает с точным решением, найденным ранее (2.18).

Как видно, неподвижная точка (2.51) является ИК-устойчивой, что означает, что размерность операторов больше размерности пространства-времени. Действительно, линеаризованные уравнения РГ-потока вблизи неподвижной точки (2.51)

имеют следующие собственные значения

$$\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial\lambda_j}\right) = \begin{pmatrix} -1 + 3\lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 4\lambda_2\lambda_1 + 18\lambda_1^2 & -1 + 2\lambda_1^2 & 0 \\ 4(2\lambda_3 + \lambda_2)\lambda_1 + 9\lambda_1^2 & 2\lambda_1^2 & -1 + 4\lambda_1^2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = [2, 1, 3], \quad (2.54)$$

но, как известно, собственные значения этой матрицы дают размерность операторов

$$\Delta_i = d - \epsilon + \Lambda_i. \quad (2.55)$$

Таким образом, получаем.

$$\begin{aligned} \Delta_{\Phi^4} &= 2 - \epsilon + 3\epsilon = 2 + 2\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \Delta_{\text{pillow}} &= 2 - \epsilon + \epsilon = 2 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \Delta_{\text{tetra}} &= 2 - \epsilon + 2\epsilon = 2 + \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Это находится в согласии с большим решением  $N$ . Как видно,  $\Lambda_i > 0$  указывает на то, что неподвижная точка ИК устойчива. Согласие между точным решением при больших  $N$  и пертурбативным  $\epsilon$  разложением указывает на то, что существует хороший поток от УФ к ИК, где голый, свободный пропагатор переходит в тот, который находится прямым решением ДШ-уравнений (2.2). Изучение поправок высших петель может помочь лучше понять это соотношение.

## 2.5 $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия

Можно попытаться рассмотреть  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрию и изучить свойства такой модели. Здесь мы не будем приводить решение соответствующего уравнения ДШ, а просто вычислим бета-функции и найдем неподвижную точку полученных уравнений. Модель SYK с  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрией была рассмотрена в работе [58].

Теория аналогична случаю  $\mathcal{N} = 1$ . Она может быть получена путем размерной редукции из  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметрии в 4 измерениях. В этом случае мы имеем набор киральных суперполей  $\Psi_{abc}$  с действием

$$S = \int d^3x d^2\theta d^2\bar{\theta} \bar{\Psi}_{abc} \Psi_{abc} + \int d^3x d^2\theta W(\Psi_{abc}), \quad \bar{D}_\alpha \Psi_{abc} = 0, \quad (2.57)$$

где суперпотенциал берётся таким же, как и в случае  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметрии. Бета-функция для общего суперпотенциала была рассмотрена в работе [138]. Бета-функция получает поправки только от перенормировок поля, что означает, что она

имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \beta_{1,2,3} &= (-\epsilon + 4\gamma^\Phi) g_{1,2,3} \\ \gamma^\Phi &= \frac{1}{6\pi^2} (12g_2g_1(1+N+N^2) + 6g_3^2(2+N^3) + 3g_1^2(2+3N+N^3) + \\ &+ g_2^2(5+9N+3N^2+N^3) + 36g_3g_1N + 12g_3g_2(1+N+N^2)). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Неподвижная точка определяется требованием, чтобы аномальная размерность поля была  $\Delta_\Phi = \Delta_\Phi^0 + \gamma^\Phi = \frac{d-1}{4}$ , как мы получили для общей мелонической теории в произвольной размерности. По-видимому, для  $\mathcal{N} = 2$  моделей этот факт вытекает не из мелонического доминирования, а из рассмотрения суперсимметричной алгебры, которая фиксирует размерность, пропорциональную  $R$  заряду соответствующего оператора. Это условие определяет целое многообразие в пространстве констант связей. Применяя (2.49), в большом  $N$  пределе получаем уравнение

$$\gamma(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{\lambda_1^2}{4} = \frac{1}{4}, \quad \lambda_1 = 1. \quad (2.59)$$

Интересно, что это уравнение не фиксирует  $\lambda_2, \lambda_3$  в большом  $N$  пределе. Можно исследовать устойчивость этих неподвижных точек при произвольном  $\lambda_{2,3}$ . Поток РГ вблизи неподвижной точки может быть линеаризован для получения матрицы устойчивости.

$$\left( \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 2\lambda_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = [2, 0, 0]. \quad (2.60)$$

Данное решение является маргинально устойчивым из-за существования двух маргинальных операторов. Эти два нулевых направления или оператора соответствуют обсуждавшемуся ранее существованию целого многообразия неподвижных точек в ИК.

Из этого соображения было бы интересно изучить большой  $N$  предел рассматриваемой  $\mathcal{N} = 2$  теории и соответствующие ДШ уравнения. Эта модель должна обладать теми же комбинаторными свойствами, что и  $\mathcal{N} = 1$  и скалярно-тензорная модель, но явно происходят дополнительные упрощения.

## 2.6 Суперсимметрия в 3 измерениях

В этом разделе мы введем обозначения и полезные тождества для  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных теорий в 3 измерениях. В основном мы будем следовать лекциям

[118]. Группа Лоренца в 3 измерениях — это  $SL(2, \mathbb{R})$ , то есть группа всех унимодулярных вещественных матриц размерности 2. Гамма-матрицы могут быть выбраны вещественными

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (2.61)$$

Матрицы  $\gamma^5$  не существует, поэтому мы не можем разбить спинорное представление на маленькие вейлевские. Поэтому наименьшее спинорное представление является двумерным и вещественным. Оно наделено скалярным произведением, определяемым как

$$\bar{\xi}\eta = \xi^\alpha\eta_\alpha = i\xi^\alpha\gamma_{\alpha\beta}^0\eta^\beta, \quad \theta^2 = \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta. \quad (2.62)$$

В силу этих фактов суперпространство  $\mathcal{N} = 1$ , помимо обычных пространственно-временных координат, будет включать две вещественные грассмановские переменные  $\theta^\pm$ . Поля в суперпространстве могут быть разложены в терминах полей в обычном пространстве Минковского. Например, скалярное суперполе (которое нас больше всего интересует) имеет следующее разложение

$$\Phi(x, \theta^\alpha) = \phi(x) + \bar{\theta}\psi(x) + \theta^2 F(x). \quad (2.63)$$

Как обычно, алгебра суперсимметрии в суперпространстве может быть реализована через производные, действующие на суперполя (2.63) и смешивающие различные компоненты

$$Q_\alpha = \partial_\alpha + i\gamma_{\alpha\beta}^\mu\theta^\beta\partial_\mu, \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2i\gamma_{\alpha\beta}^\mu\partial_\mu \quad (2.64)$$

, где  $\partial_\mu$  означает дифференцирование по обычным переменным пространства-времени, а  $\partial_\alpha$  - по антикоммутирующим. Можно определить суперпроизводную, которая антикоммутирует с генераторами суперсимметрии и поэтому сохраняет суперсимметрию

$$D_\alpha = \partial_\alpha - i\gamma_{\alpha\beta}^\mu\theta^\beta\partial_\mu, \quad \{D_\alpha, Q_\beta\} = 0. \quad (2.65)$$

Из этих компонентов, а именно (2.63), (2.65), можно построить явную версию суперсимметричного лагранжиана. Например, мы можем рассмотреть следующий лагранжиан

$$S = \int d^3x d^2\theta \left[ -\frac{1}{2} (D_\alpha\Phi)^2 + W(\Phi) \right], \quad (2.66)$$

где интеграл по грассмановым переменным определяется обычным способом с нормировкой  $\int d^2\theta\bar{\theta}\theta = 1$ . Выписав явную форму из (2.66), получим

$$S = \int d^3x \left[ \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + i\psi^\alpha\gamma_{\alpha\beta}^\mu\partial_\mu\psi^\beta + F^2 + W'(\phi)F + W''(\phi)\psi^2 \right]. \quad (2.67)$$

Поле  $F$  не имеет кинетического члена, а значит, не является динамическим и может быть проинтегрировано (что мы делать не будем). Для дальнейшего исследования нам необходимо развить технику суперфейнмановских графов. Начнем с рассмотрения функции разделения теории (2.66)

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int [d\Phi] \exp \left[ \int d^3x d^2\theta \left( \frac{1}{2} (D_\alpha\Phi)^2 + W(\Phi) + J\Phi \right) \right] = \\ &= \exp \left( W \left( \frac{\delta}{\delta J} \right) \right) \int [d\Phi] \exp \left[ \int d^3x d^2\theta \left( \frac{1}{2} \Phi D^2 \Phi + J\Phi \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Последний интеграл является гауссовым и поэтому может быть оценен и равен

$$Z[J] = \exp \left( W \left( \frac{\delta}{\delta J} \right) \right) \exp \left( - \int d^3x d^2\theta \left[ \frac{1}{2} J \frac{1}{D^2} J \right] \right). \quad (2.69)$$

Из этого можно восстановить обычную диаграммную технику Фейнмана, где вершина берется из суперпотенциала  $W(\Phi)$ , а не из интегрированной версии, а пропагатор определяется как

$$\langle \Phi(x_1, \theta_1) \Phi(x_2, \theta_2) \rangle = \frac{1}{D^2} \delta^2(\theta_1 - \theta_2) = \frac{D^2}{\square} \delta^2(\theta_1 - \theta_2), \quad (2.70)$$

, который может быть вычислен двойным дифференцированием стат-суммы (2.68), а оператор  $\square$  является обычным лапласианом.

## Глава 3

# Конформные дефекты в теории поля

### 3.1 Дефекты и их конформные пределы

Нелокальные операторы, известные как дефекты, играют важную роль в понимании квантовой теории поля (КТП). Они приводят к новому классу наблюдаемых в КТП. Известные примеры включают петлю Вильсона в калибровочных теориях [291] и спиновую примесь в модели Кондо [205]. В более общем случае дефект характеризуется размерностью  $p \leq d - 1$  или коразмерностью  $q = d - p$  и изменяет интеграл по путям данной КТП. С одной стороны, живя на подмногообразии положительной коразмерности, дефект может содержать целый ряд новых динамических явлений, таких как поток ренормализационной группы (РГ) дефекта [6, 5, 300, 111, 113, 176, 66, 65, 202, 286, 77], фазовые переходы на дефекте [93, 94, 60, 104, 92, 215] и аномалии дефекта [159, 139, 271, 70, 95, 106, 162, 44, 102, 161, 67, 101, 287, 286], не изменяя физику за пределами дефекта. С другой стороны, дефекты чувствительны к динамике самой КТП и являются незаменимым инструментом для обнаружения симметрий и аномалий в самой теории поля [115], которые необходимы для выяснения фазовой диаграммы КТП [116].

В последние годы изучение дефектов в КТП стало активной областью изучения благодаря развитию численных и аналитических методов исследования. Это особенно характерно для дефектов в конформной теории поля (КТП), чьи фиксированные точки РГ потока дефекта описываются дефектной конформной теорией поля (ДКТП). Эти конформные дефекты (ДКТП) соответствуют классам универсальности дефектов в данной теории поля и служат отправной точкой для изучения

всех возможных дефектов. Благодаря дополнительной конформной симметрии

$$SO(p + 1, 1) \times SO(d - p) \subset SO(d + 1, 1), \quad (3.1)$$

сохраняемая  $p$ -мерным конформным дефектом, может быть изучена численно с помощью конформного бутстрапа к ДКТП [219, 114, 128, 46]. В случаях с суперсимметрией были разработаны методы суперсимметричной локализации для точного определения наблюдаемых параметров специальных дефектов [247, 248, 123, 182, 99, 131, 181, 100, 187, 21, 186, 288]. Для не суперсимметричных ДКТП или незащищенных наблюдаемых в суперсимметричных ДКТП получение аналитических результатов становится более сложным. Если дефект имеет явное лагранжево описание, то для определения наблюдаемых дефектов всегда можно вычислить, используя диаграммы Фейнмана, как в стандартной теории возмущений. Однако на практике то, что получается таким образом, в лучшем случае является асимптотическим рядом, и в целом трудно получить непертурбативные результаты при конечных константах связи. За последние несколько лет было разработано несколько мощных методов для преодоления этого препятствия с использованием предела больших  $N$  [25, 120, 160, 236, 124, 76], больших зарядов [78, 26, 79, 266] и интегрируемости [56, 136, 204]. В частности, известно, что, возможно, самая простая взаимодействующая скалярная теория поля, критическая модель  $O(N)$  (неподвижная точка Вильсона-Фишера в  $d = 4 - \epsilon$  измерениях), содержит богатое семейство линейных дефектов ( $p = 1$ ), связанных нетривиальными дефектными РГ-потоками, и аналогично для границ ( $d - p = 1$ ), которые могут быть изучены аналитически в большом  $N$  пределе [120, 160, 236, 76] (см. также соответствующие работы в пределе большого заряда при конечных  $N$  [78, 79] и предыдущие исследования в  $N = 1$  [114]).

### 3.1.1 Скалярная квантовая теория поля и локализованные магнитные дефекты

Скалярная квантовая теория поля является, пожалуй, наиболее интенсивно изучаемым КТП. Несмотря на общие трудности при конечной константе связи, ряды возмущений в этих моделях могут упрощаться в пределе больших  $N$ , что делает их очень простыми. Модель  $O(N)$  - это уже хорошо знакомая нам теория  $N$  скалярных полей  $\phi_a$  с  $a = 1, 2, \dots, N$  и  $O(N)$ -инвариантным потенциалом, также известная как



$O(N)$  векторная модель. Теория имеет точное решение при больших  $N$  и является слабозаимодействующей КТП для  $d < 4$ . В частности, при бесконечном  $N$  скалярные поля имеют классические аномальные размерности, а теория обладает высшей спиновой симметрией, которая слабо нарушается аномальными размерностями в следующих порядках по  $\mathcal{O}(1/N)$  [212, 192, 232, 233, 121]. Существуют естественные обобщения векторной модели  $O(N)$  в  $d \leq 4$ , известные как тензорные модели, рассматривающие тензорное скалярное поле ранга  $k$   $\phi_{a_1 a_2 \dots a_k}$ , преобразующееся в фундаментальном представлении  $O(N)^k$ , с перенормируемыми взаимодействиями, инвариантными по  $O(N)^k$ . Эти модели в целом гораздо сложнее, чем векторный  $O(N)$  случай, из-за огромного количества динамических полей и возможных взаимодействий. Случай  $k = 2$  является близким аналогом матричной модели скалярных полей  $N^2$ , и имеет единственное односледовое  $O(N)^2$ -инвариантное взаимодействие. Эта матричная теория допускает интересный большой предел  $N$ , в котором доминирует взаимодействие планарных диаграмм Фейнмана [1]. Это гораздо более богатый случай по сравнению с векторной моделью, поскольку уже в ведущем  $N$  пределе существует нетривиальная зависимость от т-Хуфтовской константы связи  $\lambda_M$ , а определение зависимости от конечной  $\lambda_M$  в матричных моделях при  $d > 0$  является нерешенной проблемой. Учитывая возрастание сложности от векторных к матричным  $O(N)$  моделям, можно удивиться, обнаружив разрешимые, но нетривиальные тензорные модели ранга  $k \geq 3$ . Тем не менее, было показано, что такой большой  $N$  предел существует для тензорных моделей ранга  $k = 3$ , где пертурбативное разложение управляется единственным  $O(N)^3$ -инвариантным взаимодействием, известным как тетраэдрическое взаимодействие, и только определенные диаграммы Фейнмана мелонического типа доминируют [199] (обобщение  $d = 0$  моделей в [153, 51, 63] и  $d = 1$  фермионной модели в [293]). Поэтому этот предел принято называть *мелонным или мелоническим*. Соответствующая тензорная модель известна как мелоническая тензорная модель, которая описывается следующим действием,

$$S_{\text{TM}} = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_{abc})^2 + \frac{\lambda_T 4N^{\frac{3}{2}}}{\phi} \phi_{ab'c'} \phi_{a'b'c} \phi_{a'b'c} \right]. \quad (3.2)$$

Однако, в отличие от матричного случая, здесь чудесным образом бесконечный ряд в  $\lambda_T$  может быть суммирован с помощью точного уравнения Швингера-Дайсона, что привело к открытию в  $d < 4$  сильно связанного скалярного СФТ с порядком  $N^3$  степеней свободы, корреляционные функции которых могут быть определены

точно в ведущем большом  $N$  пределе [199]. Таким образом, мы видим, что мелоническая тензорная модель служит интересным промежуточным звеном в мире скалярных QFT между векторной и матричной моделями, которое является богатым, но разрешимым.<sup>1</sup>

До сих пор изучение дефектов в несуперсимметричной постановке в основном ограничивалось слабо связанными объемными QFT, что уже дало много интересных примеров с интересными особенностями [90, 214, 27, 89, 28, 45, 76, 79].<sup>2</sup> Сами взаимодействия, конечно, будут нетривиально изменять наблюдаемые параметры дефектов, и учет их эффектов остается сложной задачей при конечной константе связи. Здесь мы воспользуемся преимущественными особенностями мелонических тензорных моделей, упомянутых выше, для изучения дефектов в сильносвязанных скалярных КТП.

Более конкретно, мы изучаем следующий дефект в мелонической тензорной модели, определяемый локализованным источником для *одной* компоненты скалярного поля  $\phi_{abc}$  на  $p$ -мерном подпространстве,

$$S_{\text{DTM}} = S_{\text{TM}} - \bar{J}_{abc} \int d^p x_{\parallel} \phi_{abc}(x_{\parallel}, x_{\perp} = 0), \quad (3.3)$$

Мы называем такую теорию как *линейный конформных дефект тензорной моделию*. Здесь мы разделили координаты плоского пространства-времени как  $x = (x_{\parallel}, x_{\perp})$  или с индексами  $x^{\mu} = (x_{\parallel}^{\alpha}, x_{\perp}^i)$ , где  $\alpha = 1, 2, \dots, p$  и  $i = p + 1, \dots, d$ , так что дефект имеет координаты  $x_{\parallel}$  и находится в точке  $x_{\perp} = 0$ . Это аналогично локализованному магнитному дефекту, изученному в контексте  $(2 + 1)$ -мерных решеточных моделей [242], где дефект описывается при помощи внешнего магнитного поля, локализованным в пространстве, но распространяющимся во времени. Анализ континуальной теории поля таких дефектов в векторной  $O(N)$  модели был проведен в [76]. Заметим, что в отличие от предыдущих исследований таких дефектов в векторной модели  $O(N)$ , мы не ограничиваемся линейными дефектами (т.е.  $p$  является общим).<sup>3</sup>

<sup>1</sup>На диаграммном уровне можно явно видеть, что мелонические диаграммы представляют собой специальное подмножество планарных диаграмм, что делает возможным суммирование [197]

<sup>2</sup>В частности, даже свободные теории могут содержать нетривиальные дефекты (см., например, [90, 214, 27, 89, 28, 45])

<sup>3</sup>Физически интересные случаи соответствуют  $d = 2$  с  $p = 1$  и  $d = 3$  с  $p = 1, 2$ , но формально мы будем работать с общим  $1 \leq p < d$ . Это возможно потому, что в нашем большом  $N$  пределе (3.4)

Локализованный магнитный дефект явно нарушает объемную  $O(N)^3$  глобальную симметрию до  $O(N-1)^3$  подгруппы. Поскольку симметрия в объеме не нарушена, мы можем переориентировать тензорное поле в направлениях  $O(N)^3$  так, чтобы магнитное поле было связано с компонентой  $\phi_{111}$ . Это взаимодействие качественно меняет корреляционные функции локальных операторов, построенных из  $\phi_{abc}$ , за счет дополнительных диаграмм Фейнмана, которые могут закрепиться на дефекте, в частности это приводит к нетривиальной одноточечной функции  $\langle \phi_{111}(x) \rangle_{\mathcal{D}_p}$ , которая в отсутствие дефекта исчезает. Заметим, что из-за остаточной  $O(N-1)^3$  симметрии, одноточечная функция дефекта  $\langle \phi_{abc}(x) \rangle_{\mathcal{D}_p}$  равна нулю, если только не  $a = b = c = 1$ . Основной целью данной работы является изучение таких нетривиальных корреляционных функций дефектов на непертурбативном уровне, и мы суммируем основные результаты ниже.

### 3.1.2 Краткое изложение основных результатов

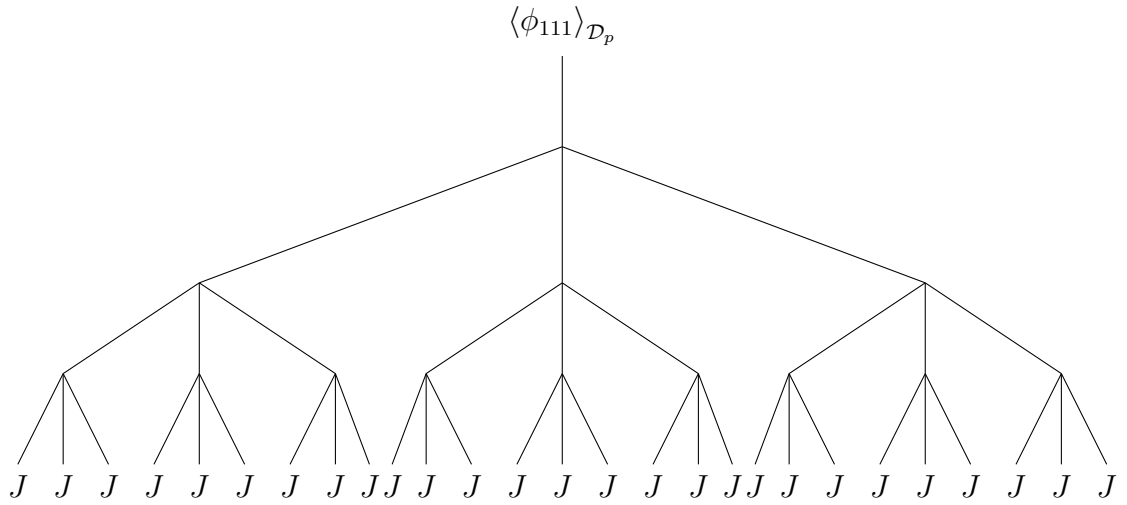


Рис. 3.1: Вклад в одноточечную функцию  $\langle \phi_{111}(x) \rangle_{\mathcal{D}_p}$  поступает только от древовидных диаграмм, где каждое ребро является точным пропагатором тензорной модели в пределе большого  $N$  (3.4).

Хотя вычислить несколько таких диаграмм Фейнмана в ведущих порядках по  $\lambda_T$  и  $\bar{J}_{111}$  для одноточечной функции  $\langle \phi_{111}(x) \rangle_{\mathcal{D}_p}$  несложно, получение непертурбативного ответа, требующего суммирования бесконечно многих диаграмм, может задача о дефектах сводится к решению дифференциального уравнения (из уравнения Швингера-Дайсона) с дробным лапласианом в поперечных направлениях в степени  $d/2$ .

показаться сложной задачей. Успех мелонической тензорной модели без дефектов побуждает нас искать обобщение большого  $N$  предела на данный случай с дефектами. Действительно, из топологического аргумента в разделе 3.2 мы докажем, что в пределе

$$N \rightarrow \infty \quad J \equiv \frac{\bar{J}_{111}}{N^{3/4}} \text{ fixed}, \quad (3.4)$$

доминирующие вклады в  $\langle \phi_{111}(x) \rangle_{\mathcal{D}_p}$  приходят от *мелонных деревьев*, закрепленных на дефекте с точным пропагатором из  $\phi_{abc}$  на каждой ветке (см. рис. 3.1),

$$\langle \phi_{111}(x) \rangle_{\mathcal{D}_p} = N^{\frac{3}{4}} f(\lambda_T, J) + \mathcal{O}(N^{-\frac{5}{4}}), \quad f(\lambda_T, J) = (\text{melonic trees}). \quad (3.5)$$

Более того, эти диаграммы могут быть пересуммированы с помощью точного уравнения Швингера-Дайсона с внешним источником, которое определяет  $\langle \phi_{111}(x) \rangle_{\mathcal{D}_p}$  (а также другие корреляционные функции дефектов) непертурбативно по константам связи  $\lambda_T$  и  $J$  в ведущем большом  $N$  пределе (3.4).

Как мы подробно объясним в разделе 3.3, это компактное уравнение Швингера-Дайсона осложняется наличием дробного оператора лапласиана  $\Delta_{\perp}^{d/4}$  при  $d < 4$  в поперечных направлениях (т.е.  $x_{\perp}$ ), и поэтому получить решение в замкнутой форме для  $\langle \phi_{111}(x) \rangle_{\mathcal{D}_p}$  в общем случае трудно. Тем не менее, прямое решение уравнения Швингера-Дайсона в пределе больших расстояний (ИК) с масштабно-симметричным ансамблем для  $\langle \phi_{111}(x) \rangle_{\mathcal{D}_p}$ , которое описывает предполагаемый конформный режим локализованного магнитного дефекта. Действительно, большая  $N$  тензорная модель является нетривиальной КТП, где тензорные поля  $\phi_{abc}$  являются конформными примарными операторами размерности  $\Delta_{\phi} = d/4$  [199, 122]. Следовательно, взаимодействие (3.3) является соответствующей деформацией на  $p \geq 1$ -мерном мировом объеме тривиального (прозрачного) дефекта и вызывает дефектный РГ-поток от тривиального дефекта к нетривиальному конформному дефекту. Ренорм-группа дефекта и бета-функция для магнитного поля  $J$  закодированы в поперечном профиле  $\langle \phi_{111}(x) \rangle_{\mathcal{D}_p}$ , который интерполирует между масштабным решением, найденным нами в ИК, и близким к УФ решением уравнения Швингера-Дайсона вблизи дефекта, которое мы определяем с помощью анализа теории возмущений в  $J$  (см. раздел 3.3.4). В частности, разложение  $J$  может быть обобщено для получения точного РГ-потока для линейных дефектов при малых  $\epsilon = 4 - d$ , как показано в разделе 3.3.4. Более того, для специального случая дефектов координатности один, мы определяем точное решение уравнения Швингера-Дайсона, которое захватыва-

ет весь РГ дефектов при конечных  $\epsilon = 4 - d$  (например,  $d = 3$ ) в разделе 3.3.3.

Для линейных дефектов в КТП недавно было доказано, что РГ дефекта подчиняется  $g$ -теореме [77], обобщающей предыдущие результаты в  $d = 2$  [111, 66], которая утверждает, что  $g$ -функция (ее схемно-независимая часть) или, эквивалентно, энтропия дефекта должна монотонно убывать под действием РГ-потока, вызванного соответствующей деформацией линейного дефекта. В разделе 3.4 мы исследуем энтропию линейного дефекта в тензорной модели (случай  $p = 1$  из (3.3)). В большом  $N$  пределе в разделе 3.4.1 мы вычисляем энтропию дефекта точно и замечаем, что  $g$ -теорема выполняется для локализованного магнитного дефекта. Для малых  $\epsilon = 4 - d$  мы также определяем энтропию дефекта пертурбативно в разделе 3.4.2 из явных диаграмм Фейнмана, проверяя наш точный результат в разделе 3.4.1. Кроме того, мы проверяем, что градиентная формула для линейного дефекта РГ, полученная в [77], справедлива для нашей модели.

Мы ожидаем, что в ИК-пределе локализованный магнитный дефект в большой  $N$  тензорной модели будет описываться полноценной непертурбативной ДКТП (по крайней мере, в ведущем большом  $N$  пределе). В частности, это означает, что все корреляционные функции локальных операторов в объеме определяются их объемными операторно-продуктовыми расширениями (ОПЕ) вместе с дефектными одноточечными функциями общих первичных операторов. Последние также могут быть определены диаграммными методами в нашем разрешимом большом  $N$  пределе (3.4) тензорной модели дефектов. С учетом этого в разделе 3.5 мы изучаем двухточечные функции  $\phi_{abc}$  в ДКТП, и приводим формулы для одноточечных функций билинейных операторов в  $\phi_{abc}$ , в том числе для тензора энергии напряжения  $T_{\mu\nu}$ . Мы оставляем более полный анализ на будущее.

Объяснив особенности большой  $N$  тензорной модели, позволяющие решать локализованные магнитные дефекты непертурбативно, позволим себе вставить слово предостережения. Тензорная модель, определяемая действием (3.2), не является унитарной. В частности, тетраэдрическое взаимодействие не является положительно определенной. Вместо этого теория описывается комплексным КТП в ИК-пределе. Действительно, существуют примарные операторы комплексной размерности, которые были найдены в  $\epsilon = 4 - d$  разложении, и для достижения неподвижной точки требуется настройка определённых связей на малые, но комплексные значения (подавленные в  $1/N$ ) [122]. Тем не менее, есть существенные свиде-

тельства того, что, по крайней мере, в ведущем большом  $N$  пределе, тензорная модель (3.2) является непертурбативно хорошо определённой КТП [229, 244, 34], и наши результаты здесь оказывают дальнейшее подтверждение данного результата за счёт изучения линейных дефектов.<sup>4</sup>

## 3.2 Дефекты в большом $N$ пределе и доминирование арбузных деревьев

Для дальнейшего удобства мы напишем ниже действие, описывающее теорию тензорной модели с локализованным магнитным дефектом на  $x_{\perp} = 0$ ,

$$S_{\text{ДТМ}} = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi_{abc})^2 + \frac{\lambda_{\Gamma}}{4N^{\frac{3}{2}}} \phi_{abc} \phi_{ab'c'} \phi_{a'b'c} \phi_{a'b'c} - J N^{\frac{3}{4}} \delta^{d-p}(x_{\perp}) \phi_{111} \right]. \quad (3.6)$$

В этом разделе мы изучим, как устроена теория возмущений для такого действия. Параметр  $J$  мы будем называть источником поля. Исходя из комбинаторных свойств диаграмм Фейнмана, мы докажем, что в большом  $N$  пределе (3.4) доминирующие вклады в нетривиальную дефектную одноточечную функцию  $\langle \phi_{111} \rangle_{\mathcal{D}_p}$  будут приходиться от мелонических деревьев (см. рисунок 3.1).

Хорошо известно, что в случае  $J = 0$  только определённые типы диаграмм, известные как мелонические диаграммы (см. рисунок 3.3), дают вклад ведущего порядка в пределе больших  $N$ , что позволяет решить теорию (обзор см. в [197]). В случае, когда  $J \neq 0$ , мы должны учитывать дополнительный тип диаграмм, которые возникают из-за присутствия дефекта. Тем не менее, мы покажем, что в большом  $N$  пределе (3.4) снова выживает только простой класс диаграмм, и теория (3.6) может быть решена аналитически. Доказательство будет топологическим (оно зависит только от индексных структур  $O(N)^3$ ) и поэтому применимо в любой размерности и для любой тензорной модели с тетраэдрическим взаимодействием

---

<sup>4</sup>Здесь под непертурбативно хорошо определённой мы подразумеваем в смысле наличия спектра локальных операторов и ОПЕ-коэффициентов, которые подчиняются конформным уравнениям бутстрапа, несмотря на не унитарность. Это не следует путать с непертурбативной неустойчивостью конформных решений, обсуждаемой в [188, 30, 29]. Обойти эту неустойчивость (и неунитарность) можно, рассмотрев длиннодействующую версию тензорной модели [33], которая, в частности, удовлетворяет  $F$ -теореме [36], но уже не имеет конечного канонического тензора энергии напряжения (как это имеет место для обобщенных свободных полей [158, 279])

(например, модель фермионов Гросса-Невеу  $\psi_{abc}$ ). Отметим также, что комбинаторный результат в этом разделе не зависит от конкретной формы дефекта (например, локализованный, как в (3.6), или не локализованный или вообще любой формы).

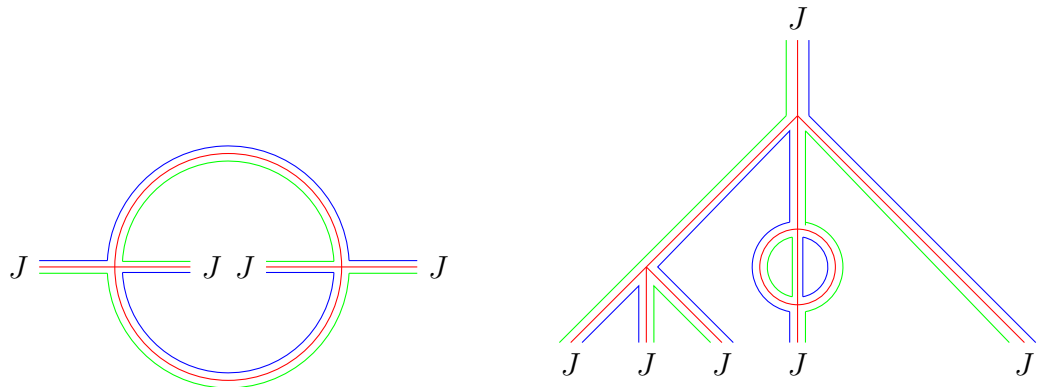


Рис. 3.2: Слева приведен пример планарной диаграммы, которая является подавленной в большом пределе  $N$  (3.4). Справа приведен пример диаграмм дынного дерева, доминирующих в этом пределе.

Рассмотрим произвольную фейнмановскую диаграмму из действия (3.6), содержащую  $V$  вершин с тетраэдрическими взаимодействиями,  $S > 0$  источников и  $E$  пропагаторов. Некоторые примеры таких диаграмм изображены на рисунке 3.2. Задача состоит в том, чтобы добавить дополнительные факторы  $N$  к вершинам и источникам так, чтобы иметь гладкий большой  $N$  предел (который, как обещано, будет (3.4)), и определить подмножество диаграмм, доминирующих в этом пределе.

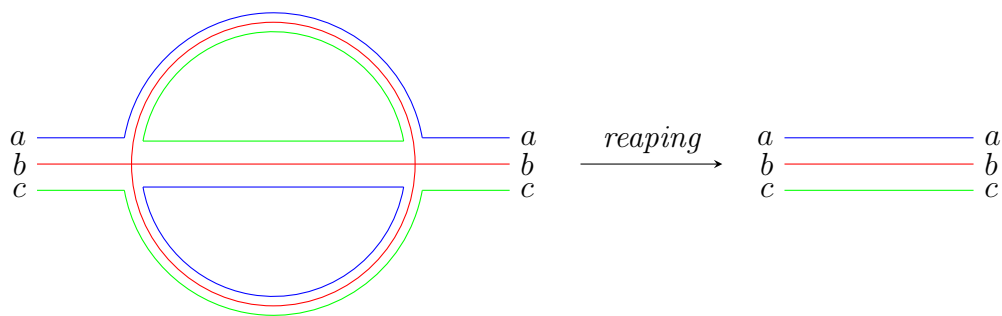


Рис. 3.3: Фундаментальный мелон в тензорной модели. На максимальной диаграмме слева мы *выдираем* мелон, и диаграмма остается максимальной

Мы следуем стандартной стратегии, применяемой в тензорных моделях без дефектов (обзор см. в [197]). Мы явно нарисуем индексную структуру для каждой фейнмановской диаграммы с помощью жирных графов, где каждое ребро состоит

из трех цветных линий, представляющих распространение трех индексов из  $\phi_{abc}$ . Обозначим число индексных петель для каждого цвета через  $F_i$ , а общее число петель через  $F = F_1 + F_2 + F_3$ . Зависимость такой диаграммы от  $N$  и констант связи имеет следующий вид

$$N^F \left( \frac{\lambda_T}{N^{3/2}} \right)^V (JN^{3/4})^S = N^{F - \frac{3}{2}V + \frac{3}{4}S} \lambda_T^V J^S. \quad (3.7)$$

Если мы сотрем один из цветов в нашей диаграмме, то получим ленточный граф (жирный граф), того же типа, что и в матричной модели. Следовательно, мы можем присвоить каждому ленточному графу род  $g_{ij}$ , где  $i, j$  обозначает цвета оставшихся нитей, а  $F_{ij} = F_i + F_j$  - количество индексных петель в ленточном графе. Кроме того, поскольку мы имеем дело с открытыми ленточными графами (благодаря наличию источников поля  $J$ ), соответствующая поверхность может иметь  $n_{ij}$  границ. Например, для левой диаграммы на рисунке 3.2 мы имеем  $n_{ij} = 2$ , а для правой -  $n_{ij} = 1$ . Тогда благодаря теореме Эйлера мы получаем следующее комбинаторное соотношение,

$$(2 - n_{ij}) - 2g_{ij} = V + S - E + F_{ij} \quad \text{with } g_{ij} \geq 0, n_{ij} \geq 1, \quad (3.8)$$

Поскольку каждый пропагатор заканчивается либо в вершине, либо в дефекте, мы также имеем следующее очевидное соотношение

$$4V + S = 2E. \quad (3.9)$$

Комбинируя уравнения (3.8) и (3.9), получим для связного графа,

$$3 - \frac{1}{2}n - g + \frac{3}{2}V - \frac{3}{4}S = F \Rightarrow F - \frac{3}{2}V + \frac{3}{4}S \leq \frac{3}{2}, \quad (3.10)$$

где мы использовали  $g \equiv g_{12} + g_{23} + g_{13} \geq 0$  и  $n \equiv n_{12} + n_{23} + n_{13} \geq 3$ . Сравнивая с (3.7), мы видим, что для достижения гладкого предела больших  $N$  нам следует зафиксировать  $\lambda_T$  и  $J$ .

Теперь определим *максимальные графы*, а именно графы, связные компоненты которых насыщают неравенство (3.10). Мы сосредоточимся на связном максимальном графе, который достигается тогда и только тогда, когда  $g = 0$  и  $n = 3$ . Другими словами, все ленточные графы, полученные при стирании одного цвета, планарны и имеют единственную границу. Например, левая диаграмма рисунка 3.2 не максимальна, потому что  $n_{bg} = 2$  для синего и зеленого цветов, а  $n_{br} = n_{gr} = 1$  для



остальных вариантов цветов (поэтому  $g = 0$ , но  $n = 4$ ). Для максимального графа любая законченная нить соединенных ребер (или пропагаторов) либо образует замкнутый цикл, либо соединяет два источника. Для нитей, проходящих ровно через  $m$  вершин, мы обозначим число индексных петель через  $P_m$ , а число петель, заканчивающихся на источниках, через  $L_m$ . Для максимального графа мы имеем следующее соотношение,<sup>5</sup>

$$F = \sum_{m \geq 1} P_m = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}V - \frac{3}{4}S. \quad (3.11)$$

Легко вывести следующие соотношения

$$\sum_{m \geq 1} m(P_m + L_m) = 6V, \quad \sum_{m \geq 0} L_m = \frac{3}{2}S. \quad (3.12)$$

Как объясняется в [197], для того чтобы ленточные графы (после стирания цвета) были планарными, необходимо  $P_1 = P_3 = 0$ . Складывая (3.11) и (3.12), находим.

$$2P_2 + L_1 + 2L_0 = 6 + \sum_{m \geq 5} (m-4)P_m + \sum_{m \geq 3} (m-2)L_m \geq 6. \quad (3.13)$$

Если  $L_0 > 0$ , то единственный возможный связный граф - это просто два источника поля  $J$ , соединенные ребром, а значит  $L_0 = 3$  (и  $P_m = L_{m>0} = 0$ ). Это явно максимальный граф, который мы определяем как связный *пустой граф* (см. рисунок 3.4). Более нетривиальные связные максимальные графы возникают в случае  $L_0 = 0$ , когда граф должен иметь либо петлю, проходящую ровно через две вершины ( $P_2 > 0$ ), либо нить, проходящую ровно через одну вершину и соединяющую два источника поля ( $L_1 > 0$ ).



Рис. 3.4: Пример пустого графа из набора непересекающихся пустых деревьев, который не содержит вершин взаимодействия, но вносит вклад в ведущий порядок в большом пределе  $N$ .

Ниже мы рекурсивно докажем, что максимальный граф должен быть мелоническим деревом. Стратегия состоит в том, чтобы ввести две операции над максимальным графом, *черенкование* и *вырывание*, как на рисунке 3.5 и рисунке 3.3 соответственно. Интуитивно понятно, что черенкование отсекает ветви графа, которые

<sup>5</sup>Мы рассматриваем связные графы, так что любая петля должна проходить хотя бы через одну вершину (т.е.  $P_0 = 0$ ).

пересекаются с соседними источниками, а вырывание удаляет мелонические подграфы, заменяя их голыми ветвями. Важно, что эти операции уменьшают граф, удаляя вершины и петли, сохраняя при этом максимальность<sup>6</sup>. Ниже мы докажем, что любой максимальный граф может быть сведен этими двумя операциями к пустому (несвязному) графу, как на рисунке 3.4. После того как мы закончим эти операции, мы установим, что все максимальные графы являются (возможно, несвязными) деревьями, тем самым мы получим рекурсивные правила для того чтобы генерировать такие максимальные графы.

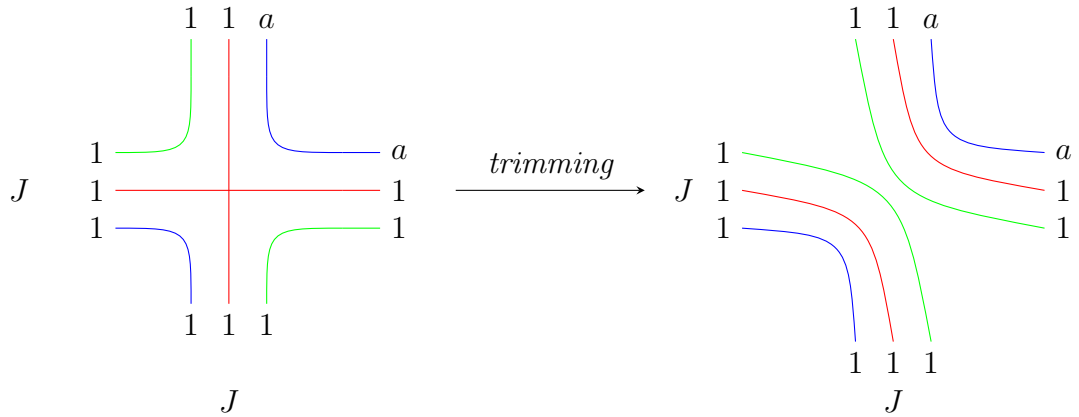


Рис. 3.5: Если у нас есть вершина, связанная с двумя источниками  $J$ , мы можем выполнить операцию черенкования и удалить эти два источника, не нарушая максимальности.

Начнем со случая  $L_1 > 0$ . Для этого требуется вершина с парой соседних ветвей, которые привязаны к соседним источникам поля  $J$ . Легко видеть, что мы можем выполнить операцию черенкования, как на рисунке 3.5, удалив эту вершину, и получить несвязный пустой подграф. Мы можем повторять эту операцию до тех пор, пока все подобные вершины не будут удалены.

В случае  $P_2 > 0$  ситуация похожа на обычную бездефектную тензорную модель (то есть на графы с  $S = 0$ ). Здесь мы имеем подграф, содержащий пару вершин, соединенных одной петлей. Эта петля разделяет плоскость на две несвязные области (см., например, левые диаграммы рисунка 3.2 и рисунка 3.3). Начиная с  $n_{ij} = 1$  (для ленточного графа после стирания одного цвета) одна из этих областей не содержит источников (левая диаграмма рисунка 3.2 не удовлетворяет этому условию и поэтому не является максимальной). В этой области мы можем воспользоваться

<sup>6</sup>В частности, зависимость  $N$  сохраняется, если уменьшенный граф остается связным

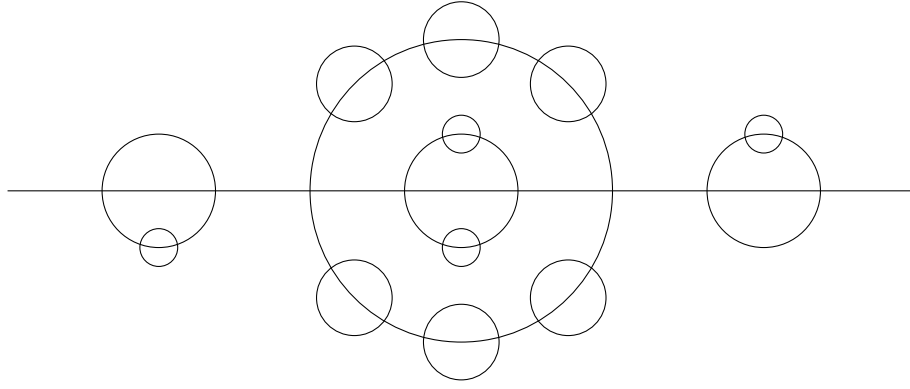


Рис. 3.6: Дыни в дынях.

стандартным доказательством мелонического доминирования [51, 199, 197] и заключить, что она является ребром, вложенным в мелон, как на рисунке 3.6. Это означает, что весь подграф, с которого мы начали, также является ребром с мелонами. Поэтому мы можем применить операцию черенкования, чтобы удалить все дыни, как на рисунке 3.3, оставив после себя голую ветвь.

Комбинируя с операцией обрезки, описанной выше, мы можем свести все максимальные графы к пустому графу. Обращая эти операции, мы устанавливаем, что все максимальные графы являются дынными деревьями (например, правая диаграмма на рисунке 3.2).

Доминирование деревьев в большом  $N$  пределе (3.4) значительно упрощает диаграмматику для тензорных дефектов. В следующих разделах мы воспользуемся этой особенностью для вычисления различных наблюдаемых для локализованных магнитных дефектов (3.3) в тензорной модели.

Прежде чем закончить этот раздел, прокомментируем, как влияет доминирование мелонического дерева, если мы рассматриваем локализованные магнитные дефекты в других обобщениях тензорной модели или более общие типы дефектных взаимодействий.

Существуют обобщения тензорной модели с одной  $O(N)$  группой симметрии, в которых поле  $\phi_{abc}$  принадлежит нетривиальному представлению группы  $O(N)$  [193, 62], в них можно тоже рассматривать дефекты вида (3.6). Хотя у нас нет полного доказательства, мы все же ожидаем, что в этих моделях диаграммы мелонического дерева доминируют в большом  $N$  пределе. Между тем, в других тензорно-подобных моделях, таких как модель Гурау-Виттена [294] или SYK-подобные модели [223], нетривиальные мелонические древовидные диаграммы будут подавлены в боль-

шом  $N$  пределе. Тем не менее, любопытно отметить, что в контексте модели SYK мелонические деревья появляются при изучении роста операторов [265], где они кодируют эволюцию начального состояния со временем.

Одним из обобщений дефектного взаимодействия, рассмотренного в (3.6) в рамках мелонической тензорной модели является включение  $O(N)^3$  синглетного оператора  $\phi_{abc}^2$  на дефекте. Это локализованная массовая деформация, которая не нарушает никакой глобальной симметрии. Вместо мелонических деревьев вклады в наблюдаемые (например, одноточечную функцию из  $\phi_{abc}^2$ ) теперь приходят от мелонических лестничных диаграмм. Соответствующее уравнение Швингера-Дайсона (см. раздел 3.3.1) становится более сложным.

### 3.3 Уравнение Швингера-Дайсона и дефектные одноточечные функции

#### 3.3.1 Дефектное уравнение Швингера-Дайсона

Мы переходим к вычислению статсуммы тензорной модели дефектов (3.6) как функции внешних источников  $J$  в большом  $N$  пределе (3.4). Сначала отметим, что все данные вклады (см. рисунок 3.6) в *точный* пропагатор  $G(p)$  из  $\phi_{abc}$  могут быть суммированы с помощью уравнения Швингера-Дайсона [199],

$$\langle \phi_{abc}(p)\phi_{a'b'c}(-p) \rangle = \delta_{aa'}\delta_{bb'}\delta_{cc'}G(p),$$

$$G^{-1}(p) = p^2 - \lambda_T^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} G(p-k-q)G(k)G(q), \quad (3.14)$$

где мы работаем в импульсном представлении, а  $p^2$  - обычный пропагатор свободной теории. В ИК-пределе (на больших расстояниях) этой безмассовой теории мы ожидаем появления конформной симметрии и, следовательно, нетривиального решения (3.14) с определенным поведением при конформных преобразованиях,

которое дается,<sup>7</sup>.

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_T}} \frac{A_d}{x^{\frac{d}{2}}}, \quad A_d = \left( \frac{d\Gamma\left(\frac{3d}{4}\right)}{4\pi^d \Gamma\left(1 - \frac{d}{4}\right)} \right)^{\frac{1}{4}},$$

$$G^{-1}(x) = \sqrt{\lambda_T} B_d (-\Delta)^{\frac{d}{4}}, \quad B_d = \left( \frac{4\Gamma\left(1 - \frac{d}{4}\right)}{d(4\pi)^d \Gamma\left(\frac{3d}{4}\right)} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (3.15)$$

где  $\Delta$  - лапласиан, и мы использовали следующее соотношение

$$\int d^d x \frac{e^{ikx}}{|x|^a} = \frac{f(d, a)}{|k|^{d-a}}, \quad f(d, a) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{d-a}{2}\right)}{2^{a-d} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{1}{|k|^{d-a}}. \quad (3.16)$$

Теперь при наличии источников поля  $J$  нам нужно суммировать все возможные дынные вклады в заданную древовидную диаграмму (например, правая диаграмма рисунка 3.2 добавляет один дынный вклад в голую древовидную диаграмму). Это сводится к замене всех ребер точным пропагатором (3.15). Так статсумма для тензорной модели  $Z[J]$  как функция от внешнего источника  $J$  может быть вычислена путем рекурсивной генерации всех возможных древовидных диаграмм. Для нашей цели мы рассматриваем одноточечную функцию

$$F(x) \equiv \frac{1}{N^{\frac{3}{4}}} \langle \phi_{111}(x) \rangle, \quad (3.17)$$

как функция от  $J$ , которая удовлетворяет следующему уравнению Швингера-Дайсона.

$$F(x) = \int d^d y G(x-y) [J(y) - \lambda_T F^3(y)]. \quad (3.18)$$

Приведенное выше уравнение, являющееся следствием доминирования деревьев в большом  $N$  пределе, напоминает выражение для классического дефекта в классической тензорной модели. Единственное отличие состоит в том, что полный пропагатор  $G(x-y)$  будет заменен на голый пропагатор  $G_0(x-y)$ . Другими словами, все квантовые поправки для тензорной модели дефекта в большом  $N$  пределе полностью отражаются точным пропагатором для поля  $\phi_{abc}$ . Отчасти это происходит потому, что вершинная функция не получает никаких поправок в большом  $N$  пределе. Подчеркнем, что в случае критической  $O(N)$  модели или матричной модели существуют и другие вклады в уравнение выше, исходящие из квантовых поправок к вершинным функциям.

---

<sup>7</sup>Заметим, что в нашей конвенции префактор (3.15) явно зависит от голой связи  $\lambda_T$ , но эта зависимость сокращается во всех физических наблюдаемых в ДКТП, таких как энтропия дефекта, размерность операторов и (нормированные) коэффициенты ОПЕ

До этого момента в разделе мы не предполагали конкретной формы внешнего источника поля  $J(x)$  для скалярного поля  $\phi_{111}(x)$ . Мы рассмотрели только случай, когда источник будет локализован на подпространстве размерности  $p$ , как в (3.6), которое определяет локализованный магнитный дефект в тензорной модели (т.е.  $J(x) \rightarrow J\delta^{d-p}(x_\perp)$ ). Теперь изучим решение дефектного уравнения Швингера-Дайсона и вычислим различные наблюдаемые для данного дефекта.

### 3.3.2 Конформный дефект на большом расстоянии

В  $d < 4$  тензорная модель перетекает в нетривиальную КТП на больших расстояниях, которая описывается конформным решением (3.15) уравнения Швингера-Дайсона (3.14) в пределе больших расстояний.

Используя трансляционную симметрию в направлениях  $x_\parallel$  для дефекта,  $F(x)$  явно зависит только от  $x_\perp$ . Уравнение Швингера-Дайсона (3.18) для дефекта  $F(x_\perp)$ , определенное в (3.17), можно привести к следующему виду,<sup>8 9</sup>

$$\sqrt{\lambda_T} B_d (-\Delta_\perp)^{\frac{d}{4}} F + \lambda_T F^3 = J\delta^{d-p}(x_\perp), \quad (3.19)$$

,в котором константа  $B_d$  определена в (3.15) и дробный лапласиан определяется как

$$(-\Delta)^\alpha f(x) \equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int d^d y e^{ik(x-y)} |k|^{2\alpha} f(y), \quad (3.20)$$

Магнитный дефект индуцирует нетривиальную одноточечную функцию для локальных операторов. Однако если конформная инвариантность выживает, тогда  $\langle \phi_{111} \rangle$  как функция координат определяется аномальной размерностью оператора  $\Delta_\phi = d/4$ . Хотя уравнение Швингера-Дайсона (3.19) трудно решить точно, оно в инфракрасии упрощается, и мы ожидаем, что его решение описывает нетривиаль-

---

<sup>8</sup>Во взаимодействующей теории (3.6) есть два характерных масштаба: один задается ультрафиолетовым обрезанием во всем пространстве, а другой - константой связи с голым дефектом. Подчеркнем, что мы изучаем дефекты в мелонной КТП, где УФ-обрезание уже послано в бесконечность. Для этого мы используем конформное решение (3.15) вместо точного пропагатора, который следует из уравнения Швингера-Дайсона (3.14).

<sup>9</sup>Мы будем считать, что  $\lambda_T$  - это перенормированная безразмерная связь,  $\phi_{abc}$  - перенормированный оператор, являющийся конформным примарным оператором, и, соответственно,  $J$  - перенормированная константа связи дефекта

ную ДКТП. Так мы имеем

$$\langle \phi_{111}(x) \rangle = \frac{N^{\frac{3}{4}} C_{d,p}}{\lambda_{\text{T}}^{\frac{1}{4}} |x_{\perp}|^{\frac{d}{4}}}. \quad (3.21)$$

Для определения коэффициента  $C_{d,p}$  удобно работать с интегральной формой уравнения Швингера-Дайсона (3.18), которое упрощается в ИК-пределе

$$F(x) = -\lambda_{\text{T}} \int d^d y G(x-y) F^3(y). \quad (3.22)$$

Это приводит к следующему интегральному уравнению

$$\frac{C_{d,q}}{|x_{\perp}|^{\frac{d}{4}}} = -\lambda_{\text{T}} C_{d,q}^3 A_d \int d^{d-p} y_{\perp} d^p y_{\parallel} \frac{1}{(|x_{\perp} - y_{\perp}|^2 + |y_{\parallel}|^2)^{\frac{d}{4}} |y_{\perp}|^{\frac{3d}{4}}}, \quad (3.23)$$

, которое может быть решено стандартными методами,

$$C_{d,p}^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{3d}{8}\right) \Gamma\left(\frac{3d-4p}{8}\right) \left(-\Gamma\left(-\frac{d}{4}\right)\right)^{\frac{1}{4}}}{\pi^{\frac{d}{4}} \Gamma\left(\frac{d}{8}\right) \left(-\Gamma\left(\frac{d-4p}{8}\right)\right) \Gamma\left(\frac{3d}{4}\right)^{\frac{1}{4}}}. \quad (3.24)$$

Обратим внимание, что правая часть данного уравнения явно положительна для  $1 \leq p < d$  и  $p+1 \leq d < 4$ . Может показаться, что информация об источнике  $J$  полностью исчезла в ИК-пределе. Однако физически мы ожидаем, что знак одноточечной функции будет фиксирован  $\text{sgn}(J)$  локализованного магнитного поля. Мы находим, что одноточечная функция для ДКТП имеет вид

$$\langle \phi_{111}(x) \rangle_{\text{normalized}} = \text{sgn}(J) \left( \frac{\Gamma\left(\frac{3d}{8}\right) \Gamma\left(\frac{3d-4p}{8}\right) \left(-\Gamma\left(-\frac{d}{4}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{8}\right) \left(-\Gamma\left(\frac{d-4p}{8}\right)\right) \Gamma\left(\frac{3d}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{N^{\frac{3}{4}}}{|x_{\perp}|^{\frac{d}{4}}}, \quad (3.25)$$

где мы нормировали  $\phi_{111}$  по его двухточечной функции. Позже мы подробно изучим РГ поток для дефекта в первом порядке  $\epsilon$  разложения и покажем, как одноточечная функция интерполирует между УФ и ИК. Здесь мы заметим, что если бы взаимодействие с дефектом было иррелевантным (размерность оператора больше, чем размерность дефекта), то решение (3.21) было бы неприменимо. Например, в действии для дефектной тензорной модели (3.6) мы рассмотрели бы следующее взаимодействие с потомками поля  $\phi_{111}$ ,

$$-J_{\text{irrel}} N^{\frac{3}{4}} \int d^p x_{\parallel} (\Delta_{\perp})^n \phi_{111}(x_{\parallel}, x_{\perp} = 0), \quad (3.26)$$

комбинаторика Фейнмановских диаграмм не меняется, и, таким образом, доминирование деревьев, доказанное в разделе 3.2, выполняется, и, следовательно, мы

приходим к уравнению Швингера-Дайсона с дефектами, аналогичному уравнению в (3.18)

$$F(x) = J_{\text{irrel}} \Delta_{\perp}^n G(x_{\perp}) - \lambda_{\Gamma} \int d^{d-p} y_{\perp} G_{\perp}(x_{\perp} - y_{\perp}) F^3(y), \quad (3.27)$$

, где

$$G_{\perp}(x) \equiv \int d^p x_{\parallel} G(x_{\perp}, x_{\parallel}) = \pi^{p/2} A_d \frac{\Gamma\left(\frac{d-2p}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{4}\right)} \frac{1}{x_{\perp}^{\frac{d}{2}-p}}. \quad (3.28)$$

В этом случае легко видеть, что в  $F(x)$  при больших  $x_{\perp}$  доминирует классический вклад от исходного члена в (3.27), как и ожидалось,

$$F(x) \rightarrow \frac{J_{\text{irrel}}}{x_{\perp}^{\frac{d}{2}+2n-p}}, \quad (3.29)$$

Это более быстрое спадание (чем в (3.21)) и нам следует интерпретировать это поведение как исчезновение одноточечной функции в ИК-пределе, и дефект становится тривиальным.

Наконец, отметим, что одноточечная функция конформного дефекта (3.21) в тензорной модели ранга-три имеет простое обобщение на общие тензорные модели ранга- $k$  [194]. В этом случае коэффициент  $C_{d,p}^{(k)}$  удовлетворяет,

$$\left(C_{d,p}^{(k)}\right)^{k-2} = - \frac{\pi^{\frac{d}{k}-\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{k}\right) \Gamma\left(\frac{d(k-1)}{2k}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{d}{k} + d - p\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2k}\right) \Gamma\left(\frac{d(k-2)}{2k}\right) \Gamma\left(\frac{d-kp}{2k}\right)} \left( - \frac{\Gamma\left(d\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\right)\right) \Gamma\left(\frac{d(k-2)}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{k}\right) \Gamma\left(\frac{d(k-1)}{k}\right)} \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (3.30)$$

### 3.3.3 Одноточечные функции примарных операторов для дефектов коразмерности один

Хотя в общем случае полный профиль одноточечной функции  $\langle \phi_{111} \rangle_{\mathcal{D}_{d-1}}$  из уравнения Швингера-Дайсона (3.19) (или (3.18)) решить трудно, для дефектов коразмерности один (т.е.  $p = d - 1$ ) это уравнение упрощается, и мы определим здесь точное решение.

В качестве разминки рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее классический точечный (т.е.  $p = 0$ ) дефект на  $d = 1$ ,

$$\partial_x^2 F(x) - \lambda F^3(x) = -J \delta(x), \quad (3.31)$$

которое имеет следующее простое решение для  $J > 0$ ,

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{|x| + a}, \quad a = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{\lambda^{\frac{1}{4}} \sqrt{|J|}}, \quad (3.32)$$



и  $F(x) \rightarrow -F(x)$  для  $J < 0$ . Заметим, что сдвиг  $a$  положителен (чтобы решение имело смысл) и определяется  $J$  (3.31).

Возвращаясь к взаимодействующему случаю, уравнение, которое мы хотим решить, имеет вид

$$\sqrt{\lambda_T} \left( \frac{4\Gamma(1 - \frac{d}{4})}{d(4\pi)^d \Gamma(\frac{3d}{4})} \right)^{\frac{1}{4}} (-\partial_{x_\perp}^2)^{\frac{d}{4}} F + \lambda_T F^3 = J\delta(x_\perp). \quad (3.33)$$

Аналогичный анализ, как и в классическом случае, дает решение для  $J > 0$ ,

$$F(x_\perp) = \frac{C_{d,d-1}}{\lambda_T^{\frac{1}{4}} (|x_\perp| + a(J))^{\frac{d}{4}}}, \quad (3.34)$$

, где сдвиг может быть определён интегрированием (3.33) по  $x$ ,

$$a(J) = \left( \frac{(3d-4)|J|}{8\lambda_T^{\frac{1}{4}} C_{d,d-1}^3} \right)^{\frac{4}{4-3d}}, \quad (3.35)$$

, которая положительна для  $d \geq 2$ . Опять же для  $J < 0$  мы можем просто поменять знак нашего решения  $F(x) \rightarrow -F(x)$ , а одноточечная функция  $\langle \phi_{111} \rangle_{\mathcal{D}_{d-1}}$  отрицательна. Это оправдывает знак в (3.25).

Зная поперечный профиль  $F(x_\perp)$  для  $\langle \phi_{111} \rangle_{\mathcal{D}_{d-1}}$  как функции  $J$ , мы можем найти явное уравнение для РГ потока источника поля  $J$ . Так бета-функция для  $J$  следует из уравнения Каллана-Симанчика для одноточечной функции,

$$\beta_J = -\frac{3d-4}{4} J, \quad (3.36)$$

которая содержит тривиальную неподвижную точку в точке  $J = 0$ , где одноточечная функция  $\langle \phi_{111} \rangle_{\mathcal{D}_{d-1}}$  исчезает, и нетривиальную сильносвязанную неподвижную точку в точке  $J = \infty$  в ИК.

### 3.3.4 Бета-функции и РГ-потоки дефектных взаимодействий

Полное решение для  $\langle \phi_{111}(x) \rangle_{\mathcal{D}_{d-1}}$ , представленное в разделе 3.3.3, демонстрирует РГ-поток от тривиального к конформному дефекту коразмерности один, вызванный локализованным магнитным взаимодействием в (3.6). Можно удивиться простоте этого потока, поскольку  $\phi_{111}$  очень релевантна для дефекта коразмерности один и в принципе вдоль потока могут быть сгенерированы другие операторы, включая двухчастичные операторы поля  $\phi_{abc}$ . Тем не менее, это упрощение является следствием предела большого  $N$  (3.4). В частности, несинглетные операторы

$O(N)^3$ , имеющие более высокую размерность масштаба, генерируются, но подавляются при больших  $N$ . Например, оператор  $\phi_{111}^2$  генерируется, но константа связи подавляется как  $\frac{1}{N^2}$ . Более того, синглетные операторы также генерируются, но не дают вклада в РГ-поток дефектной константы связи  $J$ . Ниже мы изучаем поток линейных дефектов в тензорной модели при малых  $\epsilon = 4 - d$ , в этом случае наша деформация очень маленькая и мы ожидаем, что поток будет "коротким". В этом случае мы снова получим точное решение для одноточечной функции дефектов.

### РГ-поток дефектных взаимодействий в тензорной модели

Рассмотрим общую скалярную КТП с общим потенциалом в  $d = 4 - \epsilon$  в присутствии локализованного магнитного дефекта. Система описывается следующим действием,

$$S = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_i)^2 - \frac{1}{4!} Y_{ijkl} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \right] - h \int d\tau \phi_1(\tau, \vec{x} = 0), \quad (3.37)$$

где  $Y_{ijkl}$  - абсолютно симметричный тензор констант связей. Используя  $\epsilon$ -разложение, мы можем вычислить двухпетлевые вклады в бета-функцию для  $Y_{ijkl}$  и вплоть до четырехпетлевых вкладов для константы связи дефекта  $h$ ,

$$\begin{aligned} \beta_{ijkl} &= -\epsilon Y_{ijkl} + \frac{3}{(4\pi)^2} Y_{mn(ij} Y_{kl)mn} + \frac{1}{3(4\pi)^4} Y_{mncd} Y_{d(ijk} Y_{i)mn} - \frac{6}{(4\pi)^4} Y_{(i|mpq} Y_{|j|npq} Y_{kl)mn}, \\ \beta_h &= -\frac{\epsilon}{2} h + \frac{1}{(4\pi)^2} h^3 Y_{1111} + \frac{h}{12(4\pi)^4} Y_{1mnc}^2 + \frac{h^3}{4(4\pi)^4} Y_{11mn}^2 - \frac{h^5}{12(4\pi)^4} Y_{111m}^2, \end{aligned} \quad (3.38)$$

Теперь мы рассмотрим случай тензорной модели, где мы включаем все возможные  $O(N)^3$  инвариантные взаимодействия и разлагаем  $\beta_{ijkl}$  по  $O(N)^3$  инвариантам. Аналогичный анализ был проведен для бездефектной теории в [122]. Мы приходим к следующему действию,

$$S = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_{abc})^2 + \frac{1}{4} g_T O_T + \frac{1}{4} g_P O_P + \frac{1}{4} g_{dt} O_{dt} \right] - h \int d\tau \phi_1(\tau, \vec{x} = 0), \quad (3.39)$$

где взаимодействие есть

$$O_T = \phi_{abc} \phi_{ab'c'} \phi_{a'b'c} \phi_{a'b'c'},$$

$$O_P = \frac{1}{3} [\phi_{abc} \phi_{abc'} \phi_{a'b'c} \phi_{a'b'c'} + \phi_{abc} \phi_{ab'c} \phi_{a'b'c'} \phi_{a'b'c} + \phi_{abc} \phi_{a'bc} \phi_{a'b'c'} \phi_{a'b'c'}],$$

$$O_{dt} = \phi_{abc} \phi_{abc} \phi_{a'b'c} \phi_{a'b'c'},$$

, которые соответствуют тетраэдрическому, подушечному и двухследовому взаимодействию.

Как и ожидалось, бета-функции совпадают с полученными в [122] и имеют вид,

$$\begin{aligned}
\beta_T &= -\epsilon g_T - \frac{(5N^3 + 82) g_{dt}^2 g_T}{64\pi^4} + g_{dt} \left( -\frac{(N(5N + 17) + 17) g_P g_T}{32\pi^4} - \frac{15N g_T^2}{32\pi^4} - \frac{g_P^2}{4\pi^4} + \frac{3g_T}{2\pi^2} \right) \\
&+ \frac{(N^3 - 15N - 10) g_T^3}{128\pi^4} - \frac{(N(2N + 13) + 24) g_P^3}{288\pi^4} + g_P^2 \left( \frac{1}{6\pi^2} - \frac{(N(N(N + 15) + 93) + 101) g_T}{384\pi^4} \right) \\
&+ g_P \left( \frac{(N + 1) g_T}{4\pi^2} - \frac{(N(N + 4) + 13) g_T^2}{32\pi^4} \right), \\
\beta_P &= -\epsilon g_P - \frac{(5N^3 + 82) g_{dt}^2 g_P}{64\pi^4} + g_{dt} \left( -\frac{(N(7N + 15) + 29) g_P^2}{32\pi^4} + g_P \left( \frac{3}{2\pi^2} - \frac{(39N + 48) g_T}{32\pi^4} \right) \right. \\
&\left. - \frac{9(N + 2) g_T^2}{16\pi^4} \right) + \frac{3(N + 2) g_T^2}{8\pi^2} - \frac{3(N^2 + N + 4) g_T^3}{32\pi^4} - \frac{(N(5N(N + 9) + 243) + 343) g_P^3}{1152\pi^4} \\
&+ g_P^2 \left( \frac{N(N + 5) + 12}{24\pi^2} - \frac{(2N(2N + 9) + 29) g_T}{32\pi^4} \right) \\
&+ g_P \left( \frac{(N + 2) g_T}{2\pi^2} - \frac{(N(N(N + 12) + 99) + 98) g_T^2}{128\pi^4} \right), \\
\beta_{dt} &= -\epsilon g_{dt} - \frac{(9N^3 + 42) g_{dt}^3}{64\pi^4} + g_{dt}^2 \left( -\frac{11(N^2 + N + 1) g_P}{32\pi^4} + \frac{N^3 + 8}{8\pi^2} - \frac{33N g_T}{32\pi^4} \right) \\
&+ g_{dt} \left( g_P \left( \frac{N^2 + N + 1}{4\pi^2} - \frac{(5N(N + 1) + 17) g_T}{32\pi^4} \right) - \frac{5(N^3 + 3N + 2) g_T^2}{128\pi^4} \right. \\
&\left. - \frac{(N(5N(N + 3) + 93) + 97) g_P^2}{384\pi^4} + \frac{3N g_T}{4\pi^2} \right) + g_P \left( \frac{g_T}{4\pi^2} - \frac{(N^2 + N + 4) g_T^2}{32\pi^4} \right) \\
&- \frac{7(N(N + 3) + 5) g_P^3}{576\pi^4} + g_P^2 \left( \frac{2N + 3}{24\pi^2} - \frac{(N + 1) g_T}{8\pi^4} \right) - \frac{3N g_T^3}{64\pi^4}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, бета-функция для дефекта имеет вид

$$\begin{aligned}
\beta_h &= -\frac{h\epsilon}{2} + h^3 \left( \frac{g_{dt} (8\pi^2 - (N^2 + N + 7) g_p)}{128\pi^4} - \frac{(N^3 + 8) g_{dt}^2}{256\pi^4} g_T \left( \frac{8\pi^2 - 3(N + 2) g_p}{128\pi^4} - \frac{3(N + 2) g_{dt}}{128\pi^4} \right) \right. \\
&+ \left. + \frac{g_p (48\pi^2 - (N(N + 7) + 19) g_p)}{768\pi^4} - \frac{3(N + 2) g_T^2}{256\pi^4} \right) \\
&+ h^5 \left( g_T \left( -\frac{3g_{dt}}{128\pi^4} - \frac{3g_p}{128\pi^4} \right) - \frac{3g_{dt} g_p}{128\pi^4} - \frac{3g_{dt}^2}{256\pi^4} - \frac{3g_p^2}{256\pi^4} - \frac{3g_T^2}{256\pi^4} \right) \\
&+ h \left( g_T \left( \frac{3N g_{dt}}{128\pi^4} + \frac{(N^2 + N + 1) g_p}{128\pi^4} \right) + \frac{(N^2 + N + 1) g_{dt} g_p}{128\pi^4} + \frac{(N^3 + 2) g_{dt}^2}{256\pi^4} \right. \\
&+ \left. \frac{(N^3 + 3N + 2) g_T^2}{512\pi^4} + \frac{(N(N(N + 3) + 9) + 5) g_p^2}{1536\pi^4} \right).
\end{aligned}$$

Применяем большой  $N$  предел, как в (3.4),

$$h \rightarrow JN^{\frac{3}{4}}, \quad g_T \rightarrow \frac{\lambda_T}{N^{\frac{3}{2}}}, \quad g_P \rightarrow \frac{\lambda_P}{N^2}, \quad g_{dt} \rightarrow \frac{\lambda_{dt}}{N^3}, \quad (3.40)$$

и взяв предел  $N \rightarrow \infty$ , получим

$$\begin{aligned}
\beta_J &= -\frac{\epsilon}{2}J + \frac{J^3\lambda_T}{16\pi^2} + \frac{J\lambda_T^2}{512\pi^4} - \frac{3J^5\lambda_T^2}{256\pi^4}, \\
\beta_T &= -\epsilon\lambda_T + \frac{\lambda_T^3}{128\pi^4}, \\
\beta_P &= -\epsilon\lambda_P + \frac{\lambda_P^2}{24\pi^2} - \frac{\lambda_P\lambda_T^2}{128\pi^4} + \frac{3\lambda_T^2}{8\pi^2}, \\
\beta_{dt} &= -\epsilon\lambda_{dt} + \frac{\lambda_{dt}^2}{8\pi^2} + \frac{\lambda_{dt}\lambda_P}{4\pi^2} - \frac{5\lambda_{dt}\lambda_T^2}{128\pi^4} + \frac{\lambda_P^2}{12\pi^2} - \frac{\lambda_P\lambda_T^2}{32\pi^4},
\end{aligned} \tag{3.41}$$

которые включают все члены, имеющие отношение к ведущему порядку в  $\epsilon$ -разложении.

ДКТП, описывающая ИК-предел локализованного магнитного дефекта (3.6), является неподвижной точкой этих бета-функций, где константы взаимодействия принимают следующие значения,<sup>10</sup>

$$\lambda_T = 8\pi^2\sqrt{2\epsilon}, \quad \lambda_P = 24\pi^2\sqrt{-2\epsilon}, \quad \lambda_{dt} = -8\pi^2\sqrt{2}(3 + \sqrt{3})\sqrt{-\epsilon}, \quad J = \pm \frac{\epsilon^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{3}{4}}}. \tag{3.42}$$

### Одноточечная функция оператора $\phi_{111}$ при малых $\epsilon = 4 - d$

Здесь мы начнем с изучения поведения одноточечной функции  $\langle\phi_{111}\rangle_{\mathcal{D}_1}$  в области вблизи дефекта, описываемого (3.6) с  $p = 1$ . Это соответствует ультрафиолетовому пределу тензорной модели дефекта и контролируется теорией возмущений по константе взаимодействия  $J$ . Для удобства мы вводим здесь следующие переменные

$$\tilde{F} = \lambda_T^{\frac{1}{4}}F, \quad \tilde{J} = \lambda_T^{-\frac{1}{4}}J, \tag{3.43}$$

, так что дефектное уравнение Швингера-Дайсона (3.19) можно записать в виде

$$B_d(-\Delta_\perp)^{d/4}\tilde{F} + \tilde{F}^3 = \tilde{J}\delta^{d-1}(x_\perp). \tag{3.44}$$

Мы ожидаем следующее пертурбативное разложение для малых  $x_\perp$  (эквивалентно большим  $k_\perp$  в пространстве Фурье),

$$\tilde{F}(x_\perp) = \frac{1}{x_\perp^{\frac{d}{2}-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \tilde{J}^{1+2n} (B_d)^{3n+2} x_\perp^{(2-\frac{d}{2})n}, \quad F(k_\perp) = \frac{1}{k_\perp^{\frac{d}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{k_\perp^{(2-\frac{d}{2})n}} \tilde{J}^{1+2n} (B_d)^{3n+2}, \tag{3.45}$$

, где коэффициенты связаны между собой следующим образом

$$\tilde{a}_n = \pi^{\frac{1-d}{2}} 2^{\frac{n(d-2)-d}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n(d-4)+d-2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+n(4-d)}{4}\right)} a_n. \tag{3.46}$$

<sup>10</sup>Необходимо включить члены высшего порядка в  $J$  и  $\lambda_T$  в (3.41) для определения поправок высшего порядка по  $\epsilon$ .

В частности, первый коэффициент  $a_0$  фиксируется исходным членом в (3.44)

$$a_0 = \frac{1}{B_d^3}. \quad (3.47)$$

Кроме того, коэффициенты  $a_n$  подчиняются следующему рекурсивному соотношению из (3.44),

$$P_{d,n}\tilde{a}_n = - \sum_{n_1+n_2+n_3+1=n} \tilde{a}_{n_1}\tilde{a}_{n_2}\tilde{a}_{n_3}, \quad P_{d,n} = \frac{2^{\frac{d}{2}}\Gamma\left(\frac{n(4-d)+d}{4}\right)\Gamma\left(\frac{n(d-4)+2(d-1)}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n(4-d)}{4}\right)\Gamma\left(\frac{n(d-4)+d-2}{4}\right)}. \quad (3.48)$$

Это уравнение упрощается

$$\tilde{a}_n = -\frac{2}{n\epsilon} \sum_{n_1+n_2+n_3+1=n} \tilde{a}_{n_1}\tilde{a}_{n_2}\tilde{a}_{n_3}, \quad (3.49)$$

, которое может быть решено следующим образом. Введем функцию  $\alpha(t)$ ,

$$\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n t^n, \quad (3.50)$$

, которая удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению, полученному в (3.49),

$$\frac{\partial\alpha(t)}{\partial t} = -\frac{2}{\epsilon}\alpha^3(t). \quad (3.51)$$

Решение, удовлетворяющее начальному условию  $\alpha(0) = \tilde{a}_0$ , имеет вид

$$\alpha(t) = \frac{\tilde{a}_0}{\sqrt{\frac{4t\tilde{a}_0^2}{\epsilon} + 1}}. \quad (3.52)$$

Следовательно,

$$\tilde{F}(x_{\perp}) = 2^{-\frac{1}{4}}\epsilon^{\frac{1}{4}} \frac{\tilde{J}}{x_{\perp}^{\frac{2-\epsilon}{2}}} \frac{1}{\sqrt{8 \cdot 2^{\frac{1}{4}}\pi\tilde{J}^2\epsilon^{-\frac{1}{4}}x_{\perp}^{\frac{\epsilon}{2}} + 1}}, \quad (3.53)$$

, где мы использовали, что

$$B_d = \frac{1}{2^{\frac{7}{3}}\pi\epsilon^{\frac{1}{4}}}(1 + \mathcal{O}(\epsilon)), \quad \tilde{a}_0 = 32\epsilon^{\frac{3}{4}}\pi^2(1 + \mathcal{O}(\epsilon)). \quad (3.54)$$

При малых  $\epsilon$  мы также можем решить рекурсивное соотношение (3.48) численно. Численные решения, найденные нами для  $\tilde{a}_n$ , согласуются с (3.53) для малых  $\epsilon$ .

Обсудим теперь некоторые особенности нашего решения (3.53), которое является непертурбативным по  $\tilde{J}$ . Мы видим, что  $\tilde{J}^{4/\epsilon}$  задает характерный масштаб для дефекта. Решение (3.53) имеет простое поведение на малых и больших расстояниях,

$$x_{\perp} \ll \tilde{J}^{-4/\epsilon} : \tilde{F}(x_{\perp}) \rightarrow \frac{2^{-\frac{1}{4}}\epsilon^{\frac{1}{4}}\tilde{J}}{x_{\perp}^{\frac{d}{2}-1}}, \quad x_{\perp} \gg \tilde{J}^{-4/\epsilon} : \tilde{F}(x_{\perp}) \rightarrow \text{sgn}(\tilde{J}) \frac{\epsilon^{\frac{3}{8}}}{2^{15/8}\sqrt{\pi}x_{\perp}^{\frac{d}{4}}}. \quad (3.55)$$

На малых расстояниях в  $\tilde{F}(x_\perp)$  преобладает классический вклад с пертурбативными поправками в  $\tilde{J}$ , а на больших расстояниях оно приближается к конформному решению, найденному в разделе 3.3.2, где зависимость от  $\tilde{J}$  исчезает. Более того, решение (3.53) охватывает весь РГ поток для дефекта, определенного как локализованное магнитное возмущение в (3.6).

### 3.4 Энтропия дефекта и $g$ -функция

Конформные дефекты нечетной размерности (т.е.  $p$  нечетно) имеют наблюдаемую величину, известную как *энтропию дефекта*, которую мы обозначим как  $s(\mathcal{D}_p)$ , и не зависят от схемы регуляризации. Она определяется как конечная часть свободной энергии дефекта, помещенного на сферу  $S^p$  размера  $R$ ,

$$\langle \mathcal{D}_p \rangle \equiv \frac{Z_{\text{DCFT}}}{Z_{\text{CFT}}}, \quad \log \langle \mathcal{D}_p \rangle = \int_{S^p} \left( \sum_{i=0}^{\frac{(p-1)}{2}} \alpha_i \Lambda^{p-2i} \mathcal{R}^i \right) + s(\mathcal{D}_p). \quad (3.56)$$

Здесь  $\mathcal{R}^i$  схематически обозначает инварианты кривизны Римана, а  $\Lambda$  - ультрафиолетовое обрезание. В то время как коэффициенты  $\alpha_i$  зависят от регуляризационной схемы, конечный член  $s(\mathcal{D}_p)$  универсален. Для линейных дефектов энтропия дефекта связана с  $g$ -функцией дефекта через  $s = \log g$ , которая впервые была изучена в контексте конформных граничных условий в двумерных конформных теориях поля [6]. В этом случае единственная возможная расходимость в  $\log \langle \mathcal{D}_p \rangle$  проявляется в массовом члене, и энтропия дефекта может быть получена следующим образом [111],

$$s(\mathcal{D}_1) = \left( 1 - R \frac{\partial}{\partial R} \right) \log \langle \mathcal{D}_1 \rangle, \quad (3.57)$$

Ожидается, что энтропия дефекта (для общих нечетных  $p$ ) служит мерой степеней свободы на дефекте, играя ту же роль, что и свободная энергия КТП на сфере (ее конечная часть). В частности, энтропия дефекта может быть определена вдоль всего РГ потока (вдали от неподвижных точек) и было предположено, что она монотонно убывает вдоль РГ потока (см. недавнее обобщение в [202]). Недавно это было доказано для линейных дефектов ( $p = 1$ ) в [77]. В то время как энтропию линейного дефекта легко определить на примере свободной теории, для дефектов в сильно связанных теориях без суперсимметрии известно немного результатов. Ниже мы вычислим энтропию линейного дефекта для локализованного магнитного дефекта, определенного в (3.6) в сильносвязанной мелонной КТП. Сначала

мы проводим вычисления точно, суммируя по мелоническим деревьям с помощью уравнений Швингера-Дайсона. Затем мы вычисляем энтропию дефекта пертурбативно при малых  $\epsilon = 4 - d$ , а также проверим градиентную формулу для РГ потока дефекта, недавно доказанную в [77].

### 3.4.1 Точная энтропия дефекта из мелонных деревьев

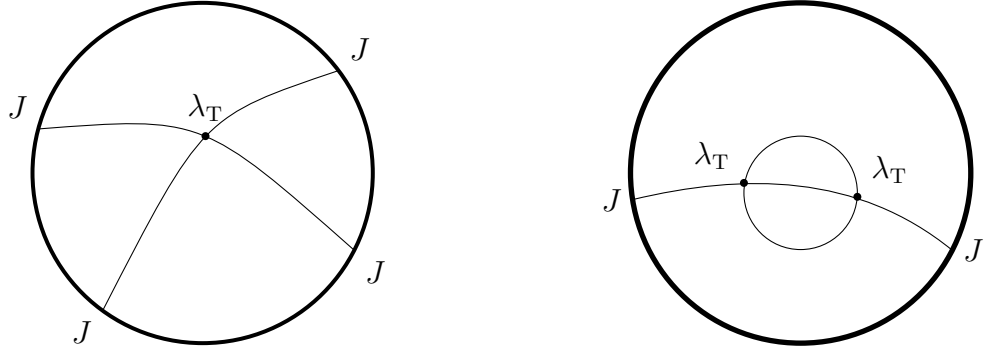


Рис. 3.7: Два бесконечных семейства диаграмм, вносящих вклад в  $g$ -функцию дефекта. Их вклады совпадают из-за уравнений Швингера-Дайсона.

Начнем с линейного дефекта, вытянутого вдоль  $x_2$ , и находящимся в

$$x_1 = \frac{1}{2R}, \quad x_3 = \dots = x_d = 0, \quad (3.58)$$

для которого мы уже определили одноточечную функцию  $\langle \phi_{111} \rangle_{\mathcal{D}_1}$  в ИК ДКТП (см. (3.21) и (3.25)). Выполнив инверсию  $x_i \rightarrow \frac{x_i}{x^2}$  с последующей трансляцией  $x_1 \rightarrow x_1 + R$ , мы отобразим дефект в окружность

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2, \quad x_3 = \dots = x_d = 0. \quad (3.59)$$

Соответственно, дефектная одноточечная функция в (3.21) преобразуется в <sup>11</sup>.

$$\langle \phi_{111}(x) \rangle = \frac{N^{\frac{3}{4}} C_{d,1}}{\lambda_T^{\frac{1}{4}}} \left( \frac{4r^2}{(-R^2 + x_1^2 + x_2^2)^2 + 2(R^2 + x_1^2 + x_2^2)x_1^2 + x_\perp^4} \right)^{\frac{d}{8}}, \quad x_\perp^2 = \sum_{i=3}^d x_i^2. \quad (3.60)$$

Энтропия дефекта  $\langle \mathcal{D}_1 \rangle$  может быть вычислена диаграмматически путем суммирования по мелонным деревьям (см., например, рисунок 3.2), которые начинаются

<sup>11</sup>Для обзора конформных структур корреляционных функций в ДКТП мы отсылаем читателей к [46]

на дефекте. В этом случае существует два бесконечных семейства диаграмм, которые вносят вклад в энтропию дефекта, как показано на рисунке 3.7. В явном виде первые несколько вкладов имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} \log \langle \mathcal{D}_1 \rangle &= \frac{J_0^2}{2} R^2 \int d\varphi_1 d\varphi_2 \int d^d x d^d y G_0(z(\varphi_1) - z(\varphi_2)) \\ &\quad - \frac{1}{4} \lambda_T J_0^4 R^4 \int d^d x \prod_{i=1}^4 \int d\varphi_i \prod G_0(x - z(\varphi_i)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda_T^2 J_0^2 R^2 \int d\varphi_1 d\varphi_2 \int d^d x d^d y G_0(z(\varphi_1) - x) G_0^3(x - y) G_0(y - z(\varphi_2)) + \dots, \end{aligned} \quad (3.61)$$

где  $z(\varphi)$  параметризует контур дефекта (3.59) с  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Здесь  $G_0(x)$  - голый пропагатор, а  $J_0$  - голая константа связи для дефекта. Хотя первые несколько интегралов легко вычислить, что мы и рассмотрим в разделе 3.4.2, ясно, что этот подход неприменим для получения результатов вдали от 4 измерений. Вместо этого мы воспользуемся уравнением Швингера-Дайсона (3.18), выведенным в разделе 3.3.1, чтобы суммировать все эти диаграммы в большом  $N$  пределе (3.4).

Действительно, вклады от двух бесконечных семейств диаграмм на рисунке 3.7 имеют следующий вид

$$\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} \log \langle \mathcal{D}_1 \rangle = -\frac{1}{4} \lambda_T \int d^d x \langle \phi_{111}(x) \rangle_{\mathcal{D}_1}^4 + \frac{1}{2} \lambda_T^2 \int d^d x d^d y G^3(x - y) \langle \phi_{111}(x) \rangle_{\mathcal{D}_1} \langle \phi_{111}(y) \rangle_{\mathcal{D}_1}. \quad (3.62)$$

Из уравнений Швингера-Дайсона (3.14) и (3.22) следует, что второй член дважды равен первому. Поэтому общий вклад можно переписать в виде

$$\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} \log \langle \mathcal{D}_1 \rangle = \frac{1}{4} \lambda_T \int d^d x \langle \phi_{111}(x) \rangle_{\mathcal{D}_1}^4. \quad (3.63)$$

Для вычисления этого интеграла удобно работать со следующими “тороидальными” координатами,

$$\begin{aligned} x_1 &= R \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \cos \varphi, \\ x_2 &= R \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \sin \varphi, \\ x_{i+2} &= \hat{n}_i \frac{\sin \sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma}, \quad i = 1, 2, \dots, d-2, \end{aligned}$$

где  $\hat{n}_i$  - единичный вектор, параметризующий единицу  $S^{d-3}$ . Где эти координаты пробегают следующие значения -  $\tau \in [0, \infty)$ ,  $\sigma \in [0, \pi]$  и  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Сам дефект теперь находится в точке  $\tau = \infty$ . При большом  $\tau$  (т.е. в “тороидальной” окрестности



петли дефекта) вышеуказанные координаты принимают следующий вид,

$$x_1 \sim R \cos \varphi + 2R \cos \sigma \cos \varphi e^{-\tau}, \quad x_2 \sim R \sin \varphi + 2R \cos \sigma \sin \varphi e^{-\tau}, \quad x_i \sim 2R \sin \sigma e^{-\tau} \hat{n}_i.$$

Мы видим, что  $\varphi$ ,  $\sigma$  вместе с единичным вектором  $\hat{n}_i$  являются именно координатами на  $S^1 \times S^{d-2}$  границе этой “тороидальной” окрестности.

Одноточечная функция дефекта (3.60) принимает простой вид в тороидальных координатах (3.64),

$$\langle \phi_{111}(\sigma, \tau, \varphi, \vec{n}_i) \rangle_{\mathcal{D}_1} = \frac{N^{\frac{3}{4}} C_{d,1} |\cos \sigma - \cosh \tau|^{\frac{d}{4}}}{\lambda_{\Gamma}^{\frac{1}{4}} R^{\frac{d}{4}}}. \quad (3.64)$$

Тогда свободная энергия дефекта дается следующим интегралом,

$$\log \langle \mathcal{D}_1 \rangle = \frac{1}{4} \times 2\pi N^{\frac{3}{2}} \text{vol}_{S^{d-3}} C_{d,1}^4 \int d\sigma d\tau \sinh \tau |\sin \sigma|^{d-3} = C_{d,1}^4 N^{\frac{3}{2}} \frac{\pi^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int_0^{\infty} d\tau \sinh \tau, \quad (3.65)$$

где мы использовали, что якобиан в тороидальных координатах имеет вид

$$d^d x = R^d \frac{|\sin \sigma|^{d-3} \sinh \tau}{|\cos \sigma - \cosh \tau|^d} d\sigma d\tau d\varphi d\text{vol}_{S^{d-3}}. \quad (3.66)$$

Интеграл (3.65) расходится в УФ-диапазоне из-за вклада приходящего от области вблизи дефекта. Это можно регуляризовать, введя УФ-обрезание  $\Lambda$ , которая обрезает интеграл  $\tau$  в точке  $e^{\tau^*} = R\Lambda$ . Тогда мы получаем при больших  $\Lambda$ ,

$$\log \langle \mathcal{D}_1 \rangle_{\text{reg}} = N^{\frac{3}{2}} C_{d,1}^4 \frac{\pi^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \left( \frac{1}{2} R\Lambda - 1 \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R\Lambda}\right). \quad (3.67)$$

Мы видим, что расходящийся член пропорционален радиусу петли дефекта, как и ожидалось, и энтропия дефекта, не зависящая от схемы, может быть извлечена с помощью (3.57),

$$s(\mathcal{D}_1) = -N^{\frac{3}{2}} \frac{2^{1-d} \sqrt{\pi} (d-4)^2 \Gamma\left(\frac{3d}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(1 - \frac{d}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{(4-3d)^2 \sqrt{d} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{4}\right)^2}, \quad (3.68)$$

которая отрицательна для  $2 \leq d < 4$  и монотонно растет от  $s = -1$  при  $d = 2$  до  $s = 0$  при  $d = 4$ .

Теперь вспомним, что дефект тензорной модели (3.6) в  $p = 1$  описывает РГ-поток от тривиального дефекта к нетривиальному конформному дефекту. Тривиальный дефект, очевидно, имеет нулевую энтропию. Поэтому этот поток подчиняется  $g$ -теореме из [111, 77].

### 3.4.2 Энтропия дефекта при малых $\epsilon$

В качестве проверки мы также вычислим энтропию дефекта в  $\epsilon = 4 - d$  разложении.<sup>12</sup> Мы сосредоточимся на лидирующем ответе при малых  $\epsilon$  и больших  $N$ , который получает вклады до двух петель, как в (3.61),

$$\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} \log \langle \mathcal{D}_1 \rangle = \frac{J_0^2}{2} I_1 - \frac{J_0^4 \lambda_T}{4} I_2 + \frac{J_0^2 \lambda_T^2}{2} I_3 + \mathcal{O}(J_0^6 \lambda_T^2, J_0^2 \lambda_T^4), \quad (3.69)$$

, где  $J_0$  - голая константа связи для дефекта. Первый член в (3.69) - это вклад от пропагатора, привязанного к петле дефекта, а второй и третий члены соответствуют диаграммам на рисунке 3.7 при ведущем порядке в пертурбативном разложении при малых  $\epsilon$ . В явном виде их вклады определяются следующими интегралами,

$$\begin{aligned} I_1 &= R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 G_0(z(\varphi_1) - z(\varphi_2)), \quad I_2 = R^4 \int d^d x \prod_{i=1}^4 \left( \int_0^{2\pi} d\varphi_i G_0(x - z(\varphi_i)) \right), \\ I_3 &= R^2 \int d^d x d^d y \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 G_0(x - z(\varphi_1)) G_0^3(x - y) G_0(y - z(\varphi_2)), \end{aligned} \quad (3.70)$$

с голым пропагатором

$$G_0(x) = \frac{f(d, 2)}{(2\pi)^d |x|^{d-2}}. \quad (3.71)$$

где коэффициент  $f(d, a)$  определен в (3.16).

Мы можем явно вычислить эти интегралы

$$I_1 = -\frac{\epsilon}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad I_2 = -\frac{1}{16\pi^2} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad I_3 = \frac{3}{2048\pi^4} + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (3.72)$$

Далее нам необходимо учесть перенормировку константы связи  $J$ . Как обычно при перенормировке, мы разделяем голую константу связи  $J_0$  на перенормированную константу связи  $J$  и контрчлен  $\delta J$ ,

$$J_0 = J + \delta J, \quad \delta J = \delta_2 J + \delta_3 J. \quad (3.73)$$

Эти контрчлены могут быть извлечены из диаграмм, изображенных на рисунке 3.8.

Сначала вычислим одноточечную функцию голого оператора  $\phi_{111}^0$ ,

$$\langle \phi_{111}^0(k_\perp) \rangle_{\mathcal{D}_1} = \frac{J_0}{k_\perp^2} + \frac{\lambda_T J_0^3}{k_\perp^{10-2d}} \left( \frac{f(d-1, 2)}{(2\pi)^{d-1}} \right)^3 f(d-1, 3d-9) + \frac{\lambda_T^2 J_0}{k_\perp^{10-2d}} \left( \frac{f(d, 2)}{(2\pi)^d} \right)^3 f(d, 3d-6). \quad (3.74)$$

<sup>12</sup>См. [76] для аналогичных вычислений в  $O(N)$  векторной модели

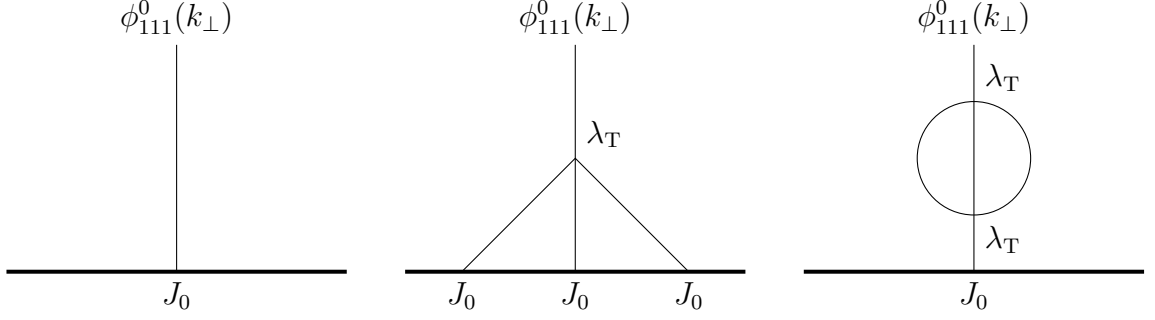


Рис. 3.8: The diagrams that contribute to the counterterms for the defect coupling constant.

Мы учитываем перенормировку  $\phi_{111}^0 = Z_\phi \phi_{111}$ , изучая двухточечную функцию в пертурбативной тензорной модели,

$$\langle \phi_{111}^0(k) \phi_{111}^0(-k) \rangle = \frac{1}{k^2} + \frac{\lambda_T^2}{k^{10-2d}} \left( \frac{f(d, 2)}{(2\pi)^d} \right)^3 f(d, 3d - 6), \quad (3.75)$$

и находим,

$$Z_\phi = 1 - \frac{\lambda_T^2}{1024\pi^4\epsilon}. \quad (3.76)$$

Тогда из одноточечной функции перенормированного поля  $\phi_{111}$  получаем следующие выражения для контрчленов,

$$\delta J = \frac{\lambda_T J_0^3}{32\pi^2\epsilon} + \frac{\lambda_T^2 J_0}{1024\pi^4\epsilon}. \quad (3.77)$$

Складывая вместе (3.69), (3.72), (3.73) и (3.77), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} \log \langle \mathcal{D}_1 \rangle &= -J_0^{\frac{2}{8}}\epsilon + \frac{J_0^4 \lambda_T}{64\pi^2} + \frac{3J_0^2 \lambda_T^2}{4096\pi^4} + \mathcal{O}(J_0^6 \lambda_T^2, J_0^2 \lambda_T^4), \\ &= -J_0^{\frac{2}{8}}\epsilon + \frac{J^4 \lambda_T}{128\pi^2} + \frac{J^2 \lambda_T^2}{2048\pi^4} + \mathcal{O}(J^6 \lambda_T^2, J^2 \lambda_T^4). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Подставляя значения для  $\lambda_T$  и  $J$  из (3.42), находим энтропию дефекта для ДКТП,

$$s(\mathcal{D}_1) \stackrel{\text{f.p.}}{=} \log \langle \mathcal{D}_1 \rangle \stackrel{\text{f.p.}}{=} -N^{\frac{3}{2}} \frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{64\sqrt{2}} + \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{5}{2}}). \quad (3.79)$$

Это совпадает с (3.68).

Недавно в [77] было доказано, что РГ-поток линейной дефектной петли радиуса  $R$  удовлетворяет градиентной формуле (обобщение [111]),

$$R \frac{\partial}{\partial R} s(\mathcal{D}_1) = -\frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \langle T_{\mathcal{D}}(\varphi_1) T_{\mathcal{D}}(\varphi_2) \rangle_c |z(\varphi_1) - z(\varphi_2)|^2, \quad (3.80)$$

в котором утверждается, что изменение энтропии дефекта в  $R$  контролируется двухточечной функцией тензоров энергии импульса дефекта  $T_{\mathcal{D}}$ . Здесь для локализованного магнитного дефекта (см. также [76]) тензор напряжений дефекта имеет

вид  $T_{\mathcal{D}}(\varphi) = N^{\frac{3}{4}}\beta_J\phi(z(\varphi))$ , где бета-функция для констант связи дефектов имеет вид

$$\beta_J = -\frac{\epsilon}{2}J + \frac{J^3\lambda_{\text{T}}}{16\pi^2} + \frac{J\lambda_{\text{T}}^2}{512\pi^4} + \mathcal{O}(J^5\lambda_{\text{T}}^2, J^3\lambda_{\text{T}}^3). \quad (3.81)$$

Мы можем проверить градиентную формулу (3.80) для нашего РГ-потока. Используя уравнение Каллана-Симанзика,

$$\left(R\frac{\partial}{\partial R} + \beta_J\frac{\partial}{\partial J}\right)\log\langle\mathcal{D}_1\rangle = 0, \quad (3.82)$$

следует, что градиентная формула (3.80) становится в ведущем порядке в  $\epsilon$ -разложении,

$$\frac{\partial}{\partial J}\log\langle\mathcal{D}_1\rangle = \frac{N^{\frac{3}{2}}}{2}\beta_J, \quad (3.83)$$

что действительно совпадает с (3.78).

### 3.5 Дефектные двухточечные функции

Двухточечные функции операторов в ДКТП являются важными наблюдаемыми, которые обычно находятся с помощью уравнений конформной теории поля [46, 163]. Двухточечная функция  $\langle\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y)\rangle_{\mathcal{D}_p}$  в присутствии дефекта  $\mathcal{D}_p$  больше не фиксируется конформной симметрией. Она нетривиально зависит от двух конформно инвариантных переменных  $\xi_1$  и  $\xi_2$ ,

$$\xi_1 = \frac{|x-y|^2}{4|x_{\perp}||y_{\perp}|}, \quad \xi_2 = \frac{x_{\perp}\cdot y_{\perp}}{|x_{\perp}||y_{\perp}|}. \quad (3.84)$$

Заметим, что  $\xi_2$  тривиально для  $p = d - 1$ . Для  $\langle\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y)\rangle_{\mathcal{D}_p}$  существует два канала ОПЕ. В объемном канале мы берем ОПЕ операторов теории и разлагаем двухточечную функцию в сумму по одноточечным функциям. В дефектном канале мы вместо этого раскладываем примарные операторы КТП в локальные операторы на дефекте, а затем вычисляем их двухточечные функции. Ассоциативность алгебры операторов ДКТП требует, чтобы два ОПЕ-разложения давали одну и ту же двухточечную функцию, что подразумевает нетривиальные соотношения между локальными операторами на дефекте и в самой КТП.

Обычно очень трудно получить двухточечные функции дефектов в сильно связанных КТП. В этом разделе мы объясним, как получить такие двухточечные функции для примарных операторов  $\phi_{abc}$  в тензорной модели дефектов. Кроме того, мы обсудим, как вычислить одноточечные функции билинейных операторов.

### 3.5.1 Двухточечные функции $\phi_{abc}$

Разобравшись с тем, как одноточечные функции  $\langle \phi_{abc} \rangle_{\mathcal{D}_p}$  возникают через диаграммы мелонных деревьев в тензорных моделях с дефектами, мы исследуем  $O(N)^3$  симметричную двухточечную функцию

$$\langle \phi_{abc}(x)\phi_{abc}(y) \rangle_{\mathcal{D}_p} \equiv N^{\frac{3}{2}} F_2(x, y), \quad (3.85)$$

тем же диаграммным методом. В этом случае, помимо мелонных древовидных диаграмм на рисунке 3.2, имеются и другие вклады того же порядка по  $N$  от *лестничных* диаграмм на рисунке 3.9.<sup>13</sup> Если вклад дерева в (3.85) довольно прост и учитывается произведением двух одноточечных функций  $\langle \phi_{111} \rangle_{\mathcal{D}_p}$ , то лестничная часть гораздо сложнее. Отметим, что проблема суммирования лестничных вкладов возникает и при вычислении четырехточечных функций в тензорных моделях или модели Сачдева-Е-Китаева (SYK) [142, 229].

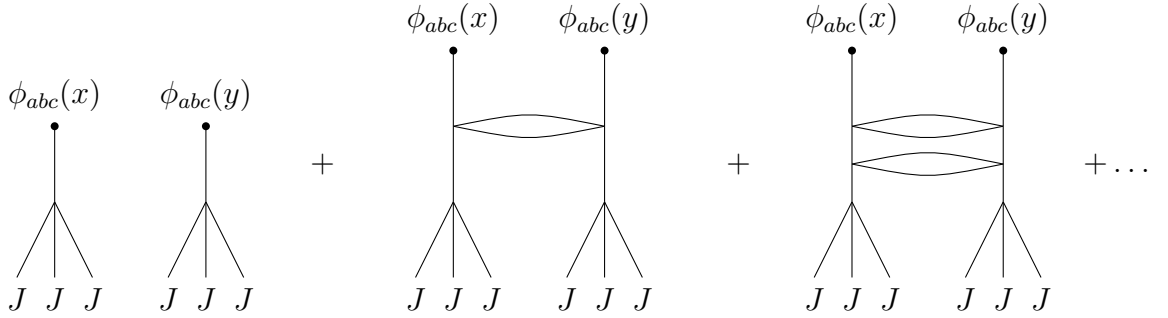


Рис. 3.9: Диаграммы, дающие вклад в дефектную двухточечную функцию  $\langle \phi_{abc}(x)\phi_{abc}(y) \rangle_{\mathcal{D}_p}$  в большом пределе  $N$ . По сравнению со случаем одноточечной функции  $\langle \phi_{111} \rangle_{\mathcal{D}_p}$ , здесь помимо арбузных деревьев имеются также лестничные диаграммы.

Суммирование лестничных вкладов для двухточечной функции (3.85) может быть выполнено с помощью следующего уравнения,

$$K(x_1, x_2; x_3, x_4) = 3\lambda_T^2 G(x_{13})G(x_{24})G(x_{34})^2 = \frac{(4\pi)^d d\Gamma\left(\frac{3d}{4}\right)}{4\Gamma\left(1 - \frac{d}{4}\right)} \frac{1}{|x_{13}|^{\frac{d}{2}} |x_{24}|^{\frac{d}{2}} |x_{34}|^d}. \quad (3.86)$$

Следовательно, двухточечная функция имеет следующий вид,

$$F_2(x_1, x_2) = F(x_1)F(x_2) + \int d^d x_3 d^d x_4 K(x_1, x_2; x_3, x_4) F(x_3)F(x_4) + \\ + \int d^d x_3 d^d x_4 d^d x_5 d^d x_6 K(x_1, x_2; x_3, x_4) K(x_3, x_4; x_5, x_6) F(x_5)F(x_6) + \dots, \quad (3.87)$$

<sup>13</sup>Подчеркнем, что для общих двухточечных функций  $\phi_{abc}$ , которые не являются  $O(N)^3$  синглетами, лестничные вклады будут подавлены как  $1/N^2$  из-за непланарности

где  $F(x)$  определено в (3.17). Формально эти вложенные интегралы представляют собой "геометрическую прогрессию"

$$F_2(x_1, x_2) = \int d^d x_3 d^d x_4 \mathcal{F}_s(x_1, x_2; x_3, x_4) F(x_3) F(x_4), \quad \mathcal{F}_s = \frac{1}{1-K}. \quad (3.88)$$

Отметим, что  $\mathcal{F}_s(x_1, x_2; x_3, x_4)$  связана с четырехточечными функциями в тензорных моделях [229, 197, 223],

$$\langle \phi_{abc}(x_1) \phi_{abc}(x_2) \phi_{111}(x_3) \phi_{111}(x_4) \rangle_{\text{bulk}} = \int d^d x_5 d^d x_6 \mathcal{F}_s(x_1, x_2; x_5, x_6) G(x_5, x_3) G(x_6, x_4).$$

Таким образом, используя уравнение Швингера-Дайсона (3.18), мы приходим к следующему соотношению,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} \langle \phi_{abc}(x_1) \phi_{abc}(x_2) \rangle_{\mathcal{D}_p} \\ &= \frac{1}{2} \lambda_T^2 \int d^d x_3 d^d x_4 \langle \phi_{abc}(x_1) \phi_{abc}(x_2) \phi_{111}(x_3) \phi_{111}(x_4) \rangle_{\text{bulk}} F^3(x_3) F^3(x_4). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Это уравнение показывает, как дефектные одноточечные функции вместе с ОПЕ коэффициентами (которые можно вычислить изучая четырехточечной функцией в тензорной модели) полностью определяют двухточечную функцию операторов  $\phi_{abc}$ .

### 3.5.2 Одноточечные функции билинейных операторов

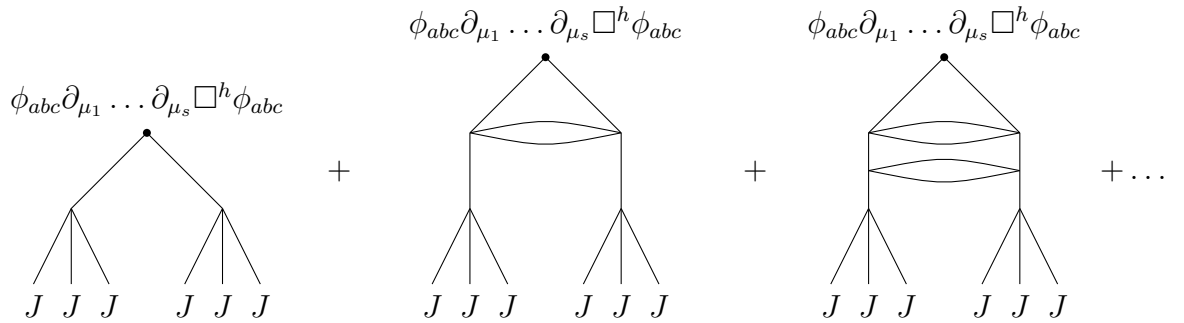


Рис. 3.10: Диаграммы, вносящие вклад к вакуумному среднему билинейного оператора  $\phi_{abc} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_s} \square^h \phi_{abc}$ . По сравнению с оператором  $\phi_{111}$  здесь нам нужно также учесть лестничные диаграммы.

Теперь мы применим ОПЕ к двухточечной функции (3.89) для вычисления одноточечных функций синглетных билинейных операторов  $\phi_{abc} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_s} \square^h \phi_{abc}$ .

В пределе  $x_1 \rightarrow x_2$  мы разложим  $\phi_{abc}(x_1)\phi_{abc}(x_2)$  по билинейным синглетным локальным операторам. Так мы находим для синглетного оператора  $\mathcal{O}(x)$ :

$$\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} \langle \mathcal{O}(x) \rangle_{\mathcal{D}_p} = \frac{1}{2} \lambda_{\Gamma}^2 \int d^d x_1 d^d x_2 \langle \mathcal{O}(x) \phi_{111}(x_1) \phi_{111}(x_2) \rangle_{\text{bulk}} F^3(x_1) F^3(x_2), \quad (3.90)$$

где  $\mathcal{O}(x)$  представляет собой общий  $O(N)^3$  синглетный билинейный оператор в  $\phi_{abc}$ .

Если оператор  $\mathcal{O}(x)$  является примарным оператором с размерностью  $\Delta$ , то известно, что трехточечная функция полностью фиксирована

$$\langle \mathcal{O}(x) \phi_{111}(x_1) \phi_{111}(x_2) \rangle = \frac{C_{\mathcal{O}\phi\phi}}{|x - x_1|^{\Delta} |x - x_2|^{\Delta} |x_1 - x_2|^{\frac{d}{2} - \Delta}}, \quad (3.91)$$

и из этого следует, что

$$\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} \langle \mathcal{O}(x) \rangle_{\mathcal{D}_p} = \frac{\lambda_{\Gamma}^2 C_{\mathcal{O}\phi\phi} C_{d,p}^6 h_{\Delta,d}}{2|x_{\perp}|^{\Delta}}, \quad (3.92)$$

где мы ввели<sup>14</sup>

$$h_{\Delta,d} = |x_{\perp}|^{\Delta} \int \frac{d^d x_1 d^d x_2}{|x - x_1|^{\Delta} |x - x_2|^{\Delta} |x_1 - x_2|^{\frac{d}{2} - \Delta} |x_{1\perp}|^{\frac{3d}{4}} |x_{2\perp}|^{\frac{3d}{4}}}. \quad (3.93)$$

### 3.5.3 Одноточечная функция тензора энергии импульса

Здесь мы изучаем одноточечную функцию тензора энергии импульса  $T_{\mu\nu}$  в присутствии дефекта. Так тензор имеет следующий вид

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \partial_{\mu} \phi_{abc} \partial_{\nu} \phi_{abc} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial \phi_{abc})^2 - \frac{d-2}{4(d-1)} (\partial_{\mu} \partial_{\nu} - g_{\mu\nu} \partial^2) \phi_{abc}^2 \\ &+ \frac{\lambda_{\Gamma}}{4} g_{\mu\nu} \phi_{abc} \phi_{ab'c'} \phi_{a'b'c} \phi_{a'b'c}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Проведя аналогичный анализ, как и в предыдущем разделе, находим, что одноточечная функция  $T_{\mu\nu}$  дается следующим выражением,

$$\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\mathcal{D}_p} = \frac{1}{2} \lambda_{\Gamma}^2 \int d^d x_1 d^d x_2 \langle T_{\mu\nu}(y) \phi_{111}(x_1) \phi_{111}(x_2) \rangle_{\text{bulk}} F^3(x_1) F^3(x_2) - \frac{\lambda_{\Gamma}}{4} g_{\mu\nu} F^4(y). \quad (3.95)$$

можно проверить, что это выражение удовлетворяет конформным тождествам Уорда. Например,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} \langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{\mathcal{D}_p} &= \frac{1}{2} \lambda_{\Gamma}^2 \int d^d x_1 d^d x_2 \langle T_{\mu}^{\mu}(y) \phi_{111}(x_1) \phi_{111}(x_2) \rangle_{\text{bulk}} F^3(x_1) F^3(x_2) - \frac{d\lambda_{\Gamma}}{4} F^4(y) \\ &= \frac{d}{4} \lambda_{\Gamma}^2 \int d^d x_1 d^d x_2 G(x_1 - x_2) F^3(x_1) F^3(x_2) - \frac{d\lambda_{\Gamma}}{4} F^4(y) = 0, \end{aligned} \quad (3.96)$$

<sup>14</sup>Как обычно, эти интегралы могут содержать расходимости, которые необходимо регуляризовать

, где в последней строке мы использовали уравнение Швингера-Дайсона (3.18). Более явно мы можем записать одноточечную функцию тензора энергии импульса как

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\mathcal{D}_p} &= \frac{d^2 A_d C_{d,p}^6}{8(d-1)} \int d^d x_1 d^d x_2 \frac{\left( \hat{X}_\mu^{12} \hat{X}_\nu^{12} - \frac{1}{d} g_{\mu\nu} \right) |x_1 - x_2|^{\frac{d}{2}}}{|y - x_2|^d |y - x_1|^d |x_{1\perp}|^{\frac{3d}{4}} |x_{2\perp}|^{\frac{3d}{4}}}, \\ X_\mu^{12} &= \frac{(y - x_1)_\mu}{(y - x_1)^2} - \frac{(y - x_2)_\mu}{(y - x_2)^2}, \quad \hat{X}_\mu^{12} = \frac{X_\mu^{12}}{|X^{12}|}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

где интегралы берутся в смысле главного значения. М В силу конформной симметрии интеграл в (3.97) должен иметь следующий универсальный вид [46],

$$\begin{aligned} \langle T_{\alpha\beta}(y) \rangle_{\mathcal{D}_p} &= -\frac{h_p \delta_{\alpha\beta}}{|y_\perp|^d} \langle T_{ij}(y) \rangle_{\mathcal{D}_p} = \frac{(p+1)h_p}{(d-p-1)|y_\perp|^d} \left( \delta_{ij} - \frac{d}{p+1} \frac{(y_\perp)_i (y_\perp)_j}{|y_\perp|^2} \right), \\ \langle T_{\alpha i} \rangle_{\mathcal{D}_p} &= 0, \end{aligned}$$

$p \neq d-1$ , иначе  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\mathcal{D}_p}$  исчезает тождественно. Коэффициент  $h_p$  может быть найден, вычисляя следующий интеграл

$$h_p = N^{\frac{3}{2}} \frac{A_d C_{d,p}^6 d^2 |y_\perp|^d}{8(d-1)} \int d^d x_1 d^d x_2 \frac{\hat{X}_1^{12} \hat{X}_2^{12} |x_1 - x_2|^{\frac{d}{2}}}{|y - x_2|^d |y - x_1|^d |x_{1\perp}|^{\frac{3d}{4}} |x_{2\perp}|^{\frac{3d}{4}}}. \quad (3.98)$$



## Глава 4

# Нестандартное поведение ренормгруппового потока

Один из важных приемов изучения квантовых теорий поля является использование ренормгруппы (РГ). Начиная с классического обзора Когута и Вильсона [289] о  $\epsilon$  разложении и потоке ренормализационной группы (RG), общие свойства RG-потоков стали предметом активных исследований. В обычно рассматриваемых случаях, когда теория начинает течь, она заканчивается в фиксированной точке, где описывается некоторой конформной теорией поля (КТП). С общей точки зрения, уравнения, описывающие потоки ренормгруппы, образуют систему автономных дифференциальных уравнений, и свойства таких систем и допускаемых ими потоков хорошо изучены [149, 20, 150, 110]. В частности, динамические системы могут демонстрировать потоки, более своеобразные, чем потоки между отдельными неподвижными точками, и Когут и Вильсон в 1974 году предположили возможность существования предельных циклов или хаотического и даже турбулентного поведения в RG-потоке. С тех пор был доказан ряд теорем о монотонности, которые жестко ограничивают RG-поток унитарных квантовых теорий поля (КТП). Первой такой теоремой была  $s$ -теорема Замолодчикова [302], которая устанавливает функцию, интерполирующую между центральными зарядами в  $2d$  КТП и монотонно убывающую вдоль RG-потока. Аналогичные теоремы были доказаны для четырех измерений ( $a$ -теорема) [203, 226] и трех измерений ( $F$ -теорема) [198, 174, 64]. Монотонность, подразумеваемая этими теоремами, исключает возможность предельных циклов, за исключением лазейки, указанной в [239, 80]: а именно многозначных  $s$ -функций. Эта лазейка была использована в деформированных моделях

Весса-Зумино-Виттена [41, 216, 218], хотя константы связи проходят, становятся бесконечными, чтобы реализовать циклический поток RG. Есть также примеры циклического RG-потока в квантовой механике [126, 127, 57, 135, 217, 55, 82].

Недавно в работе [177] была выдвинута идея, что циклический RG-поток может быть реализован в квантовой теории поля. Так была предложена КТП взаимодействующих симметричных безследовых матриц, преобразующихся под действием группы  $O(N)$ , при этом  $N$  может принимать нецелые значения. Модели  $O(N)$  для нецелых  $N$  - идея, широко используемая в физике полимеров [83], - ранее получили формальное определение в [47], где была показана неунитарность этих моделей. Таким образом, теоремы  $c, a, F$  больше не являются справедливыми и не ограничивают поток RG. Таким образом, удалось показать, что рассматриваемая модель обладает предельным циклом по  $N > N_* \approx 4.475$ . Основным инструментом, использованным для этого открытия, была теорема Хопфа [167], которая гарантирует существование предельного цикла в окрестности бифуркации Андронова-Хопфа коразмерности один.

Если обратиться к динамическим системам, параметризованным двумя вещественными параметрами, то бифуркации коразмерности два могут быть использованы для доказательства существования еще гомоклинических орбит. В частности, Р. Богданов [50] и Ф. Такенс [281] установили теоремы, с помощью которых из свойств автономных дифференциальных уравнений, известных только до второго порядка по динамическим переменным в окрестности фиксированной точки, можно вывести существование гомоклинических орбит, соединяющих фиксированную точку с самой собой. Интересно, что условия для этой бифуркации можно проверить, изучая устойчивость неподвижных точек, несмотря на то, что гомоклинические орбиты сигнализируют о глобальных бифуркациях [149], поскольку они возникают при столкновении предельного цикла с седловой точкой.

Интересным фактом о гомоклинических орбитах является то, что они могут быть использованы для диагностики хаоса. В приложениях теории динамических систем к физике хаотическое поведение [81] встречается во многих случаях, например, в турбулентности [267, 301], метеорологии [225] и даже в амплитудах рассеяния в теории струн [147]. Обычно хаотическое поведение доказывается с помощью численного моделирования. Одним из немногих аналитических инструментов, позволяющих намекнуть на возникновение хаоса, является теорема Шильникова [273],

которая для систем, обладающих гомоклиническими орбитами, определяет условия, при которых можно доказать, что они являются хаотическими. Поэтому одним из важных шагов на пути к нахождению примера хаотического RG-потока является установление существования гомоклинического RG-потока.

В этой главе мы исследуем КТП с глобальной  $O(N) \times O(M)$  симметрией. Исследуя RG-поток теории как функцию от  $M$  и  $N$ , мы находим режим с немонотонным потоком (где нарушается  $s$ -теорема). В этом режиме мы устанавливаем где возникает бифуркаций Богданова-Тakens, из чего делаем вывод, что теория обладает гомоклиническим RG-потоком. Другими словами, модель содержит неподвижную точку с тем особенным свойством, что деформация *релевантным* оператором вызывает поток, который ведет обратно в исходную точку: RG-поток, в котором ИК- и УФ-теории совпадают. Гомоклинический RG-поток можно рассматривать как интерполяцию между привычным типом RG-потока (когда система течет из одной фиксированной точки в другую) и более экзотическими предельными RG-циклами (как и предельные циклы, гомоклинические орбиты замкнуты). В унитарных QFT гомоклинические RG-потоки по-прежнему запрещены теоремами  $s, a, F$ , но неподвижная точка, расположенная на гомоклинической орбите, может быть описана стандартной CFT, в отличие от неподвижных точек, претерпевающих бифуркацию Хопфа и требующих операторов с комплексной аномальной размерностью.

Применяемый нами метод может быть использован в более широком смысле для поиска гомоклинических орбит в двухпараметрических семействах теорий. Мы ожидаем, что это явление будет присутствовать и во многих других QFT.

## 4.1 Модель

Мы рассматриваем  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричную модель взаимодействующих скалярных суперполей  $\Phi_{ab}^i$ , инвариантную под действием  $O(N) \times O(M)$  группы в  $d = 3 - \epsilon$  измерениях. Суперполя являются бесследно-симметричными матрицами относительно действия  $O(N)$  группы и векторами под действием  $O(M)$  группы. Имеется четыре синглетных маргинальных оператора

$$\begin{aligned} O_1 &= \text{tr} [\Phi^i \Phi^i \Phi^j \Phi^j], & O_2 &= \text{tr} [\Phi^i \Phi^j \Phi^i \Phi^j], \\ O_3 &= \text{tr} [\Phi^i \Phi^i]^2, & O_4 &= \text{tr} [\Phi^i \Phi^j] \text{tr} [\Phi^i \Phi^j], \end{aligned} \quad (4.1)$$

и поэтому полное действие имеет вид

$$S = \int d^d x d^2 \theta \left( \text{tr} [\Phi^i D_\alpha^2 \Phi^i] + \sum_i g_i O_i \right). \quad (4.2)$$

RG-поток этой модели является градиентным. Мы можем найти функцию  $F(g_i)$  и матрицу четыре на четыре  $G_{ij}$  такие, что бета-функции удовлетворяют следующим соотношениям

$$\beta_i = \mu \frac{dg_i}{d\mu} = G_{ij} \frac{\partial F}{\partial g_j}. \quad (4.3)$$

Если  $G_{ij}$  положительно или отрицательно определена, то из этого уравнения следует, что  $F$  изменяется монотонно с RG-потоком, так что циклические и гомоклинические потоки невозможны. Явным вычислением в ведущем порядке по теории возмущений находим, что метрика имеет следующий определитель

$$\begin{aligned} \det G = & \frac{1}{4} (M-1)^2 (M+2)^2 (N-3) \times \\ & \times (N-2)^2 (N+1)^2 (N+4)^2 (N+6). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Нули в  $\det G$  возникают из-за линейных соотношений между четырьмя операторами теории при специальных значениях  $M$  и  $N$ , и их наличие указывает на то, что собственные значения меняют знак при изменении  $N$  и  $M$ . Действительно, можно проверить, что метрика является знаково неопределенной, если  $M \in (-2, 1)$  или  $N \in (-6, 3)$ , так что в этом режиме возможны немонотонные RG-потоки и могут возникнуть предельные циклы, а операторы могут иметь комплексные масштабные размерности в "страшных" точках [177]. При целых значениях  $N$  и  $M$  такие операторы зануляются в силу линейных соотношений между операторами. Ситуация аналогична появлению эванесцентных операторов при нецелых размерностях пространства-времени [73, 52, 103, 137, 165, 166].

В дальнейшем мы позволим  $M$  и  $N$  принимать любые вещественные значения. Вследствие этого аналитического продолжения параметров мы находим бифуркации Хопфа, происходящие в модели вдоль различных кривых в пространстве  $M$  и  $N$ . Но если бифуркации Хопфа - это бифуркации коразмерности один, широко встречающиеся в однопараметрических системах автономных дифференциальных уравнений, то мы имеем дело с двухпараметрической системой, и они демонстрируют более богатое разнообразие бифуркаций. Возможные бифуркации коразмерности два можно разделить на пять типов [20, 149] - Баутина, Богданова-Такенса,

куспида, двойного Хопфа и нулевого Хопфа - которые сигнализируют о различных видах потоков, не присутствующих в общих однопараметрических системах. Как мы сейчас увидим, некоторые из этих возможностей реализуются в QFT с действием (4.2).

## 4.2 Бифуркация Богданова-Тakensa

Бифуркация Богданова-Тakensa возникает в общем случае, когда в фиксированной точке два собственных значения матрицы устойчивости  $\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial g_j}\right)$  зануляются. Тогда должны выполняться следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \beta_i(g_i, N, M) = 0, \quad \det\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial g_j}\right)(g_i, N, M) = 0, \\ \text{tr}\left[\Lambda^3\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial g_j}\right)\right] \equiv \det\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial g_j}\right) \text{tr}\left[\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial g_j}\right)^{-1}\right] = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Записав в виде (4.5), мы видим, что условия для бифуркации ВТ являются полиномиальными уравнениями в  $g_i$ ,  $M$  и  $N$ , и по теореме Безу существует конечное число точек, удовлетворяющих этим условиям. Мы называем такие точки точками Богданова-Тakensa (ВТ). Для КТП, которую мы изучаем пертурбативно, бета-функции демонстрируют несколько таких точек. Их существование может быть проверено с высокой численной точностью с помощью стандартных программ [262]. Вклады высших петель дадут поправки на точное расположение этих точек, но пока  $\epsilon$  достаточно мало, поправки высшего порядка не изменят ни числа, ни качественного поведения точек ВТ.

Хотя два собственных значения стремятся к нулю по мере приближения к точке ВТ, непосредственно в самой точке ВТ у нас нет пары собственных векторов с нулевыми собственными значениями, поскольку два соответствующих собственных вектора обычно становятся линейно зависимыми. Точнее, матрица устойчивости в точке ВТ имеет блок Жордана размера два с нулевым собственным значением. Это означает, что теория в точке ВТ обладает двумя операторами  $\mathcal{O}_{1,2}$ , такими, что генератор  $D$  дилатаций действует следующим образом

$$D\mathcal{O}_1 = d\mathcal{O}_1, \quad D\mathcal{O}_2 = d\mathcal{O}_2 + \mathcal{O}_1. \quad (4.6)$$

Возможность существования неразложимых представлений конформной группы была подробно изучена в [152, 164]. В итоге получается, что теория ВТ представляет

собой логарифмическую CFT, содержащую *обобщенные* маргинальные операторы  $\mathcal{O}_{1,2}$ . Вследствие этого теории ВТ являются неунитарными, и мы имеем

$$\langle \mathcal{O}_2(0)\mathcal{O}_2(x) \rangle = -\frac{2k_{\mathcal{O}} \log |x|}{|x|^{2d}}, \quad \langle \mathcal{O}_1(0)\mathcal{O}_2(x) \rangle = \frac{k_{\mathcal{O}}}{|x|^{2d}},$$

для некоторой константы  $k_{\mathcal{O}}$ .

Условия (4.5) не вполне достаточны для бифуркации ВТ. Необходимо также требовать гладкости и ряда неравенств, которые в общем случае верны. Нарушение неравенств обычно требует тонкой настройки дополнительных параметров. Кстати, при целых значениях  $M = 2$  и  $N = 3$ , прямо на границе режимов с монотонными и немонотонными потоками RG, мы наблюдаем неподвижную точку, которая удовлетворяет (4.5), но не удовлетворяет этим требованиям общности и, следовательно, не описывается логарифмическим CFT.

Можно явно проверить что в окрестности  $M \approx 0.2945$  и  $N \approx 4.036$  прямо возникает ВТ бифуркация. Это означает, что мы можем преобразовать бета-функции вблизи точки ВТ в особенно простую форму, известную как нормальная форма Богданова:

$$\begin{cases} [l]\dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = \delta_1 + \delta_2\eta_1 + \eta_1^2 + s\eta_1\eta_2 + \mathcal{O}(|\eta|^3), \\ \dot{\eta}_i = \lambda_i\eta_i \quad \text{for } i > 2, \end{cases} \quad (4.7)$$

где  $s = -1$  и  $\delta_{1,2}$  - функции из  $N$  и  $M$ , которые исчезают прямо в точке ВТ.

Приведя систему к нормальной форме, мы можем использовать уравнения (4.7) для определения поведения системы при достаточно малых  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . В частности, мы можем ограничиться изучением поверхности, где ненулевыми являются только  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , замечая, что динамика в поперечных направлениях  $\eta_3$  и  $\eta_4$  простая. В зависимости от  $\delta_1$  и  $\delta_2$  поток из  $\eta_{1,2}$  распадается на различные топологические типы. Классификация приведена в учебнике [209] и сводится к следующему. В окрестности точки ВТ на  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  существует четыре режима с качественно различными потоками:

– Режим 1: Тривиальный. Поток не имеет фиксированной точки.

В трех других режимах поток имеет две неподвижные точки, которые мы обозначим как левая и правая. Правая точка всегда будет являться седловой точкой.

– Область 2: Левая точка неустойчива, и все линии потока, начинающиеся вблизи нее, заканчиваются в правой неподвижной точке.

– Область 3: Левая точка теперь устойчива, и отталкивающий предельный цикл разделяет две неподвижные точки.

– Область 4: Левая точка по-прежнему устойчива, но предельный цикл исчез. Некоторые линии потока, начинающиеся вблизи правой неподвижной точки, заканчиваются в левой неподвижной точке. Области 3 и 4 разделены седловой гомоклинической бифуркацией вдоль  $\delta_1 = -\frac{6}{25}\delta_2^2 + \dots$ ,  $\delta_2 < 0$ . Поток RG в каждом режиме изображен на рисунке 4.1.

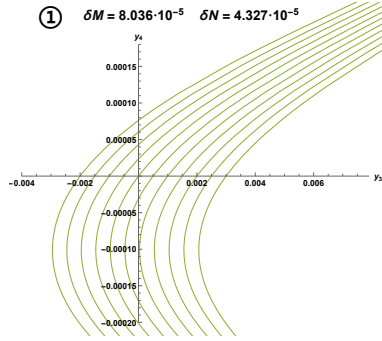
Седло-узловая бифуркация соответствует столкновению и исчезновению двух фиксированных точек в динамических системах. Это явление уже наблюдалось в критической модели  $O(N)$  [109], призматических моделях [125] и в  $QCD_4$  [119, 180, 132, 206].

Бифуркация Андронова-Хопфа представляет собой изменение устойчивости в неподвижной точке, имеющей комплексные собственные значения. Поток вблизи неподвижной точки порождает предельный цикл. Эта бифуркация потока RG была недавно изучена в [177].

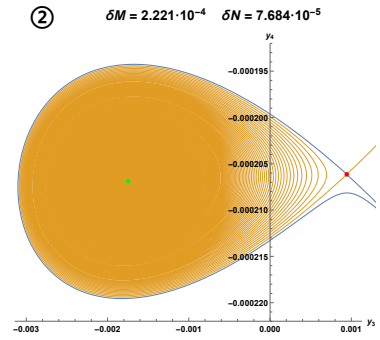
Наиболее интересное и новое явление, связанное с моделью настоящей работы, происходит на линии гомоклинической бифуркации. Здесь поток демонстрирует так называемую гомоклиническую орбиту.

### 4.3 Гомоклинический поток RG

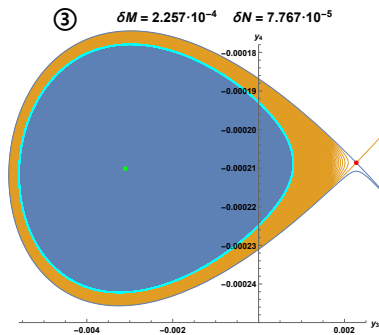
Гомоклиническая орбита - это орбита, соединяющая стабильное и нестабильное направления седловой точки. На рисунке (4.2) изображена гомоклиническая орбита, порожденная бифуркацией ВТ, а седловая точка отмечена красной точкой. Гомоклиническая орбита огибает другую неподвижную точку, отмеченную зеленой точкой. В контексте КТП зеленая точка является "страшной": константы связи вещественны, но матрица устойчивости  $\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial g_j}\right)$  имеет комплексные собственные значения. В отличие от таких жутких точек и от комплексных СФТ [132, 134], в красной седловой точке константы связи и матрица стабильности являются вещественными. Собственные значения матрицы стабильности малы и имеют противоположные знаки:  $\lambda_1, -\lambda_2 \ll 1$ . Положительное собственное значение соответствует слабо релевантному оператору  $\mathcal{O}_1$  с размерностью  $\Delta_1 = d + \lambda_1 > d$ , а отрицательное собственное значение - слабо иррелевантному оператору  $\mathcal{O}_2$  с размерностью  $\Delta_2 = d + \lambda_2 < d$ .



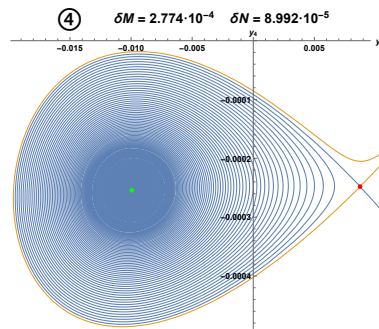
RG-поток в регионе 1. В этом режиме вблизи начала координат нет неподвижных точек, и все траектории уходят из этого региона.



RG-поток в регионе 2. Фиксированная точка, отмеченная красным цветом, является седловой точкой. Синяя траектория вытекает наружу от этой точки в ИК, а оранжевые траектории втекают внутрь. Фиксированная точка, отмеченная зеленым цветом, нестабильна в ИК.



Поток RG в области 3. Предельный цикл, отмеченный голубым цветом, разделил две фиксированные точки.



RG-поток в регионе 4. При переходе от предельного цикла к предельной точке происходит гомоклиническая бифуркация.

Рис. 4.1: Топологически различные типы RG-потока в окрестности бифуркации Богданова-Тakensа при  $M = M^* \approx 0.2945$  и  $N = N^* \approx 4.036$ . Переменные  $y_3$  и  $y_4$  представляют собой линейные комбинации четырех констант связи  $g_i$  и  $\delta M = M - M^*$ ,  $\delta N = N - N^*$ .



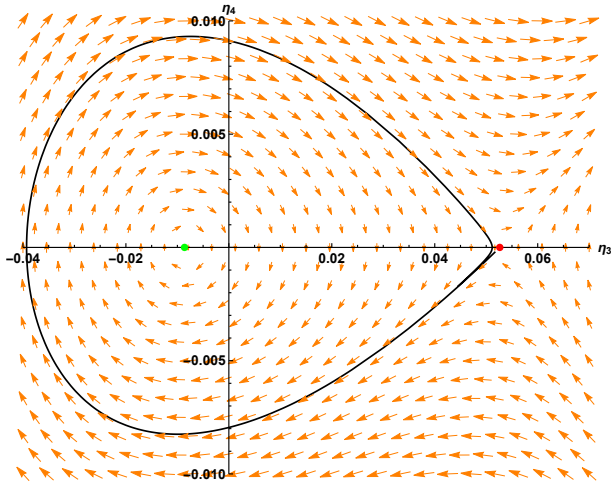


Рис. 4.2: Блок-схема динамической системы, содержащей гомоклиническую орбиту (отмечена **черным**), т.е. линия потока, которая начинается и заканчивается в одной и той же точке. Система описывается уравнениями (4.7) с параметрами  $\delta_1 = -0.000453178$  и  $\delta_2 = -0.0440214$ . Красная и зеленая точки обозначают фиксированные точки. Зеленая точка – это "страшная" фиксированная точка. Теория в красной точке представляет собой гомоклинический RG-поток в области 4. При переходе от региона 3 к 4 предельный цикл столкнулся с фиксированной красной точкой в гомоклинической бифуркации.

В этом смысле красная седловая точка соответствует вещественному КТП.

Стандартная RG-теория гласит, что если мы возмущаем систему в направлении релевантного оператора, то ожидаем, что система полностью потеряет конформность или перетечет в другую СФТ. В терминологии динамических систем стандартные RG-траектории – это гетероклинические орбиты. Классический пример – неподвижная точка Вильсона-Фишера: возмущая гауссову теорию в  $4 - \epsilon$  размерности, мы перетекаем в слабосвязанную взаимодействующую КТП, которая в трех измерениях описывает модель Изинга. Гомоклинические бифуркации служат экзотическим контрпримером этой общей картины: если мы возмущаем систему в направлении соответствующего оператора, то возвращаемся в исходную неподвижную точку, которую можно назвать *гомоклинической КТП*. Такое поведение RG, очевидно, нарушает  $F$ -теорему, поэтому гомоклинические неподвижные точки должны быть неунитарными, как и должно быть для КТП с группами симметрии нецелого ранга [47].

Если мы настраиваем параметры бифуркации так, чтобы приблизиться к точке ВТ вдоль седла гомоклинической бифуркации, то гомоклиническая орбита сжимается в точку и исчезает. В этом пределе гомоклиническая КФТ и "страшная" неподвижная точка сливаются, и они описывают логарифмическую КТП.

## 4.4 Общие рассуждения о хаосе

Сформулировать точное математическое определение хаоса довольно сложно, и поэтому иногда встречаются определения хаоса спекулятивного или даже философского характера. С наивной точки зрения, если под "хаосом" понимать нечто непредсказуемое, то автономные дифференциальные уравнения не должны содержать никакого хаоса: если мы знаем начальное состояние системы, мы можем эволюционировать ее во времени и точно предсказать все будущие состояния. Благодаря теоремам единственности и существования решения для дифференциальных уравнений мы знаем, что системы с одинаковыми начальными условиями будут развиваться одинаково. Поэтому мы не ожидаем случайности или "хаоса" в теории автономных дифференциальных уравнений. Но, конечно, в реальности мы никогда не знаем точно начального состояния системы, и одной из наиболее интуитивно понятных особенностей хаоса является очень сильная зависимость от начальных условий. Из-за ограниченной точности эксперимента и неизвестных аспектов системы мы в лучшем случае можем знать начальное состояние с конечной степенью точности. Поэтому можно с полным основанием сказать, что мы должны изучать динамику  $\epsilon$ -области начального состояния системы  $U_\epsilon(g^0) = \{g_j : \|g_j - g^0\| < \epsilon\}$ . И если эволюция этой  $\epsilon$ -области оставляет область по-прежнему конечного размера или даже уменьшается во времени, то можно ожидать, что данная система не является хаотической. Для любой начальной точки  $g_* \in U_\epsilon(g^0)$  у нас есть некоторая информация о будущем ее траектории, а именно  $g_*(t) \in U_\epsilon(g^0(t))$ . Если эта область  $U_\epsilon(g^0(t))$  со временем становится все больше и больше и даже охватывает все фазовое пространство, то мы не сможем сделать никаких предсказаний относительно состояния динамической системы в будущем. Такую систему можно назвать хаотической, для которой небольшое возмущение начального состояния резко меняет поведение системы. В классической и квантовой механике с таким поведением, когда начальная  $\epsilon$ -область  $U_\epsilon$  становится неконтролируемо большой, обычно связывают

появление ненулевой экспоненты Ляпунова  $\lambda_L$ :

$$\|\delta q(t)\| \sim \|\delta q(t=0)\| \exp[\lambda_L t]. \quad (4.8)$$

Небольшое возмущение начального состояния приводит к экспоненциальной ошибке в последующих наблюдаемых. Это свойство динамических систем иногда называют сильной чувствительной зависимостью. Экспоненты Ляпунова были вычислены для некоторых известных моделей, таких как SYK [229]. Существование положительной экспоненты Ляпунова свидетельствует о наличии хаоса, но не является достаточным условием. Действительно, рассмотрим следующую динамическую систему

$$g(x) = 2x, \quad g^n(x) = 2^n x. \quad (4.9)$$

Очевидно, что эта система имеет положительную экспоненту Ляпунова, но, тем не менее, она не считается хаотической. В случае потоков RG локальное экспоненциальное поведение, как в (4.9), является обычным явлением для систем, которые демонстрируют универсальность и в конечном итоге перетекают в массивные теории или другие КТП. Другая проблема с условием (4.8) как критерием хаоса заключается в том, что для систем с компактными фазовыми пространствами не может выполняться все время. Более того, существование глобальной экспоненты Ляпунова в некоторых случаях может быть явлением, зависящим от наблюдателя, например, система с ненулевой экспонентой Ляпунова в пространстве Минковского может иметь нулевую экспоненту Ляпунова в пространстве Риндлера [303]. Таким образом, мы видим, что условие (4.8) не является ни необходимым, ни достаточным для диагностики хаоса.

Для решения этих проблем одной из наиболее распространенных идей является замена условия сильной зависимости чувствительности на условие слабой чувствительности:

1. Расстояние между начальными условиями растет со временем:  $\|\delta q(t_2)\| > \|\delta q(t_1)\|$  если  $t_2 > t_1$

, и добавить следующие два дополнительных условия [88]

2. В фазовом пространстве существует плотное множество периодических орбит.

3. Динамическая система топологически транзитивна на фазовом пространстве, то есть если взять любые две открытые области  $U$  и  $W$  фазового пространства, то эволюция  $U$  вдоль динамической системы приведет ее к пересечению с  $W$  :  $g^t(U) \cap W \neq \emptyset$ .

На примерах хаотических систем, приведенных в основном тексте, можно проверить, что эти три условия действительно выполняются. К системам с потоками RG, которые являются хаотическими в соответствии с этими условиями, понятие универсальности неприменимо. Произвольно малые изменения начальных условий, скажем, небольшое изменение констант связи в УФ-теории или замена квадратной решетки на треугольную, резко меняют поведение системы.

## 4.5 Модель Изинга с комплексной константой связи и преобразование Бернулли

В этом разделе в качестве иллюстрации "хаоса и примера того, что для универсальности конформных теорий поля требуется наличие унитарности, мы рассмотрим одномерную модель Изинга с комплексной константой связи. Эта модель и ее хаотическое поведение также изучались в [96]. Когда константы связи в теории становятся комплексными, очевидно, что RG-поток может стать достаточно сложным. Например, довольно легко найти предельные циклы [108]. Рассмотрение комплексных RG-неподвижных точек было ранее предложено в [134, 132] и далее проведено в контексте тензорных моделей в [122]. Комплексная модель Изинга в этом разделе служит разминкой для более сложной модели в разделе 4.5, где мы будем реализовывать хаос в RG-потоке уже вещественных констант связи.

В отсутствие внешнего магнитного поля гамильтониан одномерной модели Изинга имеет вид

$$H = g \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad (4.10)$$

где  $i = 1, n$ , а спиновые переменные  $\{\sigma_i\}$  могут принимать значения  $\pm 1$ . Модель Изинга в  $1d$  широко изучена в литературе, и существует множество методов для численного и аналитического решения. В системе нет фазового перехода, и мы можем точно вычислить корреляционные функции. Наиболее распространенный

метод решения модели предполагает использование трансфер матрицы, которая также может быть использована для реализации RG-потока. Идея заключается в следующем: статсумма в данной модели есть

$$Z = \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} \prod_i C e^{-g \sigma_i \sigma_{i+1}}, \quad (4.11)$$

, где мы ввели константу нормировки  $C$ . Предположив, что у нас есть  $N$  спиновых переменных  $\sigma_i$  и наложив периодические граничные условия  $\sigma_i = \sigma_{N+i}$ , мы замечаем, что можем ввести матрицу  $T$  такую, что

$$T = C \begin{pmatrix} e^{-g} & e^g \\ e^g & e^{-g} \end{pmatrix}, \quad Z = \text{tr} [T^N]. \quad (4.12)$$

Теперь выполним один шаг RG-потока, интегрируя некоторые степени свободы модели, например, спины с нечетными индексами в цепочке. Статсумму по оставшимся степеням свободы можно выразить уравнением все того же вида (4.11), за исключением того, что константа связи  $g$  должна быть заменена другой константой связи  $g_1$ , а  $C$  - новой константой нормировки  $C_1$ :

$$Z = \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} \prod_{i \text{ even}} C_1 e^{-g_1 \sigma_i \sigma_{i+1}}. \quad (4.13)$$

Новые константы  $g_1$  и  $C_1$  можно вычислить, заметив, что интегрирование по нечетным спином формально приводит к замене  $T \rightarrow T^2 \equiv T_1$ . Требование, чтобы  $T_1$  имела тот же вид, что и исходная трансфер матрица  $T$ , дает уравнение:

$$C^2 \begin{pmatrix} e^{-2g} + e^{2g} & 2 \\ 2 & e^{-2g} + e^{2g} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{-g_1} & e^{g_1} \\ e^{g_1} & e^{-g_1} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Из этого уравнения следует, что дискретный шаг RG связывает старую константу связи  $g$  с новой  $g_1$  через соотношение

$$e^{-2g_1} = \frac{(T^2)_{11}}{(T^2)_{12}} = \frac{1}{2} (e^{-2g} + e^{2g}) = \cosh 2g. \quad (4.15)$$

Для удобства введем новый параметр  $z = e^{-2g}$ , в терминах которого уравнение RG принимает простой вид

$$z_1 = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \equiv R(z). \quad (4.16)$$

Рассмотрим сначала унитарную модель Изинга, то есть возьмем  $z$  вещественным и положительным. В этом случае последовательность  $z_n = R(z_{n-1})$  сходится. Чтобы убедиться в этом, заметим, что для любого положительного вещественного  $z$

мы имеем, что  $z_1 = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \geq 1$ . Более того, для любого  $z_n > 1$  мы имеем, что  $z_{n+1} = R(z_n) \leq \frac{1}{2}(z_n + 1) < z_n$ . Следовательно, последовательность  $z_1, z_2, z_3, \dots$  убывает, а поскольку она еще и ограничена снизу, то сходится. Неподвижная точка, к которой сходится последовательность, находится в точке  $z = 1$ , то есть  $g = 0$ , что соответствует высокотемпературному пределу.

Предположим теперь, что мы не ограничиваемся унитарными теориями и позволяем  $g$  и  $z$  принимать комплексные значения. С помощью аргумента, аналогичного приведенному выше, можно показать, что до тех пор, пока  $\operatorname{Re} z \neq 0$ , последовательность остается сходящейся, сходясь к значению  $\operatorname{sign}(z)$ . Однако, как мы сейчас покажем, когда  $z$  становится мнимым, поведение последовательности резко меняется и возникает хаос. Нетрудно заметить, что если  $z_n \equiv ix_n$  мнимая, то  $\tilde{R}(ix_n) \equiv ix_{n+1}$  тоже мнимая, и мы имеем

$$x_{n+1} = \tilde{R}(x_n), \quad \tilde{R}(x) \equiv \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right). \quad (4.17)$$

Теперь введем параметр  $t_n \in [0, 1)$ , связанный с  $x_n$  через уравнение  $x_n = \tan \left( \pi \left( t_n - \frac{1}{2} \right) \right)$ . Тогда RG-шаг действует на  $t_n$  как

$$t_{n+1} = 2t_n \pmod{1}. \quad (4.18)$$

Это преобразование известно как диадическое преобразование или преобразование Бернулли, и как было доказано, Рени [264] является хаотической. Несмотря на простоту данного отображения, она обладает всеми характеристиками хаоса. Одним из непосредственных наблюдений является то, что отображение имеет ненулевую экспоненту Ляпунова:  $\delta t_{n+k} = 2^k \delta t_n$  для достаточно малых  $\delta t_n$ , хотя это поведение нарушается при больших значениях  $k$ , поскольку  $t$  принадлежит конечному интервалу. Также нетрудно видеть, что для любого конечного интервала  $I \subset (0, 1)$  при повторном применении преобразования Бернулли такой интервал  $I$  в конечном счете плотно заполнит весь интервал  $(0, 1)$ . Так мы запишем начальное значение  $t_0$  в бинарной записи:

$$t_0 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i}, \quad (4.19)$$

где  $a_i \in \{0, 1\}$ . Полубесконечная последовательность  $A = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  содержит всю информацию о начальном состоянии и последующей эволюции системы. А применение шага RG (4.18) соответствует отбрасыванию  $a_1$  и сдвигу  $a_{i+1} \rightarrow a_i$ . С этой

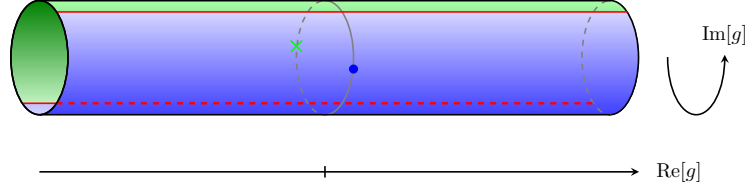


Рис. 4.3: Фазовая диаграмма одномерной модели Изинга с комплексной константой связи. Синяя область указывает область притяжения тривиальной неподвижной точки  $g = 0$ , а зеленая область указывает область притяжения мнимой неподвижной точки  $g = \frac{i\pi}{2}$ . Две этой области разделены хаотичной областью, нарисованной красным цветом.

точки зрения, мы можем точно предсказать эволюцию системы, когда начальное состояние известно точно, но любое изменение начального состояния в конечном итоге приведет к максимально возможным флуктуациям будущих значений состояния системы. Таким образом, если  $t_0 \in \mathbb{Q}$ , то после конечного числа начальных цифр последовательность  $A$  будет периодической, то есть поток RG станет циклическим. Более точно, мы можем выразить любое  $t_0 \in \mathbb{Q}$  в виде сокращенной дроби  $t_0 = 2^m \frac{q}{r}$ , где  $m, q \in \mathbb{Z}$ ,  $r \in \mathbb{N}$  и  $\text{НОД}(q, r) = \text{НОД}(q, 2) = \text{НОД}(r, 2) = 1$ , тогда период RG потока есть просто  $r$ , а  $\max(-m, 0)$  равно количеству начальных цифр в  $A$  до того, как последовательность станет периодической. Из сказанного следует что любой конечный интервал начальных значений индуцирует RG-поток с бесконечным набором различных периодов. Между тем, если  $t_0 \notin \mathbb{Q}$ , то последовательность  $A$  не имеет предельного цикла. Более того, можно показать, что множество  $\mathbf{t} = \{t_n\}_{i=1}^{\infty}$  будет плотным в интервале  $I$ . Поскольку и рациональные, и иррациональные числа плотны в интервале  $I$ , требуется бесконечная точность, чтобы определить, приводит ли заданное начальное состояние к периодическому потоку или нет.

Полная фазовая диаграмма модели Изинга с комплексным взаимодействием показана на рисунке 4.3. Поскольку в  $g$  экспонента сопровождается коэффициентом плюс-минус один, мы можем ограничить мнимые значения  $g$  интервалом  $(-\frac{i\pi}{2}, \frac{i\pi}{2}]$ , так что  $g$  будет иметь значение на бесконечном комплексном цилиндре. Один из способов понять фазовую диаграмму - мыслить в терминах собственных значений  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$  трансфер матрицы  $T$ :

$$\lambda_+ = 2C \cosh(g), \quad \lambda_- = -2C \sinh(g). \quad (4.20)$$

Статсумма может быть выражена как

$$Z = \lambda_+^N + \lambda_-^N. \quad (4.21)$$

Синяя область на рисунке 4.3 соответствует диапазону  $-\frac{\pi}{2} < \text{Im}[g] < \frac{\pi}{2}$ , где  $|\lambda_+| > |\lambda_-|$ . Это означает, что для больших систем  $\lambda_+$  доминирует

$$F = \log Z \approx N \log [C \cosh(g)], \quad (4.22)$$

что является регулярным поведением модели Изинга. Между тем, зеленая область - это режим, где  $|\lambda_-| > |\lambda_+|$ , так что  $\lambda_-$  доминирует над свободной энергией. Когда  $g = x + i\frac{\pi}{4}$  для некоторого действительного числа  $x$ , то  $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ , и мы находимся в хаотическом режиме. В этом случае для модуля и фазы, заданных

$$\rho = \sqrt{\frac{\cosh(2x)}{2}}, \quad \phi = \arctan \left[ \tanh(x) \right], \quad (4.23)$$

мы имеем, что собственные значения и свободная энергия равны

$$\lambda_{\pm} = \rho e^{\pm i\phi}, \quad F = N \log(\rho) + \log \left[ 2 \cos(N\phi) \right]. \quad (4.24)$$

Из-за фазы в аргументе косинуса второй вклад может быть произвольно большим, в зависимости от количества спинов в модели Изинга. Кроме того, рассмотрим двухточечные функции и их поведение в термодинамическом пределе, когда  $|\lambda_+| > |\lambda_-|$ :

$$\langle \sigma_i \sigma_{i+k} \rangle = \frac{\text{tr} [T^{N-k} \sigma_3 T^k \sigma_3]}{\text{tr} [T^N]} = \frac{\lambda_+^k \lambda_-^{N-k} + \lambda_-^k \lambda_+^{N-k}}{\lambda_+^N + \lambda_-^N} \approx \left( \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^k, \quad N \gg k. \quad (4.25)$$

Эта корреляционная функция ведет себя гладко в термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$ . Между тем, на особой прямой  $g = x + i\frac{\pi}{4}$ ,

$$\langle \sigma_i \sigma_{i+k} \rangle = \frac{\cos(N - 2k)\phi}{\cos N\phi}, \quad (4.26)$$

которая становится очень чувствительной к общему числу спинов и не допускает простого термодинамического предела.

Внимательно изучив эту простую хаотическую цепочку, нетрудно представить себе следствия хаотического преобразования RG в системах более высоких размерностей. Грубо говоря, если идеальный газ хорошо описывается температурой, давлением и объемом, то для *RG-хаотического* газа, состоящего из макроскопического числа частиц, потребуется знание порядка  $10^{23}$  параметров, чтобы сделать точные предсказания.



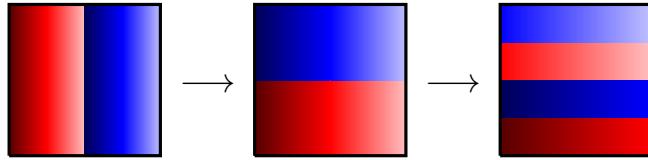


Рис. 4.4: Преобразование Пекаря

## 4.6 Преобразование Бейкера, подкова Смейла и гомоклинические орбиты Шильникова

В этом разделе мы рассмотрим один из немногих общих инструментов для диагностики хаоса в непрерывной динамической системе: гомоклинические орбиты Шильникова. Для того чтобы правильно понять эти орбиты, нам потребуется рассмотреть некоторые факты, касающиеся хаоса в дискретных динамических системах. Рассмотрим дискретное преобразование, известное как преобразование пекаря [168], которое действует на единичный квадрат  $I = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$  как

$$B(x, y) = \left( 2x - \lfloor 2x \rfloor, \frac{y + \lfloor 2x \rfloor}{2} \right), \quad B : I \rightarrow I. \quad (4.27)$$

На интуитивном уровне мы просто растягиваем единичный квадрат в два раза в направлении  $x$  и сжимаем его в два раза в направлении  $y$  так, что общая площадь сохраняется, а затем отрезаем правую половину растянутой формы и кладем ее поверх левой половины <sup>1</sup>(см. рисунок 4.4). В том, что карта хаотична, можно убедиться, связав с каждой точкой  $(x, y)$  единичного квадрата  $I$  бесконечную последовательность чисел  $\sigma = \{\sigma_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ ,  $\sigma_i \in \{0, 1\}$ , определяемых через двоичные разложения  $x$  и  $y$  как

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i}{2^i}, \quad y = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sigma_{-i}}{2^{i+1}}. \quad (4.28)$$

Преобразование пекаря действует на  $\sigma$ , сдвигая каждое число на один шаг вправо:

$$\tilde{\sigma} \equiv B(\sigma) = \{\tilde{\sigma}_i = \sigma_{i-1}\}_{i=-\infty}^{\infty}. \quad (4.29)$$

Из этого факта можно сразу же вывести некоторые хаотические свойства системы, как мы это делали для преобразования Бернулли в предыдущем разделе. Например, если последовательность  $\sigma_T$  периодична с заданным периодом  $T$ , то орбита

<sup>1</sup>Название "преобразование пекаря" происходит от сходства этого процесса с замешиванием теста

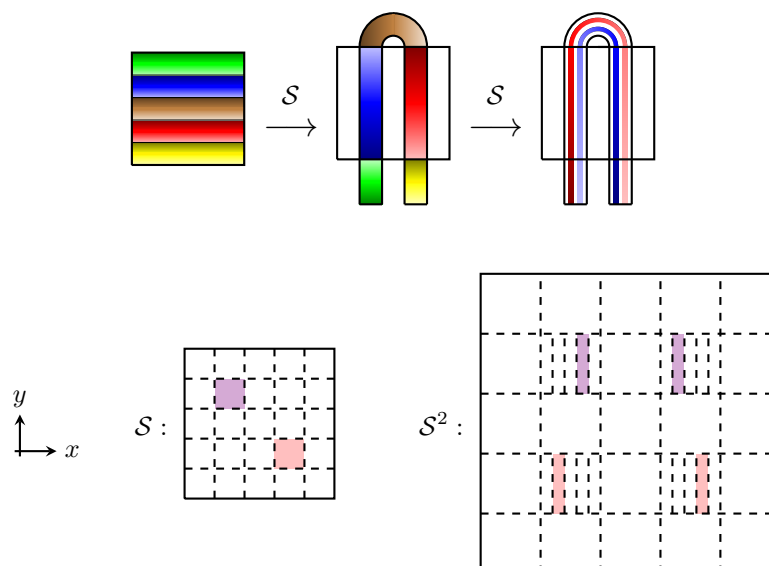


Рис. 4.5: Вверху: подкова Смейла. Мы вытягиваем квадрат в вертикальном направлении, а затем сгибаем его посередине. Внизу: регионы, которые обязательно содержат фиксированные точки при одном и двух применениях подковы Смейла. Множество точек, периодических при применениях данного отображения, образует фрактал.

$\sigma_T$  при многократном применении карты  $B$  в свою очередь будет периодична с периодом  $T$ . А множество всех точек  $(x, y)$  с периодической последовательностью  $\sigma$  плотно в единичном квадрате. Если принять  $x$  и  $y$  за иррациональные, то орбита  $(x, y)$  никогда не вернется в исходную точку. И множество точек  $(x, y)$  с иррациональными  $x$  и  $y$  также плотно в единичном квадрате. Следовательно, судьба любой орбиты карты Бейкера бесконечно чувствительна к начальным условиям.

Преобразование пекаря является предельным случаем более общего хаотического преобразования, известного как подкова Смейла [280] и изображенного на рисунке 4.5. Мы будем обозначать это преобразование через  $\mathcal{S}$ . Можно утверждать, что преобразование является хаотическим, показав, что оно содержит бесконечное множество периодических орбит, образующих фрактал. Чтобы понять, почему это так, рассмотрим две выделенные области слева внизу на рисунке 4.5. Каждая из этих областей должна обязательно содержать неподвижную точку этого подковообразного преобразования. Возьмем, к примеру, розовую область. В этой области красная подобласть отображается снова в красную подобласть, как видно из цветовой схемы на рисунке 4.5. Поскольку прообраз в этой области проходит через

все оттенки красной палитры, обязательно должна существовать некоторая горизонтальная линия, где образ и прообраз имеют одинаковые оттенки, то есть где  $y$ -компонент не изменяется при действии  $\mathcal{S}$ . Нарисовав вместо этого подкову Смейла с аналогичной цветовой палитрой, идущей слева направо, можно аналогичным образом утверждать, что в розовой области существует вертикальная линия, где  $x$ -компонента неизменна под действием  $\mathcal{S}$ . На пересечении только что описанных вертикальной и горизонтальной линий должна существовать неподвижная точка. С помощью того же аргумента нетрудно убедиться, что  $\mathcal{S}^2$  должна иметь неподвижную точку в каждой из четырех областей, выделенных в правом нижнем углу рисунка 4.5, и что преобразование  $\mathcal{S}^n$  должна иметь  $2^n$  неподвижных точек. Из этих рассуждений следует, что  $\mathcal{S}$  содержит канторовское множество периодических орбит со всеми возможными периодами, что служит доказательством того, что подкова Смейла является хаотической. Более того, можно строго доказать, что любое преобразование, топологически эквивалентное подковообразной карте Смейла, также является хаотическим [149].

До сих пор мы рассматривали дискретные динамические системы, но теперь обратимся к непрерывным динамическим системам, описываемым набором автономных дифференциальных уравнений первого порядка. Для таких систем также можно установить наличие хаоса через подкову Смейла. Для этого нужно найти дискретное преобразование для данной системы дифференциальных уравнений. Это можно сделать с помощью преобразования Пуанкаре: если дана система дифференциальных уравнений в более чем двух измерениях, мы рассмотрим некоторую фиксированную двумерную поверхность  $S$ , которую пересекают различные траектории данной системы дифференциальных уравнений. Для любой точки  $s_0 \in S$  существует единственная траектория, проходящая через  $s_0$ . Предположим, что эта кривая такова, что мы можем продлить её, начиная с точки  $s_0$ , пока не обнаружим, что она снова пересекает  $S$  в некоторой точке  $s_1$ . Для всех таких точек  $s_0$  преобразование Пуанкаре  $\pi$  определяется соотношением  $\pi(s_0) = s_1$ .

Из приведенного выше рассуждения следует, что всякий раз, когда в непрерывной динамической системе удастся найти преобразование Пуанкаре, которое топологически похоже на подкову Смейла, мы знаем, что система хаотична. Простой критерий для наличия такого преобразования Пуанкаре был найден Шильниковым [273], которому удалось доказать, что трехмерная система дифференциаль-

ных уравнений является хаотической, если она содержит гомоклиническую орбиту, причем матрица устойчивости в ее фиксированной точке имеет пару комплексно сопряженных собственных значений  $\lambda_{\pm} = -\rho \pm i\omega$  и одно вещественное собственное значение  $\lambda_3 = \gamma > \rho$ . Доказательство выглядит следующим образом: В окрестности неподвижной точки динамическая система может быть описана координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$ , удовлетворяющими уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\rho x - \omega y + F_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= \omega x - \rho y + F_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= \gamma z + F_3(x, y, z), \end{aligned} \quad (4.30)$$

где  $F_i(x, y, z)$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  - функции координат, которые мы разложили до второго порядка малости. Предположим теперь, что мы окружаем неподвижную точку цилиндрической оболочкой  $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = r^2, |z| \leq h\}$ , см. рисунок 4.6. Гомоклиническая орбита входит в цилиндр через стенки данной поверхности в некоторой точке  $p$  и выходит в некоторой точке  $q$  (см. рис. 4.6) на крышке цилиндра. Принимая  $r$  и  $h$  очень малыми, мы можем предположить, что  $q$  расположена на оси  $z$ - и что  $p$  лежит в  $(x, y)$ -плоскости, так что мы можем выбрать запись  $q = (0, 0, h)$  и  $p = (r, 0, 0)$ . Пренебрегая членами высшего порядка  $F_i(x, y, z)$ , мы находим, что траектории решения вблизи  $p$  задаются в терминах локальных координат  $(\zeta, \theta)$  следующими выражениями

$$\begin{aligned} x(t) &= r e^{-\rho t} \cos(\omega t + \theta), \\ y(t) &= r e^{-\rho t} \sin(\omega t + \theta), \\ z(t) &= \zeta e^{\gamma t}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

В этом приближении любая кривая решения, пересекающая  $C$  в момент времени  $t = 0$  при положительном значении  $\zeta$  от  $z$ , в дальнейшем пересекает плоскость  $z = h$  в координатах

$$\begin{cases} x(\theta, \zeta) = r \left(\frac{\zeta}{h}\right)^{\frac{\rho}{\gamma}} \cos\left(\theta - \frac{1}{\lambda} \log \frac{\zeta}{h}\right), \\ y(\theta, \zeta) = r \left(\frac{\zeta}{h}\right)^{\frac{\rho}{\gamma}} \sin\left(\theta - \frac{1}{\lambda} \log \frac{\zeta}{h}\right). \end{cases} \quad (4.32)$$

При малых значениях  $x$  и  $y$  траектория решения будет близка к гомоклинической орбите и потечет обратно, чтобы снова пересечь поверхность  $C$  в некоторой точке, близкой к точке  $p$ . Таким образом, поток отображения Пуанкаре, который отображает точки на  $C$  с  $z > 0$  обратно на  $C$ . По первому порядку в  $x$  и  $y$  мы можем

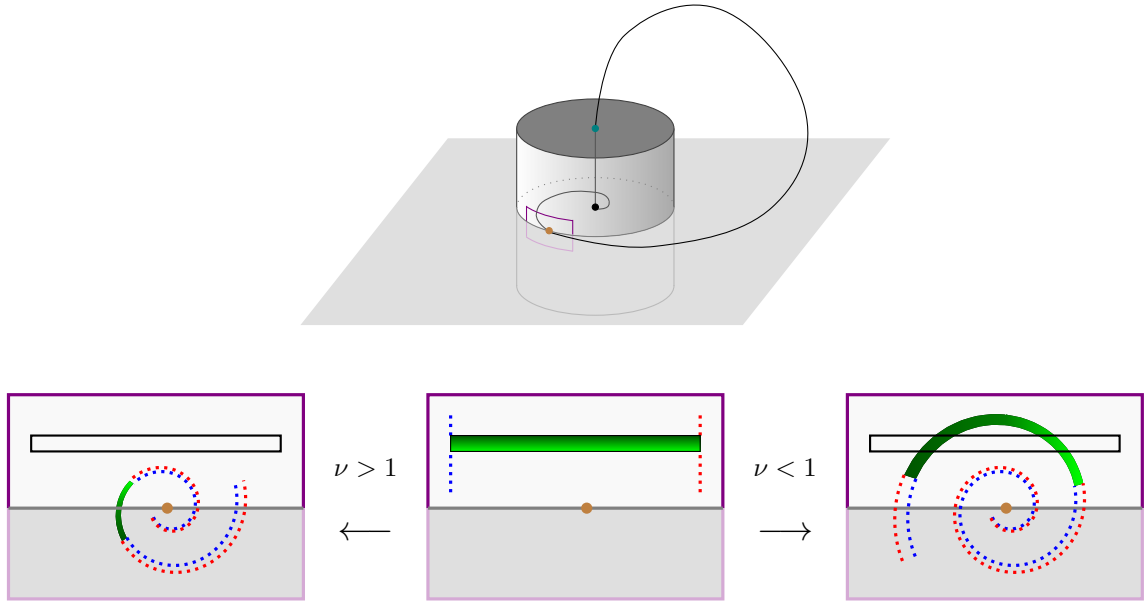


Рис. 4.6: Гомоклиническая орбита и отображение Пуанкаре, которое она индуцирует для различных значений отношения  $\nu = \frac{\rho}{\gamma}$ . Для  $\nu < 1$  всегда можно найти подобласть, в которой возникает подкова Смейла, как показано справа.

аппроксимировать это отображение линейным преобразованием:

$$\begin{cases} \zeta' = Ax(\theta, \zeta) + By(\theta, \zeta), \\ \theta' = Cx(\theta, \zeta) + Dy(\theta, \zeta). \end{cases} \quad (4.33)$$

Комбинируя уравнения (4.32) и (4.33), мы получаем следующее преобразование:

$$\begin{cases} \zeta' = r \left(\frac{\zeta}{h}\right)^{\frac{\rho}{\gamma}} \left[ A \cos \left(\theta - \frac{1}{\lambda} \log \frac{\zeta}{h}\right) + B \sin \left(\theta - \frac{1}{\lambda} \log \frac{\zeta}{h}\right) \right], \\ \theta' = r \left(\frac{\zeta}{h}\right)^{\frac{\rho}{\gamma}} \left[ C \cos \left(\theta - \frac{1}{\lambda} \log \frac{\zeta}{h}\right) + D \sin \left(\theta - \frac{1}{\lambda} \log \frac{\zeta}{h}\right) \right]. \end{cases} \quad (4.34)$$

Для общих значений  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  вертикальные линии с постоянными  $\theta$  и возрастающими  $\zeta$  отображаются на спирали, которые закручиваются вокруг начала координат, как показано на рисунке 4.6. Теперь заметим, что для  $\nu \equiv \frac{\rho}{\gamma} < 1$ , когда  $\frac{\zeta}{h}$  мало, что требуется для справедливости приближения (4.34), точки  $(\zeta, \theta)$  отображаются на точки  $(\zeta', \theta')$ , которые находятся дальше от начала координат. По этой причине, построив отображение (4.34), как на рисунке 4.6, можно обнаружить, что при выполнении условия Шильникова

$$\nu < 1 \quad (4.35)$$

то в общем случае всегда можно найти область  $S$ , в которой возникает подкова Смейла. Отсюда следует, что данная система дифференциальных уравнений яв-

ляется хаотической. В следующем разделе мы приведем пример гомоклинической орбиты Шильникова, возникающей в контексте RG-потока.

## 4.7 Хаотическая би-антисимметричная тензорная модель

В этом разделе мы представляем семейство тензорных моделей [199, 197] с  $O(N_1) \times O(N_2)$  симметрией и показываем, что для специальных нецелых значений  $N_1$  и  $N_2$  RG-поток модели становится хаотическим. При изучении RG-потока таких моделей мы следуем следующим работам [177] и [178], которые обнаружили существование RG-предельных циклов и гомоклинических орбит. Вообще, модели с группами симметрии нецелой размерности могут быть изучены численно и аналитически [47, 133], могут описывать реальные физические явления [83] и элегантно избегать знаменитые  $a, c, F$ -теоремы [302, 203, 198, 174]. Главное преимущество рассмотрения  $N_1$  и  $N_2$  как нецелых вещественных чисел заключается в том, что такой подход позволяет нам применять теоремы теории бифуркаций, которые позволяют установить, что динамическая система является хаотической. В работе [169] было доказано, что в общем классе 4-параметрических динамических систем можно настроить параметры на такие значения, при которых гарантированно возникает гомоклиническая орбита Шильникова. В статье [170] эти результаты были улучшены, доказав, что гомоклинические орбиты Шильникова возникают в окрестности определенного вида бифуркации коразмерности 3. Наконец, в 2020 году в [24] было получено строгое доказательство общего присутствия гомоклинической орбиты Шильникова в динамических системах, которые претерпевают подтип бифуркации коразмерности-2, известный как бифуркация нуля-Хопфа (ZH). В тензорной модели, которую мы рассмотрим, реализуется этот вид бифуркации.

Мы рассматриваем скалярную модель, описываемую тензорными полями четвертого ранга  $\phi_{\alpha\beta}^{ab}$ , в которых верхние индексы идут от единицы до  $N_1$ :  $a_1, a_2 \in \{1, \dots, N_1\}$  и принадлежат антисимметричному представлению группы  $O(N_1)$ , а нижние индексы - от единицы до  $N_2$ :  $\alpha, \beta \in \{1, \dots, N_2\}$  и принадлежат антисимметричному представлению группы  $O(N_2)$ :

$$\phi_{\alpha\beta}^{ab} = -\phi_{\alpha\beta}^{ba} = \phi_{\beta\alpha}^{ba}. \quad (4.36)$$

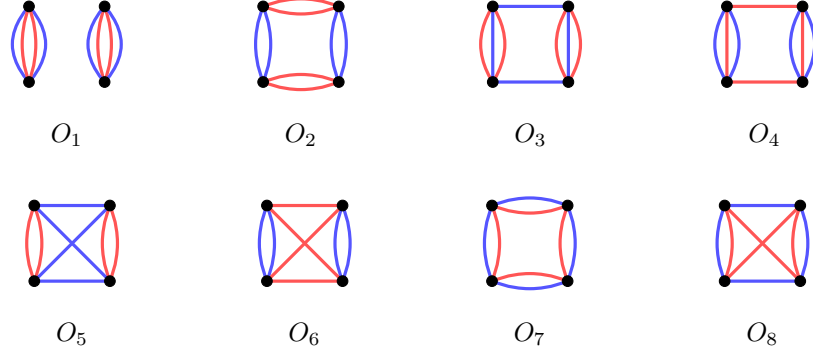


Рис. 4.7: Графическое представление операторов (4.39)

Мы работаем в  $d = 4 - \epsilon$  размерности. Всего в модели имеется восемь релевантных операторов  $O_i$ , которые мы можем добавить к нашей модели

$$S = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_{\alpha\beta}^{ab})^2 + \frac{1}{4!} \sum_{i=1}^8 g_i O_i(x) \right], \quad (4.37)$$

где операторы  $O_i$  даны в виде

$$\begin{aligned} O_1 &= \left( \phi_{\alpha\beta}^{ab} \phi_{\alpha\beta}^{ab} \right)^2, & O_2 &= \phi_{\alpha\beta}^{ab} \phi_{\gamma\delta}^{cb} \phi_{\gamma\delta}^{cd} \phi_{\alpha\beta}^{cd}, \\ O_3 &= \phi_{\alpha\beta}^{ab} \phi_{\gamma\beta}^{ab} \phi_{\gamma\delta}^{cd} \phi_{\alpha\delta}^{cd}, & O_4 &= \phi_{\alpha\beta}^{ab} \phi_{\alpha\beta}^{cb} \phi_{\gamma\delta}^{cd} \phi_{\gamma\delta}^{ad}, \\ O_5 &= \phi_{\alpha\beta}^{ab} \phi_{\gamma\delta}^{ab} \phi_{\alpha\delta}^{cd} \phi_{\gamma\beta}^{cd}, & O_6 &= \phi_{\alpha\beta}^{ab} \phi_{\alpha\beta}^{cd} \phi_{\gamma\delta}^{ad} \phi_{\gamma\delta}^{cb}, \\ O_7 &= \phi_{\alpha\beta}^{ab} \phi_{\gamma\beta}^{cb} \phi_{\gamma\delta}^{cd} \phi_{\alpha\delta}^{ad}, & O_8 &= \phi_{\alpha\beta}^{ab} \phi_{\gamma\delta}^{cb} \phi_{\gamma\beta}^{cd} \phi_{\alpha\delta}^{ad}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Диagramматически эти операторы можно представить так, как показано на рисунке 4.7. Бета-функции для констант связи, связанных с этими операторами, допускают пертурбативное разложение:

$$\beta_{g_i} = \mu \frac{dg_i}{d\mu} = -\epsilon g_i + \beta_{g_i}^{(2)} + \mathcal{O}(\|\vec{g}\|^3), \quad (4.39)$$

где  $\mu$  - RG параметр. Первый член в правой части данного уравнения дает классическую размерность данного оператора, а члены  $\beta_{g_i}^{(2)}$  приходят из первых порядков теории возмущений и квадратичны по константам связи. Мы будем рассматривать бета-функции абстрактно, как 8-мерную 2-параметрическую динамическую систему:

$$\frac{dg_i}{dt} = \beta_{g_i}(g_j, N_1, N_2). \quad (4.40)$$

Здесь  $t = \log \mu$ . Используя общие формулы для пертурбативных бета-функций в  $4 - \epsilon$  измерениях, несложным вычислением получаем  $\beta_{g_i}^{(2)}$  как функции рангов  $N_1$

и  $N_2$ . Поскольку верхний и нижний индексы фундаментальных полей  $\phi_{\alpha\beta}^{ab}$  преобразуются в одном и том же представлении, в рассматриваемом нами семействе QFT теория с  $O(N_1) \times O(N_2)$  симметрией такая же, как и теория с  $O(N_2) \times O(N_1)$ . Этот факт отражается в бета-функциях, которые инвариантны при одновременной замене  $N_1 \leftrightarrow N_2$ ,  $g_3 \leftrightarrow g_4$  и  $g_5 \leftrightarrow g_6$ .

Если взять  $N_1$  и  $N_2$  целыми числами больше трёх, то система бета-функций описывает поведение унитарной квантовой теории поля, и поэтому мы ожидаем только регулярное поведение такой системы. Все траектории являются гетероклиническими орбитами — траекториями, соединяющими отдельные неподвижные точки — и можно найти метрику Замолодчикова для системы и проверить, что действительно  $a$ -теорема выполняется. Между тем, если  $N_1$  или  $N_2$  равны двум или трём, то восемь операторов (4.38) уже не будут независимыми, так как будут существовать линейные комбинации между операторами. А если  $N_1$  или  $N_2$  равны единице, то все восемь операторов исчезают и следовательно тождественно равны нулю.

Далее мы продолжим систему до вещественных значений  $N_1$  и  $N_2$ . Режим, когда  $N_1$  или  $N_2$  лежит между  $-2$  и  $3$ , особенно интересен, поскольку здесь метрика Замолодчикова становится знаково неопределенной, так что поток RG больше не монотонный. Поэтому в данной области RG-поток может содержать предельные циклы, гомоклинические орбиты и хаос. Мы сосредоточимся на хаосе. Для этого мы ищем бифуркации ЗН [282, 149, 209] в пространстве  $N_1$  и  $N_2$ . Другими словами, нас интересует существование особых неподвижных точек, таких, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_i(g_j, N_1, N_2) = 0, \\ \det \left( \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right) = 0, \\ \left( \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right) \text{ — имеет пару комплексных собственных значений.} \end{array} \right. \quad (4.41)$$

Последнее требование можно сформулировать в терминах замкнутого алгебраического уравнения, но для краткости мы его опустим и отошлем читателя к [178]. В целом условия (4.41) состоят из 10 уравнений, так что в общем случае можно ожидать существование конечного числа решений в пространстве восьми констант связей  $g_i$  и двух параметров  $N_1$  и  $N_2$ . В окрестности точки ЗН можно произвести переопределение константы связи  $\{g_i\} \rightarrow \{x, y, z, \mathbf{g}_i\}$ , переопределение параметров  $(N_1, N_2) \rightarrow (a, b, \eta)$  и перепараметризацию  $t \rightarrow \tau(t)$  таким образом, что система диф-



дифференциальных уравнений, задаваемых бета-функциями, может быть приведена к так называемой нормальной форме параметризованной координатами  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = y + \eta x - axz, \\ \frac{dy}{d\tau} = -x + \eta y - ayz, \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta + z^2 + b(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (4.42)$$

Эти уравнения не точные, так как мы опускаем члены кубического и более высокого порядка в координатах. Параметры  $a, b, \eta, \beta$  зависят от  $N_1$  и  $N_2$ , причем  $a, \mu$  и  $\eta$  являются вещественными, а  $b = \pm 1$ . Прямо в точке ЗН  $\beta$  и  $\eta$  равны нулю. Остальные константы связи  $\mathbf{g}_i$  не влияют на динамику. Грубо говоря, мы можем найти инвариантное многообразие, задаваемое  $\mathbf{g}_i = 0$ , в окрестности данной неподвижной точки.

Система уравнений (4.42) имеет 6 топологически различных типов поведения, в зависимости от того, равна ли  $b$  плюсу или минусу единицы, и от того, является ли  $a > -1$ ,  $a \in (-1, 0)$  или  $a > 0$ . Нас интересует тип с  $a, b > 0$ . Недавний результат [24] состоит в том, что в двухпараметрических динамических системах с точками ЗН этого типа в общем случае существуют близкие значения параметров, для которых в системах наблюдаются гомоклинические орбиты Шильникова и, следовательно, проявляется хаос. Для системы бета-функций, управляющих RG-потокотензорной модели (4.37), можно убедиться, что существует точка ЗН рассматриваемого типа, расположенная в точке

$$\begin{pmatrix} N_1^* \\ N_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [r]2.520 \\ 1.972 \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

$$g^* \equiv (31.01, 14.90, 8.880, 136.2, 3.811, -143.5, -18.64, 18.16)\epsilon.$$

Для этой точки ЗН коэффициенты квадратичной нормальной формы  $a, b, \eta, \beta$  в (4.42) даны по ведущему порядку в  $\delta N_1 \equiv N_1 - N_1^*$  и  $\delta N_2 \equiv N_2 - N_2^*$  по

$$\begin{aligned} a &= 0.8826, & b &= 1, \\ \eta &= -40.59 \delta N_1 - 208.3 \delta N_2, & \beta &= -89.05 \delta N_1 - 456.9 \delta N_2. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Если ограничиться нормальной формой второго порядка в (4.42) и пренебречь поправками высших порядков, то гомоклинических решений не найти. В зависимости

от значений  $\delta N_1$  и  $\delta N_2$ , значение  $\beta$  будет либо отрицательным, либо положительным. В последнем случае существует пара неподвижных точек, расположенных на  $x = y = 0$  и  $z = \pm\sqrt{\beta}$ . Эта пара неподвижных точек связана гетероклиническими решениями. И поэтому в квадратичном порядке по динамическим переменным мы не получаем никаких новых явлений - система просто перетекает из одной неподвижной точки в другую обычным образом. Одно из этих гетероклинических решений проходит вертикально между двумя неподвижными точками, причем ось  $z$  является инвариантным многообразием потока (4.42). В частном случае, когда мы настраиваем  $\delta N_1$  и  $\delta N_2$  так, чтобы задать  $\eta = 0$ , остальные гетероклинические решения допускают простое описание, являясь орбитами, которые огибают инвариантный эллипсоид, заданный

$$z^2 + \frac{b}{1+a}(x^2 + y^2) = \beta. \quad (4.45)$$

Как только мы перестаем пренебрегать членами высшего порядка в нормальной форме, эти члены смешивают гетероклинические решения, и появляются гомоклинические решения. Одно из этих гетероклинических решений проходит вертикально между двумя неподвижными точками, причем ось  $z$  является инвариантным многообразием потока (4.42). При подходящих условиях эти гомоклинические решения удовлетворяют условию Шильникова (4.35), и наступает хаос.

Продолжить гомоклиническую орбиту Шильникова, выходящих из заданной точки ЗН в  $n$ -мерной системе, - нетривиальная задача. Мы не знаем гомоклинических асимптотик, как, например, в случае общей бифуркации Богданова-Тakens, см. [53]. Поэтому мы сначала искали гомоклинические решения в пространстве параметров  $N_1$  и  $N_2$  в 3-мерной редуцированной системе уравнений на инвариантном многообразии с добавленными кубическими членами. Впоследствии нам удалось найти эти приближенные решения в полной 8-мерной системе. Это было сделано следующим образом: гомоклиническая орбита начинается и заканчивается в фиксированной точке. Неподвижные точки нетрудно найти численно, поскольку это сводится к условию, что бета-функции равны нулю и можно легко решить полученные алгебраические уравнения. Получив неподвижную точку, мы находим решения, при которых одномерное неустойчивое многообразие неподвижной точки переходит в её двумерное устойчивое многообразие. На рисунке 4.8 такое решение в редуцированной системе показано в фазовом пространстве, а на левой панели рисунка 4.9

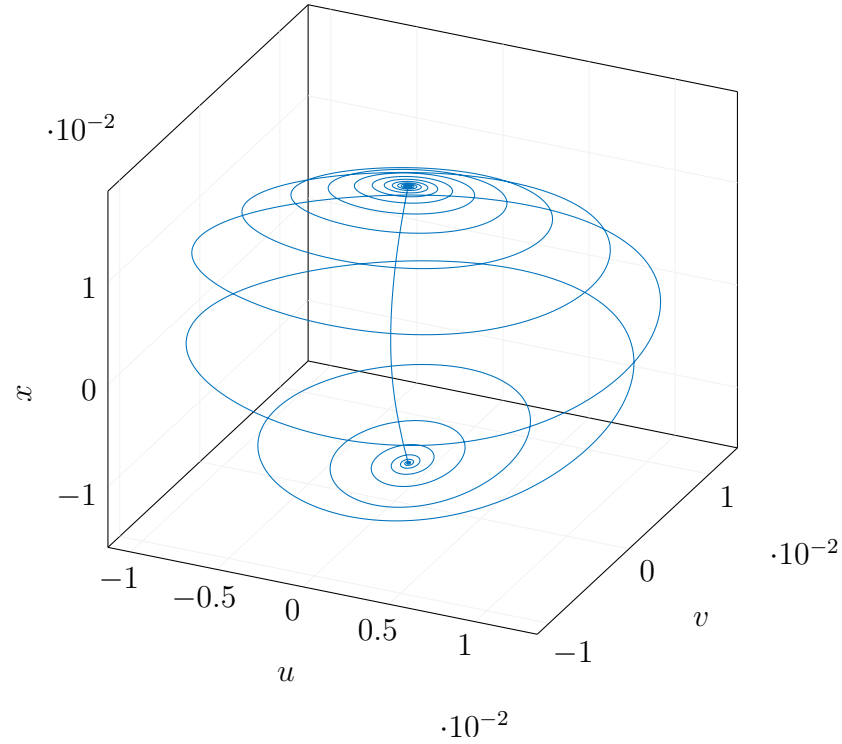


Рис. 4.8: Гомоклиническая орбита в точке  $(u, v, x) \approx (0.0008, -0.0001, 0.0152)$  для RG-потока констант связи при значениях параметров  $(N_1 - N_1^*, N_2 - N_2^*) = (7.412 \times 10^{-8}, -5.054 \times 10^{-7})$ . Здесь  $u, v$  и  $x$  — три независимые переменные которые зависят от констант связей  $g_i$ . Для вычислительных целей мы дополнительно перемасштабировали переменные  $u, v$  и  $x$  в  $10000/(6(32\pi)^2\epsilon)$ . Матрица стабильности неподвижной точки гомоклинической орбиты имеет следующие собственные значения  $\lambda_{\pm} \approx -0.0020 \pm 0.0307i$  и  $\lambda_3 \approx 0.0047$ . Таким образом, условие Шильникова выполнено, а динамика вблизи данной неподвижной точки становится хаотической.

приведены профили. Это решение переводится в полную систему, которая затем корректируется путем применения метода Ньютона, см. [292]. На правой панели рисунка 4.9 показан пример гомоклинической орбиты Шильникова, которую мы нашли в окрестности точки бифуркации ЗН (4.43) в полной системе. Это решение затем было продолжено с помощью стандартного продолжения, см. например [42]. В двумерном пространстве параметров,  $N_1$  и  $N_2$ , мы наблюдаем гомоклинические орбиты Шильникова вдоль одномерного подпространства, которое представляет собой "виляющую" траекторию, исходящую из точки ЗН, как показано на рисунке 4.11.

Поскольку мы установили наличие гомоклинических орбит Шильникова при особых значениях  $N_1$  и  $N_2$ , мы делаем вывод, что RG-поток модели (4.37) является хаотическим. Можно возразить, что мы работаем в ведущем порядке в теории возмущений по  $\epsilon = 4 - d$  и что поправки более высокого порядка будут изменять RG-поток. Но наличие бифуркации ЗН устойчиво при малых деформациях, и в [24] было строго доказано, что гомоклинические орбиты Шильникова возникают в общем случае вблизи точки ЗН. Поэтому, поскольку поправки высшего порядка в  $\epsilon$  подавлены, то, принимая  $\epsilon$  за малое значение, можно с уверенностью утверждать, что поток RG на самом деле хаотичен.

В качестве симптома хаоса можно обнаружить ряд интересных или странных RG-траекторий, возникающих при небольшом изменении начальных условий. Выше мы видели, что гомоклиническая орбита возникает при возмущении гетероклинической орбиты, когда орбита, выходящая из одной фиксированной точки, промахивается мимо другой фиксированной точки, но возвращается в исходную точку. При дальнейшем возмущении этой орбиты можно заставить её пропустить начальную точку и вместо этого снова устремиться к другой фиксированной точке, снова пропустить её и вернуться в исходную точку. Такая орбита называется 2-импульсной гомоклинической орбитой. Путём дополнительных аккуратных деформаций можно найти 3-, 4-, 5-, ... импульсные гомоклинические орбиты, которые плотно занимают окрестности гомоклинической орбиты Шильникова. В качестве примера на рисунке 4.10 приведена 3-импульсная гомоклиническая орбита.

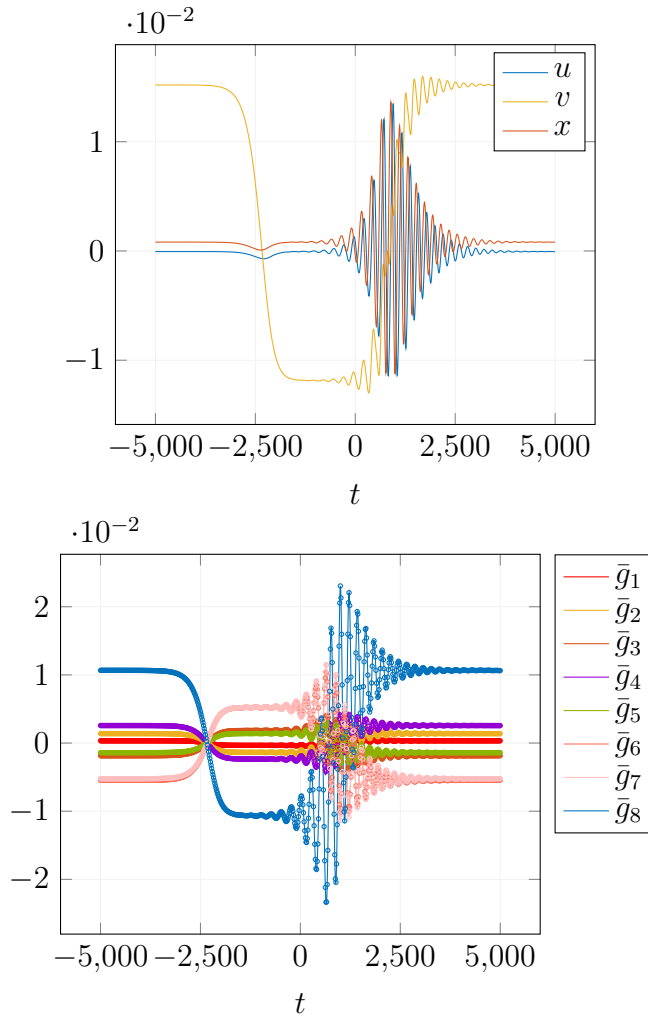


Рис. 4.9: На левой панели профили гомоклинической орбиты в приведенной системе при значениях параметров  $(N_1 - N_1^*, N_2 - N_2^*) = (7.412 \times 10^{-8}, -5.054 \times 10^{-7})$ , см. рисунок 4.8. На правой панели гомоклиническое решение в полном 8-мерном пространстве констант связей при значениях параметров  $(N_1 - N_1^*, N_2 - N_2^*) \approx (1.053 \times 10^{-7}, -6.655 \times 10^{-7})$ . По оси абсцисс обозначен интервал  $t = \log \mu$ , усе- ченный до интервала  $[-5000, 5000]$ , по оси ординат — значения восьмикоординат  $\bar{g}$  системы, где мы сдвинули начало координат и масштабировали полученные коор- динаты в  $10000/(6(32\pi)^2\epsilon)$ . Сплошные линии представляют приближенное решение, а кружки — решение с поправкой Ньютона. Мы видим, что в этом масштабе они неразличимы.

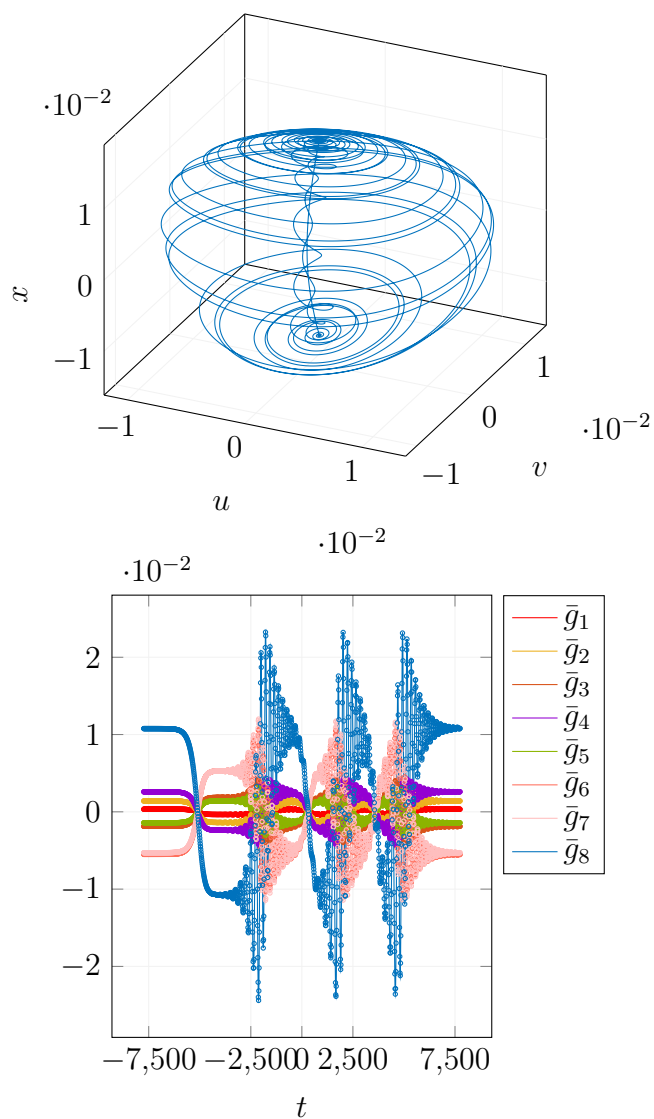


Рис. 4.10: Левая панель: Трехимпульсная гомоклиническая орбита в точке  $(u, v, x) \approx (0.0153, 0.0008, -5.0736 \times 10^{-5})$  для RG-потока констант связи при значениях параметров  $(N_1 - N_1^*, N_2 - N_2^*) = (5.145 \times 10^{-8}, -3.916 \times 10^{-7})$ . Здесь  $u, v$  и  $x$  — три независимые функции констант связей  $g_i$ . Правая панель: профиль трехимпульсного гомоклинического решения в сдвинутом и масштабированном 8-мерном фазовом пространстве.

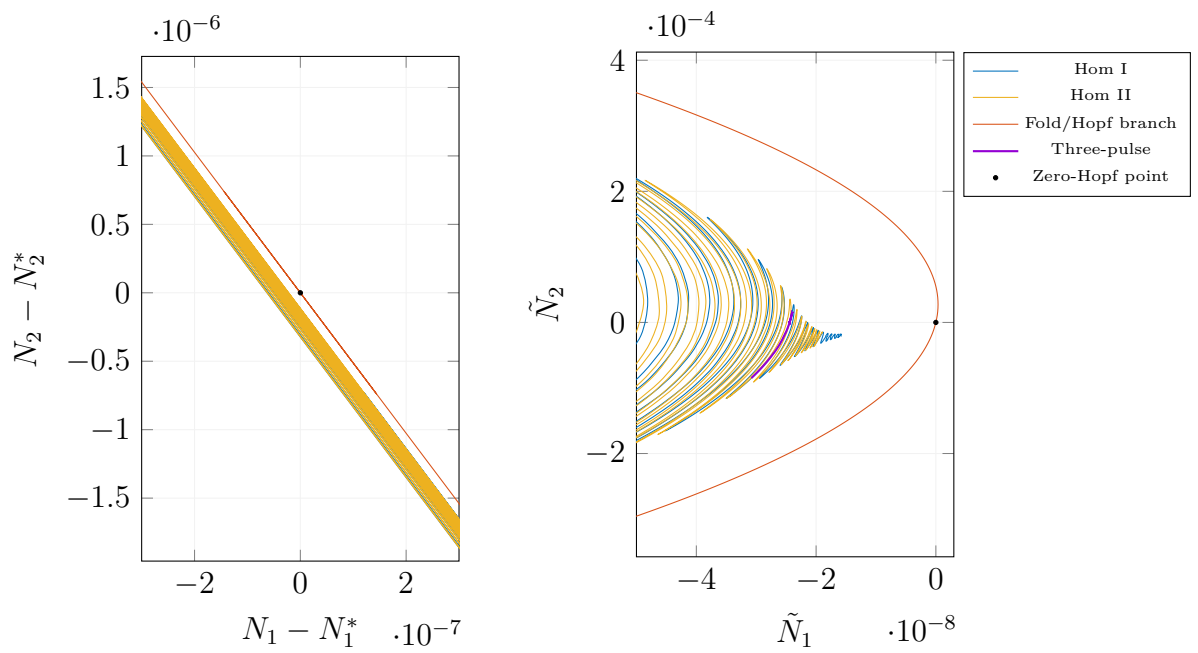


Рис. 4.11: Левая панель: Переплетенные колебания гомоклинических орбит, исходящие из точки бифуркации нулевого Хопфа в пространстве сдвинутых параметров  $(N_1 - N_1^*, N_2 - N_2^*)$ . Правая панель: те же кривые, что и на левой панели, но повернуты по часовой стрелке на угол  $0,1925$ . Также на правой панели показана бифуркационная кривая (фиолетовая) трехимпульсных гомоклинических орбит Шильникова.

## 4.8 Обсуждение и перспективы

В этой главе мы привели пример КТП с хаотическим RG-потокком. Обычно при изучении ренормализационной группы рассматриваются потоки, которые не являются хаотическими и тем самым дают универсальность — поведение системы на макроскопическом уровне нечувствительно к точной микроскопической конфигурации системы. Представьте, что у нас есть два соседних шара, сделанных из одного и того же металла. Если мы измерим их макроскопические свойства, такие как удельная теплота, скорость звука и плотность, то обнаружим, что они идентичны. Но если мы воспользуемся электронным микроскопом и разглядим внутреннюю структуру этих объектов, то обнаружим, что они совершенно разные: расстояние между атомами разное, количество атомов разное, точное распределение изотопов и дефектов разное и так далее. Обычно, когда поток RG нехаотичен, некоторые параметры не имеют значения на больших расстояниях, так что небольшие изменения на малых масштабах длины не влияют на крупномасштабное описание системы. Но одной из ключевых особенностей любого хаотического отображения является чрезвычайная чувствительность к начальным условиям. Если представить себе мир с хаотической ренормализационной группой, то макроскопические системы будут чувствительны к свойствам каждого отдельного атома. В этом смысле хаотические RG-потоки в целом и наш пример в частности представляют собой новый и своеобразный пример, где поведение ИК теории чрезвычайно чувствительно к УФ теории. По этой причине изучение хаотических RG-потоков и выделение тех случаев, когда они возникают, представляет собой интересную проблему. В итоге на вопрос, вынесенный в заголовок статьи [239], мы отвечаем, что *да, RG-потоки действительно могут быть беспорядочными.*

Установив существование QFT с хаотическими RG-потоками, разумно ожидать от этих теорий проявления каскадов удвоения периодов, странных аттракторов и других интересных явлений. Для тензорной модели (4.37), изучаемой в данной работе, надежное численное исследование экзотических RG-траекторий представляет собой сложную задачу, поскольку уравнения RG являются 8-мерными. Но в качестве первого приближения мы можем исследовать усеченные уравнения RG, описывающие редуцированную систему на инвариантном многообразии, в надежде, что эти кривые решений могут быть найдены до полной системы, как мы смогли



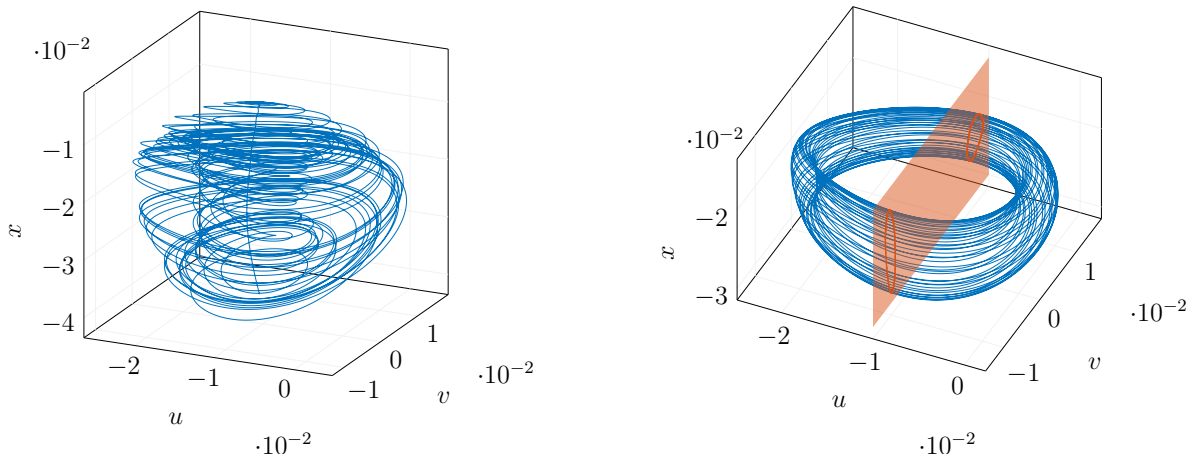


Рис. 4.12: На левой панели: решение, подобное спиральному аттрактору, полученное путем продолжения решения назад во времени, начиная с одномерного неустойчивого многообразия равновесия, расположенного в точке  $(u, v, x) \approx (-0.02473, -0.02190, 0.001417)$  со значениями параметров  $(N_1 - N_1^*, N_2 - N_2^*) = (-3.489 \times 10^{-6}, 1.774 \times 10^{-5})$ . Правая панель: Сходимость решения к двумерному тору.

сделать для гомоклинических орбит Шильникова. В общем случае при поиске экзотических траекторий в редуцированной системе мы наблюдаем три вида кривых решений:

1. Решение растет неограниченно.
2. Решение сходится к периодическому циклу.
3. Решение сходится к тору.

Пример третьего сценария изображен на рисунке 4.12. Последний интересный вопрос в данном контексте является изучение наличия фрактального RG-потока.

# Глава 5

## Теория поля в кривых пространства времени

### 5.1 Введение и общее обсуждение

Одна из самых удивительных особенностей нашего мира заключается в том, что он описывается локальными квантовыми теориями поля (КТП). Это означает, что мы работаем с объектом, который хотим описать (будь то стандартная модель или классический магнит) через набор локальных операторов  $\{O_n(x)\}$ , удовлетворяющих разложению операторного произведения [290, 179, 255]

$$O_n \cdot O_m = \sum c_{nm}^l O_l. \quad (5.1)$$

Это также означает, что малое возмущение может быть описано конформной теорией возмущений,  $V = \sum_a \lambda_a O_a$ , где  $\{\lambda^a\}$  - константы связи. В общей КТП операторная алгебра (5.1) заменяет уравнения движения. Но является ли локальность обязательным условием? Мы не знаем ответа.

В этой статье мы покажем, что существует правдоподобный механизм, открытый Ларкиным и Пикиным [213, 249], который нарушает локальность. О нём уже давно говорилось в [251], но многие связанные с ним факты ещё предстоит выяснить.

Эффект, который мы обсуждаем и обобщаем в данной работе, заключается в следующем. Рассмотрим теорию  $\phi^4$  на кристаллической решетке вблизи критической точки. Эффективное действие задается

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \tau \phi^2 + g \phi^4, \quad (5.2)$$

где  $\tau \propto (T - T_{\text{cr}})$  и  $\phi$  - намагниченность. При учете колебаний решетки мы получаем еще одно поле - смещения  $u_\alpha(x)$  и деформации  $u_{\alpha\beta} = \partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha$ . Лагранжиан для этого поля имеет вид

$$\mathcal{L}_1 = \frac{\lambda}{2} u_{\alpha\alpha}^2 + \mu u_{\alpha\beta}^2, \quad (5.3)$$

где  $\lambda, \mu$  - коэффициенты Ламе. Наконец, существует взаимодействие, приводящее к магнитострикции

$$\mathcal{L}_2 \propto u_{\alpha\alpha} \phi^2. \quad (5.4)$$

Поле  $u_{\alpha\beta}$  является гауссовым, и если мы наивно проинтегрируем  $u_{\alpha\beta}$ , то результат покажется тривиальным. Действительно, если мы используем (5.3), то получаем

$$\langle u_{\alpha\alpha}(x) u_{\beta\beta}(y) \rangle \propto \delta^d(x - y)$$

, а перенормировка  $\phi$  с флуктуациями  $u$  приводит к

$$\Delta \mathcal{L}_{\text{eff}} \propto \int \langle u_{\alpha\alpha}(x) u_{\beta\beta}(y) \rangle \phi^2(x) \phi^2(y) d^d x d^d y \propto \int \phi^4(x) d^d x$$

Таким образом, мы получаем тривиальную перенормировку члена  $\phi^4$ .

В этом вычислении есть недостаток, поскольку  $u_{\alpha\beta}(x)$  не являются независимыми полями, а подчиняются условиям совместимости Сен-Венана [211]

$$R_{\alpha\beta} = \partial^2 u_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \partial_\beta u_{\gamma\gamma} - \partial_\alpha \partial_\gamma u_{\gamma\beta} - \partial_\beta \partial_\gamma u_{\gamma\alpha} = 0 \quad (5.5)$$

что гарантирует, что для  $k \neq 0$  мы можем выразить  $u_{\alpha\beta}$  в терминах некоторого поля  $u_\alpha$

$$u_{\alpha\beta} = k_\alpha u_\beta + k_\beta u_\alpha$$

Ключевым моментом настоящей работы является то, что статистика  $u_{\alpha\beta}(k)$  скачкообразно меняется в точке  $k = 0$ , поскольку в этой точке условие Сен-Венана исчезает. Этот скачок числа степеней свободы приводит к нелокальному вкладу упругих мод, пропорциональному символу Кронекера,  $\delta_{\vec{p},0}$ , который мы называем аномалией Кронекера. Чтобы быть более общими и точными, рассмотрим теорию поля с периодическими граничными условиями или, что то же самое, теорию на  $D$ -мерном торе. Функции Грина в такой теории имеют следующую структуру

$$G(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) = \tilde{G}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) + A(0, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N) \delta_{\vec{p}_1,0} + \dots, \quad (5.6)$$

где  $\tilde{G}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$  предполагается аналитической функцией своих аргументов<sup>1</sup>. Тогда ненулевой вклад  $A(0, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N)$  является аномалией Кронекера. Мы можем сформулировать это иначе — функции Грина на торе не могут быть аналитическими функциями из-за аномалии Кронекера.

Чтобы продолжить, найдем пропагатор для акустического поля  $u_{\alpha\alpha}$ , который входит в формулу (5.4). Для  $\vec{k} \neq 0$  используем (5.3) и представление  $u_{\alpha\beta} = k_\alpha u_\beta + k_\beta u_\alpha$ . Эта часть действия имеет вид

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\vec{k} \neq 0} (\mu k^2 \delta_{\alpha\beta} + (\lambda + \mu) k_\alpha k_\beta) u_\alpha(k) u_\beta(-k) = \\ &= \sum_{\vec{k} \neq 0} \left( \mu k^2 \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) + (\lambda + 2\mu) k^2 \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Эти две части ортогональны, и пропагатор, являющийся обратной стороной вышеуказанных матриц, задаётся следующим образом

$$\langle u_\alpha(k) u_\beta(-k) \rangle_{k \neq 0} = \frac{1}{\mu k^2} \left[ \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} \right]. \quad (5.8)$$

Таким образом, часть  $k \neq 0$  из  $u_{\alpha\alpha}$  имеет простой вид

$$\langle u_{\alpha\alpha}(k) u_{\beta\beta}(-k) \rangle = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \quad \text{at } k \neq 0, \quad (5.9)$$

Для  $\vec{k} = 0$  пропагатор даётся<sup>2</sup>.

$$\langle u_{\alpha\beta} u_{\gamma\delta} \rangle \propto \int \mathcal{D}u e^{-\beta E(u)} u_{\alpha\beta} u_{\gamma\delta}, \quad (5.10)$$

, где  $E(u)$  - снова упругая энергия (5.3). Используя тождество Уорда

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta E(u)}{\delta u_{\alpha\beta}} u_{\gamma\delta} \right\rangle &= \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}, \\ \frac{\delta E(u)}{\delta u_{\alpha\beta}} &= \left( \lambda + \frac{2\mu}{d} \right) u_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \left( u_{\alpha\beta} - \frac{1}{d} \delta_{\alpha\beta} u_{\gamma\gamma} \right), \quad \langle u_{\alpha\alpha} u_{\beta\beta} \rangle = \frac{1}{\lambda + \frac{2\mu}{d}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Так мы находим пропагатор

$$\langle u_{\alpha\alpha}(k) u_{\beta\beta}(-k) \rangle = C_1 + C_2 \delta_{\vec{k}, 0} \quad (5.12)$$

, который в координатном пространстве имеет вид

$$\langle u_{\alpha\alpha}(x) u_{\beta\beta}(y) \rangle = C_1 \delta(x - y) + \frac{C_2}{V}, \quad (5.13)$$

<sup>1</sup>Мы также предполагаем, что эти функции не имеют существенных сингулярностей

<sup>2</sup>Заметим, что эти моды  $\vec{k} = 0$  могут не присутствовать в спектре в зависимости от структуры кристалла [130]

, где  $V$  - объем и

$$C_1 = \frac{1}{\lambda + 2\mu}, \quad C_2 = \frac{2(1 - \frac{1}{d})\mu}{(\lambda + 2\mu)(\lambda + \frac{2}{d}\mu)} \quad (5.14)$$

член  $C_2$  представляет собой аномалию Кронекера (5.6). Поскольку  $u$  - поле является гауссовым, легко вычислить его влияние на статсумму параметра порядка

$$\int \mathcal{D}u e^{-S[u_{\alpha\beta}]} \exp \left[ \int d^d x u_{\alpha\alpha}(x) \phi^2(x) \right] = \exp \left[ \int d^d x d^d y \langle u_{\alpha\alpha}(x) u_{\beta\beta}(y) \rangle \phi^2(x) \phi^2(y) \right]. \quad (5.15)$$

Таким образом, функция разбиения с учетом упругости приобретает дополнительный член, приходящий из (5.15)

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int d^d x [(\nabla\phi)^2 + \tau\phi^2 + \bar{g}\phi^4] + \frac{C_2}{V} \int \phi^2(x)\phi^2(y) d^d x d^d y \right\} = \\ &= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\xi \exp \left\{ \xi^2 V + C_2^{-1} \int d^d x (\tau + \xi)\phi^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Итак, мы видим, что связь параметра порядка с акустическими фононами приводит к появлению бислокального члена в действии

$$\Delta S \sim \frac{1}{V} \int \epsilon(x_1)\epsilon(x_2) d^d x_1 d^d x_2, \quad (5.17)$$

Фактор  $\frac{1}{V}$  необходим для того, чтобы сделать этот дополнительный член релевантным в термодинамическом пределе. Этот член также может быть приведен к виду

$$\Delta S \sim \xi^2 V + \int d^d x \xi \epsilon(x), \quad (5.18)$$

где  $\epsilon(x) \sim \phi^2(x)$  - плотность энергии магнита. Переменная  $\xi$  играет роль константы связи, и мы видим, что константы связи ведут себя как случайные гауссовы переменные.

Довольно неожиданно, что случайные константы связи и бислокальные операторы уже давно обсуждались в совершенно другом контексте. В работах [72, 157] утверждалось, что червоточины и детские вселенные порождают бислокальные возмущения. В нашей постановке случайную связь можно получить гораздо дешевле - вместо другой вселенной нам нужен всего лишь акустический фонон.

Но на этом история не заканчивается. В зависимости от значений аномальных размеров интеграл может расходиться. Используя ОПЕ

$$\epsilon(x_1)\epsilon(x_2) = \frac{1}{|x_1 - x_2|^{2\Delta_\epsilon}} I + \dots, \quad (5.19)$$

мы обнаруживаем, что если в  $\Delta_\epsilon < \frac{d}{2}$  мы имеем нелокальное действие, то в  $\Delta_\epsilon > \frac{d}{2}$  мы имеем УФ-расходимости и билोकальное действие исчезает.

Приведенное выше обсуждение показывает, что нелокальности проявляются в членах Кронекера. Важным примером этого механизма является проблема космологической постоянной. В этом случае роль акустических фононов играют гравитоны. Мы имеем метрический тензор,  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , с калибровочным условием

$$k_\mu h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} k_\nu h_{\lambda\lambda} \quad (5.20)$$

и очевидно, что у нас есть дополнительные степени свободы в точке  $k = 0$ , где калибровочное условие вырождается. Однако для решения проблемы космологической постоянной необходим более тонкий анализ калибровочной инвариантности. Мы оставляем эту проблему для будущей работы и представляем здесь лишь более простой случай 2-мерной теории струн в дилатонном фоне [250, 196, 253]. В этом случае мы имеем два набора осцилляторов, удовлетворяющих соотношению

$$[a_n^\mu, a_m^\nu] = n\eta^{\mu\nu} \delta_{n,-m},$$

, и все состояния могут быть построены путем применения этих операторов к состоянию вакуума  $|0\rangle$ . Наивно полагать, что в двух измерениях не существует фотоподобных степеней свободы. Однако из-за аномалии Кронекера в теории появляется бесконечное число так называемых дискретных состояний. Как обсуждалось в [196, 253, 296, 250], первое возбужденное состояние открытой струны имеет обычную форму  $e_\mu(p) a_{1\mu}^\dagger |0\rangle$  и удовлетворяет калибровочному условию

$$p(p + 2b) = 0, \quad (p_\mu + 2b_\mu) e_\mu(p) = 0, \quad e_\mu \sim e_\mu + \lambda p_\mu, \quad (5.21)$$

где  $b_\mu$  пропорционально производной от дилатона  $b_\mu \sim \partial_\mu \varphi$ ,  $\varphi$  - дилатон. Эта величина фиксируется условием, что центральный заряд струны равен нулю. В измерении  $1 + 1$  мы можем попытаться устранить "фотон"  $e_\mu(p)$ . Мы выбираем калибр и задаем  $e_1 = 0$ , а затем, используя ограничение, получаем  $e_0 = 0$ . Это хрестоматийный трюк, чтобы показать, что в  $d$ -размерности фотон имеет  $(d-2)$  степеней свободы. В нашем случае мы также можем сделать это, за исключением точек  $p_\mu = 0$  и  $p_\mu = -2b_\mu$ . Аналогичные рассуждения работают и для высших возбуждений струны. В результате наша струна имеет бесконечное число так называемых дискретных состояний. Это было явно проверено в [196, 253] путем вычисления амплитуд рассеяния, которые содержат бесконечное число полюсов. Их весьма нетривиальная динамика важна для установления соответствия струнно-матричной модели.

Мы не будем обсуждать здесь динамику дискретных состояний, а просто представим возбуждение струны второго уровня, которое обсуждалось в [196, 253, 141]. Оно имеет вид

$$|\psi_2\rangle = \left( e_\mu a_{2\mu}^\dagger + \xi_{\mu\nu} a_{1\mu}^\dagger a_{1\nu}^\dagger \right) |p\rangle. \quad (5.22)$$

Коэффициенты  $e_\mu, \xi_{\mu\nu}$  удовлетворяют условию

$$(p_\mu + 2b_\mu) \xi_{\mu\nu} + e_\nu = 0, \quad (p_\mu + 3b_\mu) e_\mu + \frac{1}{2} \xi_{\lambda\lambda} = 0, \quad (5.23)$$

и двум калибровочным преобразованиям

$$\begin{aligned} e_\mu &\sim e_\mu + \eta_\mu, & \xi_{\mu\nu} &\sim \xi_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (p_\mu \eta_\nu + p_\nu \eta_\mu), & (p_\mu + 2b_\mu) \eta_\mu &= 0, \\ e_\mu &\sim e_\mu + \lambda (5p_\mu - 2b_\mu), & \xi_{\mu\nu} &\sim \xi_{\mu\nu} + \lambda (\delta_{\mu\nu} + 3p_\mu p_\nu) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Анализ в [196, 253] показывает, что физические состояния существуют только в точке  $p_1 = \pm \frac{1}{2}$ , как результат вырождения калибровочных условий. Более глубокое динамическое понимание этой системы представляется весьма желательным.

## 5.2 Кронекеровская аномалия в гармоническом осцилляторе при конечной температуре

Другой способ получить нелокальные члены в эффективном действии - рассмотреть теорию в тепловом состоянии (или на торе). Например, мы можем изучать простой гармонический осциллятор при температуре  $\beta$  с действием

$$S = \int_0^\beta d\tau \left[ \frac{1}{2} \dot{x}^2(\tau) + \frac{1}{2} m^2 x^2(\tau) \right], \quad (5.25)$$

где мы предполагаем периодические граничные условия  $x(\tau + \beta) = x(\tau)$ , а масса,  $m$ , играет роль частоты осциллятора. Из этого мы можем вывести пропагатор в евклидовой сигнатуре, который будет выглядеть так

$$G(\tau) = \frac{1+n}{2m} e^{-m|\tau|} + \frac{n}{2m} e^{m|\tau|}, \quad n = \frac{1}{e^{\beta m} - 1}, \quad G(\omega_m) = \frac{1}{\omega_m^2 + m^2}, \quad \omega_m = \frac{2\pi m}{\beta}, \quad (5.26)$$

где  $n$  фиксировано периодическими граничными условиями. Действие (5.25) очень простое, и мы можем вычислить все физические наблюдаемые, например, восприимчивость  $\alpha = -\frac{\partial \langle x^2 \rangle}{\partial m^2}$ . Это можно сделать с помощью формулы Кубо  $\alpha_\omega \propto$

$\int_0^\beta d\tau e^{i\omega\tau} \langle x^2(0)x^2(\tau) \rangle$ . Сначала мы проведем это вычисление в нижней полуплоскости частотного диапазона  $i\Omega \in \frac{2\pi}{\beta}\mathbb{N}$ .

$$\Pi(\Omega) = x^2 \bullet \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \bullet x^2 = T \sum_n \frac{1}{\omega_n^2 + m^2} \frac{1}{(\Omega - \omega_n)^2 + m^2} = \frac{1}{m} \frac{\coth \frac{\beta m}{2}}{4m^2 + \Omega^2}, \quad (5.27)$$

Если наивно предположить, что  $\Pi(\Omega)$  является аналитической функцией частоты  $\Omega$ , то мы получим неверный ответ для  $\Pi(\Omega = 0)$ . Чтобы убедиться в этом, проведем те же вычисления в координатном представлении

$$\Pi(\tau) = G^2(\tau) = \frac{(1+n)^2}{4m^2} e^{-2m|\tau|} + \frac{n(1+n)}{2m^2} + \frac{n^2}{4m^2} e^{2m|\tau|}, \quad (5.28)$$

$$\text{then } \Pi(\Omega) = \frac{1}{m} \frac{\coth \frac{\beta m}{2}}{4m^2 + \Omega^2} + \frac{1}{4m^2} \frac{1}{\cosh m\beta - 1} \delta_{\Omega,0}, \quad (5.29)$$

где неаналитический член появляется из-за интерференции между двумя экспонентами в тепловом пропагаторе  $G(\tau)$ . Это означает, что наш расчет оператора поляризации в нижней полуплоскости частотного диапазона не учитывает вклад нулевой моды в (5.27) по сравнению с (5.29). На самом деле он играет важную роль, поскольку  $\Pi(0)$  является восприимчивостью и может быть измерен в эксперименте. В итоге мы имеем два возможных значения для восприимчивости  $\alpha$ , которые можно найти аналитическим продолжением из нижней полуплоскости  $\Pi_A$  и прямым вычислением  $\Pi_M$  в  $\Omega = 0$ :

$$\Pi_A(0) = \frac{\coth \frac{\beta m}{2}}{4m^3}, \quad \text{and} \quad \Pi_M(0) = \frac{1}{m} \frac{\coth \frac{\beta m}{2}}{4m^2} + \frac{1}{4m^2} \frac{1}{\cosh m\beta - 1}. \quad (5.30)$$

Чтобы понять это несоответствие, вычислим восприимчивость для гармонического осциллятора, используя прямое определение из  $\alpha$  и действие (5.25),

$$\langle n|x^2|n \rangle = \frac{2n+1}{2m}, \quad \langle\langle x^2 \rangle\rangle = \frac{\text{tr} [x^2 e^{-\beta H}]}{\text{tr} [e^{-\beta H}]} = \frac{1}{2\omega} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-n\beta m}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta m}} = \frac{1}{2m} \coth \frac{\beta m}{2}.$$

Мы можем изменять массу  $m$ , в двух различных режимах: сохраняя температуру или энтропию постоянными. Они приводят к двум различным типам восприимчивостей. Во-первых, мы вычисляем изотермическую восприимчивость системы,

$$\alpha_\beta = - \left( \frac{\partial \langle\langle x^2 \rangle\rangle}{\partial m^2} \right)_\beta = \frac{1}{m} \frac{\coth \frac{\beta m}{2}}{4m^2} + \frac{\beta}{2m^2} \frac{1}{\cosh m\beta - 1} = \Pi_M(0), \quad (5.31)$$

, в то время как адиабатическая или изэнтропическая восприимчивость

$$\alpha_S = - \left( \frac{\partial \langle\langle x^2 \rangle\rangle}{\partial m^2} \right)_S = \frac{1}{m} \frac{\coth \frac{\beta m}{2}}{4m^2} = \Pi_A(0), \quad (5.32)$$



Тогда из этого вычисления можно понять расхождение в величинах (5.30). Вычисление  $\Pi_M(0)$  соответствует изотермической восприимчивости, поскольку в технике Мацубары температура предполагается фиксированной граничными условиями  $x(\tau + \beta) = x(\tau)$ . Но в общем случае можно показать, что  $\Pi_A(\Omega)$  дает ответ для вычислений в реальном времени [210] с использованием техники Келдыша-Швингера.

$$\Pi_{KS}(0) = \int_{-\infty}^t dt' \operatorname{Im} [G_\beta^2(t - t')] dt' = \frac{1}{m} \frac{\coth \frac{\beta m}{2}}{4m^2} = \Pi_A(0). \quad (5.33)$$

Это происходит потому, что для реального времени с унитарной эволюцией энтропия  $S = -\operatorname{tr} [\rho \log \rho]$  остается постоянной. Поэтому расхождение (5.30) измеряет, грубо говоря, разницу между этими двумя различными восприимчивостями при постоянной температуре или энтропии. Согласно нашему определению, это расхождение является аномалией Кронекера (5.6). Существование члена Кронекера меняет поведение системы. Если связать осциллятор с внешней системой и проинтегрировать его степени свободы, то полученное эффективное действие будет содержать нелокальные члены для внешней системы, как в случае акустических фононов. Такое же несоответствие может возникнуть и в квантовых теориях поля.

Например, мы можем рассмотреть следующее действие

$$S = \int_0^\beta d\tau dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu a)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - ga\phi^2 \right]. \quad (5.34)$$

Тогда мы можем изучить однопетлевую поправку к пропагатору поля  $a$ . Она имеет следующий вид

$$G^{-1}(\Omega_n, p) = \Omega_n^2 + p^2 + m^2 - \Sigma(\Omega_n, p),$$

$$\Sigma(\Omega, p) = g^2 T \sum_n \int \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{\omega_n^2 + m^2 + \vec{q}^2} \frac{1}{(\Omega - \omega_n)^2 + m^2 + (p - q)^2}. \quad (5.35)$$

Мы ожидаем, что  $\Sigma(\Omega, p)$  имеет неаналитический вклад в  $p = 0$  (тогда частицы будут иметь одинаковые энергии и могут дать вклад в аномалию Кронекера (5.49)).

А если мы оценим эту функцию в точке  $\Omega_n = 2\pi T n$ , продолжим ее до точки  $\Omega = 0$  и сравним с прямым вычислением, то получим два разных ответа:

$$\delta\Sigma = \Sigma(\Omega = 0, \vec{p} = 0) - \Sigma_A(0, \vec{p} = 0) = \int \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{8T(m^2 + q^2)} \frac{1}{\sinh^2 \left[ \frac{\sqrt{m^2 + q^2}}{2T} \right]} \quad (5.36)$$

Эта разница приведет к появлению дополнительного нелокального члена в эффективном действии.

Существует множество других интересных механизмов, которые могут привести к появлению биллокальных действий. В основном мы обсуждаем их в дополнительных материалах. В приложении 5.3 мы обсуждаем, как аномалия Кронекера может возникнуть в калибровочной теории  $U(1)$  при скачке числа степеней свободы для  $k = 0$  и  $k \neq 0$ . В разделе 5.4 мы показываем физический смысл этой аномалии Кронекера, возникающей в пространстве с компактным направлением, и даем точные условия для ее появления. В приложении 5.5 мы показываем, как аномалия Кронекера может возникнуть в квантовой электродинамике или гравитации на торе, соединенном со скалярным или фермионным полем. В приложении 5.6 мы покажем, что в пространствах де Ситтера нечетной размерности квантовые теории поля также имеют аномалии Кронекера, в то время как в пространствах де Ситтера четной размерности такие неаналитические вклады отсутствуют. В приложении 5.7 мы показываем, как разрывные пропагаторы в координатном пространстве возникают в гиперболических пространствах.

### 5.3 Кронекеровская аномалия в теории Максвелла

Аномалия Кронекера проявляется и в электромагнетизме

$$S = \frac{1}{4} \int d^d x F_{\mu\nu}^2, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (5.37)$$

для  $k \neq 0$  мы можем использовать калибровку Ландау  $k^\mu A_\mu = 0$ , чтобы получить пропагатор

$$\langle A_\mu(k) A_\nu(-k) \rangle = \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2}. \quad (5.38)$$

Электромагнитное поле подчиняется следующим уравнениям Максвелла

$$\delta F = j, \quad dF = 0, \quad \delta = *d* \quad (5.39)$$

Первое уравнение является динамическим, показывающим, как  $F_{\mu\nu}$  зависит от внешнего тока, а второе уравнение - это просто утверждение, что  $F_{\mu\nu}$  является замкнутой формой и для некоторого  $A_\mu$ ,  $F = dA$ , что аналогично уравнению (5.5). А именно, если рассматривать ограничение с некоторым волновым вектором  $k^\mu$ , то это уравнение утверждает, что  $F_{\mu\nu}(k)$  имеет  $d - 1$  решений ( $d$  следует из того,

что  $F = dA$  для некоторой 1-формы  $A$  и  $(-1)$  следует из калибровочной инвариантности такой конфигурации  $A \sim A + d\phi$  будет давать ту же напряженность поля  $F$ ).

По  $k^\mu = 0$ , при рассмотрении постоянных конфигураций мы имеем  $\frac{d(d-1)}{2}$  степеней свободы (в 4 измерениях это соответствует 6 постоянным электрическому и магнитному полям) и мы имели бы тот же тип изменения числа степеней свободы. Действительно, рассмотрим следующее соотношение

$$\frac{1}{2} \langle F_{\mu\nu}(k) F_{\mu\nu}(-k) \rangle = \frac{1}{k^4} (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) (g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) = d - 1, \quad (5.40)$$

В  $k^\mu = 0$  пропагатор сингулярен, и наивно это дало бы тот же ответ,  $d - 1$ , но если мы рассмотрим его более тщательно, то получим

$$S = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 V, \quad \frac{1}{2} \langle F_{\mu\nu}(k=0) F_{\mu\nu}(k=0) \rangle = \frac{d(d-1)}{2}, \quad (5.41)$$

что в конце даёт нам

$$\frac{1}{2} \langle F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(y) \rangle = (d-1) \delta^d(x-y) + \frac{(d-1)(d-2)}{2} \frac{1}{V}, \quad (5.42)$$

, что является аналогом уравнения (5.14).

## 5.4 Математические аспекты аномалии Кронекера

В этом разделе мы объясним, как аномалия Кронекера возникает в петлевых вычислениях. Рассмотрим квантовую теорию поля при конечной температуре  $\beta$  и попытаемся вычислить любую петлевую диаграмму. Для краткости мы будем опускать переменную  $p$  в формулах. Согласно технике Мацубары, мы должны просуммировать дискретные частоты

$$\mathcal{A}_l(\omega_i) = T \sum_n G_M(i\Omega_n) G_M(i(\Omega_n + \omega_1)) \dots G_M(i(\Omega_n + \omega_1 + \dots + \omega_{l-1})), \quad (5.43)$$

Поскольку мы имеем квантовую систему в тепловом равновесии

$$G_M(i\omega_n) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\Im G_R(\omega)}{\omega - i\omega_n}, \quad (5.44)$$

В общем случае  $\Im G_R(\omega)$  зависит только от спектра модели, но не от самого конкретного состояния. Например, для гармонического осциллятора  $\Im G_R(\omega) = \pi \delta(\omega^2 - m^2)$ .

Подставляем это представление в амплитуду (5.43)

$$\mathcal{A}_l(\omega_i) = T \int \prod_{i=1}^l \frac{dx_i}{2\pi} \Im G_R(x_i) \sum_n \frac{1}{x_1 - i\Omega_n} \frac{1}{x_2 - i\Omega_n - i\omega_1} \dots \frac{1}{x_l - i\Omega_n - i\omega_1 - \dots - i\omega_{l-1}}$$

Рассматривая слагаемые этого выражения как аналитическую функцию от  $\Omega_n$ , мы можем разложить его как сумму простых полюсов  $\frac{C(\omega_i)}{x-i\Omega_n}$ . Суммирование по  $\Omega_n$  дает

$$T \sum_n \frac{C(\omega_i)}{x-i\Omega_n} = \frac{C(\omega_i)}{2} \coth \frac{x}{2T},$$

$$\mathcal{A}_l(\omega_i) = \frac{1}{2} \int \prod_{i=1}^l \frac{dx_i}{2\pi} \Im G_R(x_i) \left[ \coth \frac{x_1}{2T} \frac{1}{x_2 - x_1 - i\omega_1} \cdots \frac{1}{x_l - x_1 - i\omega_1 - \dots - i\omega_{l-1}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \coth \frac{x_2 - i\omega_1}{2T} \frac{1}{x_1 - x_2 + i\omega_1} \cdots \frac{1}{x_l - x_2 - i\omega_2 - \dots - i\omega_{l-1}} + \dots \right] \quad (5.45)$$

Видно, что если  $\sum_{i=1}^k \omega_i \neq 0$  для любого выбора индексов интеграл, то амплитуда не будет иметь расходимостей и результирующая функция будет аналитической. В противном случае имеются полюса, если некоторая сумма  $\omega$  обращается в нуль. Например, для  $l = 2$  имеем.

$$\mathcal{A}_2(\omega_1) = \frac{1}{2} \int \prod_{i=1}^2 \frac{dx_i}{\pi} \Im G_R(x_i) \frac{\coth \frac{x_1}{2T} + \coth \frac{x_2}{2T}}{x_1 + x_2 - i\omega_1}. \quad (5.46)$$

Эта формула аналогична восприимчивости Ферми жидкости [4], где такие сингулярности приводят к некоммутирующим  $k$  и  $\omega$  пределам. Если  $\omega_1 \neq 0$ , то интеграл не содержит сингулярностей и поэтому является аналитической функцией  $\omega_1$ . Если  $\omega_1 = 0$ , то возможны проявления нелокального члена

$$\lim_{x_1 \rightarrow -x_2} \frac{\coth \frac{x_1}{2T} + \coth \frac{x_2}{2T}}{x_1 + x_2 - i\omega_1} = \begin{cases} 0, & \omega_1 \neq 0 \\ -\frac{1}{2T \sinh^2 \frac{x_2}{2T}}, & \omega_1 = 0 \end{cases} \quad (5.47)$$

Этот дополнительный член может быть равен аномалии Кронекера на  $\omega_1 = 0$ . Эта сингулярность возникает при  $x_1 = -x_2$ , и если произведение  $\Im G_R(x_1)$  недостаточно сингулярно, то никаких вкладов не будет. Но если  $\Im G_R(x_i)$  сингулярно, то член (5.47) даст свой вклад, и мы получим аномалию Кронекера. В примере с гармоническим осциллятором

$$\Im G_R(x_1) \Im G_R(x_2) = \pi^2 \delta(x_1^2 - m^2) \delta(x_2^2 - m^2), \quad (5.48)$$

и двумерный интеграл сводится к сумме по подмножеству  $x_1 = \pm x_2 = \pm m$ . Дополнительный член (5.47) равен петлевому вычислению и в точности совпадает с расхождением (5.30). Если ввести функцию Кронекера  $\delta_{x,y}$

$$\Delta A_2(\omega_1) = -\frac{1}{4T} \int \prod_{i=1}^l \frac{dx_i}{\pi} \Im G_R(x_i) \frac{\delta_{x_1, x_2} \delta_{\omega_1, 0}}{\sinh^2 \frac{x_2}{2T}} \quad (5.49)$$

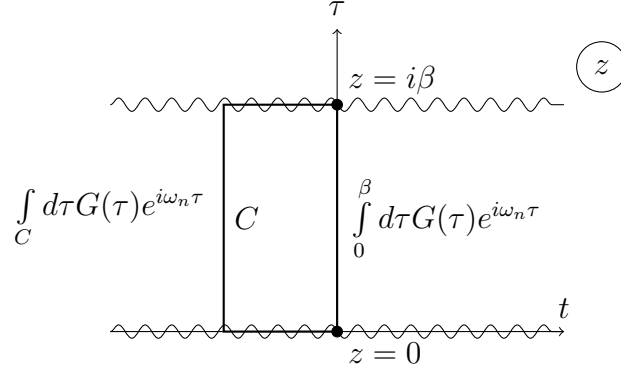


Рис. 5.1: Аналитическая структура двухточечной функции (5.50). Функция  $G_{AB}(z)$  имеет два разреза  $\Im z = 0, \beta$ .

Мы видим, что только стабильные квазичастицы вносят вклад в аномалию Кронекера, когда  $\Im G_R$  имеет дельта-функциональные сингулярности.

В  $\omega = 0$  мы представляем другой способ понимания аномалии Кронекера. Так, мы рассматриваем двухточечную функцию Уитмена двух операторов  $A(z = t + i\tau)$  и  $B(0)$

$$G_{AB}(z) = \frac{1}{Z} \text{tr} [A(t + i\tau)B(0)e^{-\beta H}] = \quad (5.50)$$

$$\frac{1}{Z} \sum_{n,m} \langle n|A|m\rangle \langle m|B|n\rangle e^{-\beta E_n} e^{(\tau+it)(E_n-E_m)},$$

Вблизи точек  $\tau = 0, \beta$  эта функция может быть переписана в виде

$$G_{AB}(t + i\beta) = \frac{1}{Z} \sum_{n,m} \langle n|A|m\rangle \langle m|B|n\rangle e^{-\beta E_m} e^{it(E_n-E_m)},$$

$$G_{AB}(t) = \frac{1}{Z} \sum_{n,m} \langle n|A|m\rangle \langle m|B|n\rangle e^{-\beta E_n} e^{it(E_n-E_m)} = G_{AB}^*(t + i\beta) \quad (5.51)$$

где можно заметить, что  $G_{AB}(t + i\tau)$  является аналитической функцией в области  $0 < \tau < \beta$  (иначе сумма по  $n$  или  $m$  расходилась бы). Аналитическая структура этой функции изображена на рисунке (5.1). В пределе  $z \rightarrow \infty$  сильно осциллирующие члены  $e^{it(E_n-E_m)}$  погасят все вклады, кроме  $E_n = E_m$ . Таким образом, мы имеем

$$G_{AB}(\pm\infty) = g_{AB} = \frac{1}{Z} \sum_n \langle n|A|n\rangle \langle n|B|n\rangle e^{-\beta E_n} \in \mathbb{R} \quad (5.52)$$

Преобразование Фурье для  $G_{AB}(\tau)$  даётся следующим образом

$$G_{AB}(\omega_n) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} G_{AB}(i\tau), \quad (5.53)$$

Рассмотрим случай  $\omega_n \leq 0$ . Тогда мы можем деформировать контур интегрирования (5.1) и получить

$$\begin{aligned} G_{AB}(\omega_n) &= \int_C d\tau e^{i\omega_n \tau} G_{AB}(i\tau) = \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} e^{\omega_n t_0} \int_C d\tau e^{i\omega_n \tau} G_{AB}(i\tau - t_0) + \int_{-\infty}^0 dt e^{\omega_n t} \Im G_{AB}(t) = I_n + \mathcal{F}(\omega_n), \end{aligned} \quad (5.54)$$

Видно, что второй член  $\mathcal{F}(\omega_n)$  является аналитической функцией своего аргумента  $\omega_n$ . Первый член исчезает для  $\omega_n < 0$ , так как он умножается на ограниченную функцию. Но если учесть, что  $G_{AB} \rightarrow g_{AB}$  на бесконечности, то получим

$$I_n = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} e^{\omega_n t_0} \int_C d\tau e^{i\omega_n \tau} G_{AB}(i\tau - t_0) = \frac{g_{AB}}{T} \delta_{\omega_n, 0}, \quad (5.55)$$

, что как раз и является аномалией Кронекера.

## 5.5 Двумерная скалярная электродинамика на торе

В этом разделе мы покажем, как аномалия Кронекера влияет на динамику квантовой электродинамики и гравитации, связанной с массивными скалярными и фермионными полями на торе  $S^1_\beta \times S^1_{\beta'}$ . Её можно рассматривать как систему при конечной температуре с компактной пространственной координатой. Действие этой модели имеет вид,

$$S = \int d^2x \left[ |(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi|^2 - m^2 |\phi|^2 - \frac{1}{4} F_{01}^2 \right]. \quad (5.56)$$

Мы можем считать пропагатор

$$G(n, m) = \frac{1}{p_n^2 + \omega_k^2 + m^2}, \quad p_n = \frac{2\pi n}{\beta'}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{\beta}. \quad (5.57)$$

Однопетлевой вклад в оператор поляризации, т.е. в низший порядок константы связи,  $e^2$ ,

$$\Pi_{00}(\Omega, q) = \frac{e^2}{\beta' \beta} \sum_{n, m} \left[ \frac{(2\omega_n + \Omega)^2}{(\omega_n^2 + p_m^2 + m^2)((\omega_n - \Omega)^2 + (p_m - q)^2 + m^2)} - \frac{2}{\omega_n^2 + p_m^2 + m^2} \right]$$

Используя тождества Уорда, мы можем найти следующие соотношения для операторов поляризации

$$\Omega \Pi_{00}(\Omega, q) + q \Pi_{01}(\Omega, q) = 0, \quad \text{and} \quad \Omega \Pi_{01}(\Omega, q) + q \Pi_{11}(\Omega, q) = 0, \quad (5.58)$$

Заметим, что если  $\Omega \neq 0$ , то можно выразить  $\Pi_{00} = -\frac{q}{\Omega}\Pi_{01}$  и  $\Pi_{00}(\Omega, q)$  должны быть равны нулю для  $q = 0$  и  $\Omega \neq 0$ . Уравнения (5.58) не ограничивают двухточечную функцию только тогда, когда  $\Omega = q = 0$ .

Поэтому неаналитические вклады могут проявиться только при  $\Omega = q = 0$ . Поэтому мы задаем  $\Omega = 0$  и рассматриваем соответствующую компоненту как функцию пространственного импульса,  $q$ ,

$$\Pi_{00}(0, q) = \frac{2e^2}{\beta'\beta} \sum_{n,m} \left[ \frac{2\omega_n^2}{(\omega_n^2 + p_m^2 + m^2)(\omega_n^2 + (p_m + q)^2 + m^2)} - \frac{1}{\omega_n^2 + p_m^2 + m^2} \right]. \quad (5.59)$$

Суммируя этот ряд при  $q = 0$  и  $q \neq 0$ , получаем следующий результат,

$$\Pi_{00}(0, q) = \pi_{00} \delta_{q,0} + \tilde{\Pi}_{00}(0, q), \quad \pi_{00} = \frac{e^2}{\beta} \sum_n \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + m^2} \frac{1}{\sinh^2 \left( \frac{\sqrt{\omega_n^2 + m^2}}{2T'} \right)}. \quad (5.60)$$

Последний член вносит в эффективное действие электромагнитного поля дополнительное нетривиальное взаимодействие для  $A_0(0, 0)$ .

Чтобы лучше понять это, мы можем изучить модель  $2d$  с безмассовыми фермионами Дирака на том же торе  $S_\beta^1 \times S_{\beta'}^1$  (с периодическими граничными условиями по пространственному кругу  $S_{\beta'}^1$ ). В этом случае пропагатор для кронекеровской моды имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_{00}(\omega = 0, q) &= e^2 T T' \sum_{n,m} \frac{2\omega_n^2 - 2p_m(p_m + q)}{(\omega_n^2 + p_m^2)(\omega_n^2 + (p_m + q)^2)} = \\ &= \frac{1}{q} e^2 T' \sum_m \left( \tanh \left( \frac{p_m + q}{2T} \right) - \tanh \left( \frac{p_m}{2T} \right) \right), \text{ here } T = \frac{1}{\beta} \text{ and } T' = \frac{1}{\beta'} \end{aligned} \quad (5.61)$$

Если  $q \neq 0$ , то мы можем сдвинуть слагаемые и вычислить разность между первым и вторым членом в слагаемом, чтобы найти, что:

$$\Pi_{00}(\omega = 0, q) = \frac{e^2}{2\pi} \quad (5.62)$$

В пределе как  $q \rightarrow 0$  мы должны заменить разность на производную, чтобы получить, что

$$\begin{aligned} \Pi_{00}(\omega = 0, q = 0) &= e^2 \frac{\beta}{\beta'} \sum_n \frac{1}{\cosh^2 \frac{\pi n \beta}{2\beta'}} = e^2 g \left( \frac{\beta}{\beta'} \right) + \frac{e^2}{2\pi}, \\ \text{where } g(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{\cosh^2 \frac{\pi n x}{2}} - \frac{1}{2\pi}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Сумма снова отличается для  $q = 0$  и  $q \neq 0$ . Мы хотели бы подчеркнуть, что этот дополнительный член не связан с динамикой линий Вильсона - он уже охвачен членом Швингера. Действительно, линия Вильсона равна  $W_t(x) = \int d\tau A_0(x, \tau)$  или в пространстве Фурье  $W_t(q) = A_0(0, q) = \frac{F_{01}(0, q)}{q}$ , тогда мы можем переписать указанный выше вклад в действие как

$$\begin{aligned} S &= \frac{e^2}{2\pi} \sum_q \frac{F_{01}(0, q)F_{01}(0, -q)}{q^2} + e^2 g \left( \frac{\beta}{\beta'} \right) W_t^2(q=0) = \\ &= \sum_q W_t(q)W_t(-q) + e^2 g \left( \frac{\beta}{\beta'} \right) W_t^2(q=0) = \int dx W_t^2(x) + e^2 g \left( \frac{\beta}{\beta'} \right) \left( \int dx dt A_0 \right)^2. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Действие содержит локальную динамику вильсоновских линий, в то время как последний член не имеет такой формы и вносит дополнительную динамику. Эти нелокальные вклады на всех порядках теории возмущений были впервые вычислены в [269].

Аналогичные вычисления можно провести и для гравитационного случая. Мы будем работать с линеаризованной гравитацией, чтобы применить интуицию, развитую нами в абелевом случае. Рассмотрим симметричное поле теории  $h_{ab}$ , инвариантное при следующих преобразованиях

$$h_{ab} \rightarrow h_{ab} + \partial_a \epsilon_b + \partial_b \epsilon_a, \quad h_{ab}(k) \rightarrow h_{ab}(k) + k_a \epsilon_b + k_b \epsilon_a, \quad (5.65)$$

Фурье-преобразование уравнения. (5.65) вырождается в  $\vec{k} = 0$ , что означает, что дополнительные степени свободы могут вносить вклад в динамику. Мы связываем эту теорию гравитации с фермионным полем на торе  $\mathbb{T}^2 = S^1_\beta \times S^1_{\beta'}$ . Если мы проинтегрируем фермионы из теории, то эти новые степени свободы могут стать живыми. Гравитационное поле  $h_{ab}$  связано с тензором энергии импульса

$$\delta S = \int d^2x h_{ab} T_{ab}, \quad T_{00} = \bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi, \quad T_{01} = \frac{1}{2} \bar{\psi} [\gamma_0 \partial_1 + \gamma_1 \partial_0] \psi, \quad T_{11} = \bar{\psi} \gamma_1 \partial_1 \psi. \quad (5.66)$$

В силу калибровочной инвариантности  $\Pi_{00|00}(\Omega, q=0) = \langle T_{00}(0, q) T_{00}(0, -q) \rangle = 0$ , когда  $\Omega \neq 0$ . Поэтому, чтобы получить неаналитические вклады в оператор поляризации  $\Pi_{00|00}$ , мы задаем  $\Omega = 0$  и исследуем его как функцию от  $q$ . Вычисления дают следующий поляризационный оператор

$$\Pi_{00|00}(\Omega = 0, q) = \frac{1}{\beta\beta'} \sum_{n,m} \frac{\omega_n^2 (\omega_n^2 - p_m(p_m + q))}{(p_m^2 + \omega_n^2)((p_m + q)^2 + \omega_n^2)}. \quad (5.67)$$



Суммирование по частотам  $\omega_n$  может быть выполнено, и это даёт:

$$\Pi_{00|00}(\Omega = 0, q) = \frac{1}{\beta'} \sum_n \frac{(p_n + q)^2 \tanh \frac{\beta(p_n + q)}{2} - p_n^2 \tanh \frac{\beta p_n}{2}}{2q} \quad (5.68)$$

Эта сумма по  $p_n$ , казалось бы, расходится, но после регуляризации для  $q \neq 0$ :

$$\Pi_{00|00}(\Omega = 0, q \neq 0) = -\frac{q^2}{6}, \quad (5.69)$$

Этот член приводит к эффективному действию

$$\delta S = h_{00}(\omega = 0, q) \frac{q^2}{6} h_{00}(\omega = 0, -q) = \frac{R(\omega = 0, q)R(\omega, -q)}{6q^2}, \quad (5.70)$$

, где мы использовали, что при линейном порядке  $R(\omega = 0, q) = -q^2 h_{00}(\omega = 0, q)$ . Таким образом, нам удалось восстановить действие Лиувилля на торе. Этот факт не удивителен. Но если мы рассмотрим случай из  $q = 0$ , когда ограничения тривиально удовлетворены, то получим

$$\delta \Pi_{00|00}(\Omega = 0, q = 0) = \sum_n \frac{p_n^2 + 2\frac{p_n}{\beta} \sinh [p_n \beta]}{\cosh^2 \left[ \frac{p_n \beta}{2} \right]} \quad (5.71)$$

Этот член вносит в эффективное действие нелокальное взаимодействие. Было бы интересно лучше понять происхождение и смысл этого термина.

## 5.6 Кронекерова аномалия в пространствах с постоянной кривизной

До этого мы рассматривали только случаи пространств с компактным подпространством  $\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}} \times S^1$ . Вычисления были достаточно явными, и аномалии Кронекера появлялись. Было бы интересно изучить случай других компактных пространств. Наиболее прямым обобщением является рассмотрение трехмерной сферы  $S^3$ . Проблема весьма интересна и связана с проблемой устойчивости де Ситтера [13, 254]. Также уже было показано, что петлевые поправки для главных серий содержат неаналитические вклады [14] Рассмотрим следующую теорию

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{-g} [(\partial_\mu a)^2 - m^2 a^2 + \lambda a^3], \quad (5.72)$$

Выберем следующую метрику на сфере

$$ds^2 = d\phi^2 + \sin^2 \phi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.73)$$

В силу высокой симметрии  $S^3$  две точечные функции зависят от геодезического расстояния  $Z = \cos \phi$  [254]

$$G_\mu(\cos \phi) = \frac{\sinh \mu (\pi - \phi)}{\sinh \mu \pi \sin \phi} = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{(L+1)}{L(L+2) + m^2} \frac{\sin(L+1)\phi}{\sin \phi}, \quad (5.74)$$

, где  $\mu = \sqrt{m^2 - 1}$  и  $\frac{\sin(L+1)\phi}{\sin \phi}$  - собственные функции на трехмерной сфере. Отметим, что

$$G_\mu(\cos \phi) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{K}{K^2 + \mu^2} \frac{\sin K \phi}{\sin \phi}, \quad (5.75)$$

для получения фейнмановского пропагатора необходимо заменить суммирование на интеграл

$$Q_\mu(\cos \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dK}{2\pi} \frac{K}{K^2 + \mu^2} \frac{\sin K \phi}{\sin \phi} \quad (5.76)$$

Мы хотим разложить однопетлевую поправку  $\Pi(\cos \phi) = G_\mu^2(\cos \phi)$  через собственные функции 3d сферы

$$P_L(\cos \phi) = \frac{\sin(L+1)\phi}{\sin \phi} = \sum_{K=L, L-2, \dots, -L} e^{iK\phi},$$

$$\int_0^\pi d\phi \sin^2 \phi P_L(\cos \phi) P_K(\cos \phi) = \delta_{LK},$$

$$\Pi(\cos \phi) = \sum_L \Pi_L P_L(\cos \phi), \quad \Pi_L = \int_0^\pi d\phi \sin^2 \phi \Pi(\cos \phi) P_L(\cos \phi), \quad (5.77)$$

получаем, что

$$\Pi_L = \sum_{K=L, L-2, \dots, -L} \pi_K, \quad \pi_K = \frac{1}{\sinh^2 \pi \mu} \frac{\mu \sinh 2\pi \mu}{K^2 + 4\mu^2} - \frac{\pi}{2 \sinh^2 \pi \mu} \delta_{K,0}, \quad (5.78)$$

Суммируя этот ряд, получаем следующее выражение

$$\Pi_L = -\frac{i}{4} \coth \pi \mu \left[ H_{-i\mu - \frac{L}{2} - 1} - H_{i\mu - \frac{L}{2} - 1} - H_{-i\mu + \frac{L}{2}} + H_{i\mu + \frac{L}{2}} \right] - \frac{\pi \delta_{L, \text{even}}}{2 \sinh^2 \pi \mu} \quad (5.79)$$

Как видно, есть неаналитический вклад при четных  $L$ . Если просуммировать их, то получится, что аномалия Кронекера зависит от  $\phi$

$$\delta \Pi(x, y) = \delta \Pi(\cos \phi) = -\frac{\pi}{2 \sinh^2 \pi \mu} \sum_k \frac{\sin(2k+1)\phi}{\sin \phi} = -\frac{\pi}{2 \sinh^2 \pi \mu} \frac{1}{\sin^2 \phi} \quad (5.80)$$

Значит ли это, что аналитическое продолжение от  $S^3$  до  $dS^3$  проблематично? А если мы будем адиабатически изменять массу,  $m^2$ , то получим изоэнтропийное изменение  $\langle a^2 \rangle$ ?

Как и в случае гармонического осциллятора, мы можем показать, что  $\Pi_0$  соответствует изменению массы при сохранении постоянной температуры или энтропии. Действительно,

$$G_\mu(\cos \phi) \approx \frac{1}{\phi} - \mu \coth \pi \mu + \mathcal{O}(\phi), \quad -\frac{\partial G_\mu(Z=1)}{\partial \mu^2} = \frac{\coth \pi \mu - \frac{\pi \mu}{\sinh^2 \pi \mu}}{2\mu} = \Pi_0 \quad (5.81)$$

С другой стороны, мы можем провести это вычисление в  $dS^3$  (что делается аналитическим продолжением  $\phi \rightarrow i\alpha$ ) с использованием техники Келдыша-Швингера

$$G_\mu(\cosh \alpha) = i \frac{\sinh \mu (\pi - i\alpha)}{\sinh \mu \pi \sinh \alpha},$$

$$-\frac{\partial G_\mu(Z=1)}{\partial \mu^2} = \int_0^\infty d\alpha \sinh^2 \alpha \operatorname{Im} [G_\mu^2(\cosh \alpha)] = \frac{\coth \pi \mu}{2\mu}, \quad (5.82)$$

, что равносильно  $\Pi_0$  без кронекеровского члена. Это означает, что если мы изменим  $\mu^2$  на  $dS_3$ , то вместо перехода в BD-вакуум мы спустимся в какой-то другой вакуум. Подчеркнем, что мы интегрировали по глобальному  $dS_3$  пространству. Поэтому этот результат неприменим для расширяющегося пятна Пуанкаре. Тем не менее, мы можем изучить статический участок де Ситтера [12], который снова связан с трехмерной сферой путем аналитического продолжения. Было бы интересно посмотреть, сможет ли такой неаналитический вклад в  $\Pi_L$  также связать разницу в изотермической и изэнтропической восприимчивостях. Это показывает, что квантовая теория поля, рассматриваемая в нечетном пространстве де Ситтера, не имеет никакого смысла — система очень чувствительна к способу ее подготовки. Любая малая адиабатическая деформация теории может изменить ее свойства.

### 5.6.1 Отсутствие аномалий Кронекера в пространствах де Ситтера четной размерности

Мы хотим обобщить предыдущее вычисление на  $S^2$ . Пропагатор на двумерной сфере имеет вид

$$G(Z) = \frac{\pi}{\cosh \pi \mu} P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(-Z) \quad (5.83)$$

А именно, нас интересует разложение функции собственной энергии  $\Pi(Z) = G(Z)^2$  как суммы по собственным функциям 2d-сферы

$$\Pi(Z) = \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1) P_L(Z) \Pi_L, \quad (5.84)$$

, где  $P_L(Z)$  - полиномы Лежандра. Используя ортогональность, мы можем извлечь коэффициенты

$$\Pi_L = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dZ \Pi(Z) P_L(Z), \quad (5.85)$$

этот интеграл можно переписать следующим образом. Сначала заметим, что у нас есть функция Лежандра  $Q$  целого индекса со следующим свойством

$$\text{Im } Q_n(x) = \frac{\pi}{2} P_n(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (5.86)$$

тогда уравнение. (5.85) имеет вид

$$\Pi_L = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 dZ \Pi(Z) \text{Im } Q_L(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dZ \Pi(Z) Q_L(Z), \quad (5.87)$$

где  $C$  окружает множество  $[-1, 1]$ , деформируем этот контур в  $C_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \{Z \in \mathbb{C}, |Z| = R\}$ . Поскольку  $\Pi(Z) Q_L(Z) \sim \frac{1}{Z^{L+2}}$  для  $L \geq 0$

$$\Pi_L = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} dZ \Pi(Z) Q_L(Z) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty dZ \text{Im } \Pi(Z) Q_L(Z), \quad (5.88)$$

, но теперь  $Q_L$  является гладкой функцией от  $L$ , а именно  $Q_L = Q_\nu e^{i\pi\nu}$ , то мы можем ввести следующую функцию

$$F(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty dZ \text{Im } \Pi(Z) Q_\nu(Z) e^{i\pi\nu}, \quad (5.89)$$

эта функция аналитическая и  $F(L) = \Pi_L$  для целого числа  $L$ . Мы можем проверить численно, что это хорошо согласуется с явным суммированием. Таким образом, для четных размерных квантовых теорий поля в пространствах де Ситтера аномалии Кронекера не существуют.

## 5.7 Лакуна де Ситтера

В этом разделе мы кратко обсудим возможные разрывы пропагатора как функции геодезического расстояния или интервала в фоне нетривиальной метрики. Наиболее простым примером такого фона снова является пространство де Ситтера. Очень хорошо известно, что в пространстве де Ситтера из-за внешней гравитации

нестабилен ин-вакуум. В этом можно убедиться, непосредственно вычислив скорость распада

$$\langle \text{out} | \text{in} \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^d x [\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2]}, \quad \frac{\partial \log \langle \text{out} | \text{in} \rangle}{\partial m^2} = \int d^d x \langle \text{out} | \phi^2(x) | \text{in} \rangle \quad (5.90)$$

Матричный элемент in-out может быть вычислен следующим образом. Например, в  $d = 2$  мы получили бы следующий in-out пропагатор

$$\langle \text{out} | \phi(x)\phi(y) | \text{in} \rangle = Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(Z), \quad \mu = \sqrt{m^2 - \frac{1}{4}}, \quad (5.91)$$

где  $Z$  - геодезическое расстояние между этими двумя точками  $x$  и  $y$  в пространстве де Ситтера. Тогда мнимая часть статсуммы есть

$$\text{Im} \left[ \frac{\partial \log \langle \text{out} | \text{in} \rangle}{\partial \mu^2} \right] = \pi \tanh \pi \mu V_{dS}, \quad (5.92)$$

что говорит о том, что входы и выходы в пространстве де Ситтера ортогональны друг другу. Поэтому можно ожидать, что если включить взаимодействие, то ин-состояние распадется до аут-состояния. Было бы интересно понять, как пропагатор in-in трансформируется в пропагатор out-out. В 2d пропагатор in-in может быть получен аналитическим продолжением из сферы

$$G_{\text{in/in}}(Z) = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{(2L+1)P_L(Z)}{L(L+1)+m^2} = \frac{\pi}{\cosh \pi \mu} P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(-Z), \quad (5.93)$$

, а пропагатор out-out не может быть вычислен каким-либо аналитическим продолжением. Тем не менее, мы можем записать выражение для пропагатора out-out в терминах мод

$$G_{\text{out/out}}(Z) = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ipx} J_{i\mu}(p\eta) J_{-i\mu}(p\eta), \quad (5.94)$$

Мы видим, что произведение двух функций Бесселя,  $J_{i\mu}(p\eta) J_{-i\mu}(p\eta)$  является целой функцией импульса  $p$ . Тогда, если  $|x| > 2\eta$  мы можем послать контур интегрирования на бесконечность

$$\int \frac{dp}{2\pi} e^{ipx} J_{i\mu}(p\eta) J_{-i\mu}(p\eta) = 0, \quad |x| > 2\eta \quad \Rightarrow \quad G_{\text{out/out}}(Z) = \theta(Z+1)D(Z) \quad (5.95)$$

Подставляя это предположение в уравнение для пропагатора, мы видим, что  $D(Z)$  должно удовлетворять тому же уравнению для массивного скалярного поля в пространстве де Ситтера. А поскольку  $G_{\text{out/out}}(Z)$  не имеет сингулярностей в точке  $Z = -1$ , то имеем

$$G_{\text{out/out}}^{d=2}(Z) = \theta(Z+1)G_{\text{in/in}}^{d=2}(Z), \quad (5.96)$$

Мы можем найти аналогичные формулы в более высоких измерениях

$$G_{\text{out/out}}^{d=2k+2}(Z) = \frac{d^k}{dZ^k} G_{\text{out/out}}^{d=2}(Z) = \theta(Z+1)G_{\text{in/in}}^{d=2k+2}(Z) + C_1\delta(Z+1) + C_2\delta'(Z+1) + \dots$$

В случае нечетных измерений ситуация несколько более странная. Во-первых, пропагатор in-out не содержит мнимых вкладов, и поэтому состояние in не может распадаться на состояние out [11]. Во-вторых, пропагатор out-out был бы другим

$$\begin{aligned} G_{\text{out/out}}(Z) &= \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} e^{ipx} J_{i\mu}(p\eta) J_{-i\mu}(p\eta) = \\ &= \int \frac{pdpd \cos \theta_p}{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} e^{i\mu(\theta-\theta')} e^{ip[x \cos \theta_p + \eta \cos(\theta-\theta_p) + \eta \cos(\theta'-\theta_p)]}, \end{aligned} \quad (5.97)$$

Отсюда видно, что при  $|x| > 2\eta$  этот интеграл равен нулю. Для  $|x| < 2\eta$  мы можем вычислить этот интеграл

$$G_{\text{out/out}}^{d=3}(Z) = \theta(Z+1) \frac{e^{i\mu\theta}}{\sinh \theta} = \theta(Z+1)G_{\text{in/out}}(Z), \quad (5.98)$$

что резко отличается от поведения в четных измерениях. Опять же в высших измерениях

$$G_{\text{out/out}}^{d=2k+3}(Z) = \frac{d^k}{dZ^k} G_{\text{out/out}}^{d=3}(Z) = \theta(Z+1)G_{\text{in/out}}^{d=2k+3}(Z) + C_1\delta(Z+1) + \dots \quad (5.99)$$

# Глава 6

## Квантовые симметрия и АдС/КТП соответствие

### 6.1 Введение

В квантовой гравитации все должно быть квантовым, включая пространство-время. Понятие квантового пространства-времени описывается некоммутативной геометрией, т.е. геометрией, координаты которой не коммутируют друг с другом. Примеры таких пространств появились в нескольких областях теоретической физики, включая теорию струн [272], матричные модели [74] и квантовой теории поля на некоммутативных пространствах [144, 146, 145, 19].

Недавно некоммутативная геометрия проявилась в модели SYK с двойным масштабированием [39, 37, 38, 220] в контексте дуальных моделей. Предел двойного масштабирования - это предел, в котором число фермионов  $N$  и порядок фермионного взаимодействия в гамильтониане SYK  $p$  бесконечны, но их отношение конечно  $\lambda \equiv 2p^2/N$  [75]. Возникающая дуальная теория описывается в терминах хорд, закрепленных на границе пространства [39, 37, 237]. Эти хорды дают необычную, примитивную версию пространства-времени, где расстояния в объеме измеряются в единицах  $\lambda$ , эффективной планковской длины в объеме (или отношения между планковским и AdS масштабами). Гладкое пространство-время возникает в малом  $\lambda$  пределе, в котором число хорд разрастается и возникает гладкое пространство-время.

При конечной температуре DSSYK алгебра симметрии пространства-времени является подалгеброй  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$  [220]. "Квантовый" аспект алгебры заключается в

наличии нетривиального копродукта. Действие инфинитезимального генератора на элементах тензорного произведения модулей  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$   $f \otimes g$  не удовлетворяет правилу Лейбница, а имеет "хвост"

$$E[f \otimes g] = E[f] \otimes g + K[f] \otimes E[g], \quad (6.1)$$

где  $E, K \in U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$ . Дискретность хордового пространства-времени тесно связана с этой структурой.

Удивительно, но этот нетривиальный копродукт присутствует в пределе  $\lambda \rightarrow 0$  при конечной температуре, известном как большой  $p$  предел SYK. Как показано в [220], функция двух точек в этом режиме не является конформной, однако она связана с конформным коррелятором через преобразование координат двух точек:

$$\cos^{-2\Delta} \left[ \frac{\pi v}{2} \left( 1 - \frac{\theta_+ - \theta_-}{\pi} \right) \right] = \sin^{-2\Delta} \left[ \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2} \right], \quad (6.2)$$

где  $\varphi_{\pm} = \pm \frac{\pi}{2} + v \left( \theta_{\pm} \mp \frac{\pi}{2} \right)$ . Координаты  $\varphi_{\pm}$  - это координаты на "фальшивом диске", длина границы которого равна  $\beta/v$ . Координаты фальшивого диска позволяют явно увидеть симметрию  $SU(1, 1)$ . Например, она инвариантна под действием  $E[\mathcal{O}] \equiv \cos \varphi \partial_{\varphi} \mathcal{O} - \Delta \sin \varphi \mathcal{O}$ . Если выразить эту симметрию в терминах физических дисковых координат  $\theta_{\pm}$ , то генератор  $E$  должен будет действовать по-разному на  $\mathcal{O}(\theta_+)$  и  $\mathcal{O}(\theta_-)$  из-за асимметрии в преобразовании между  $\varphi_{\pm}$  и  $\theta_{\pm}$ . Однако эту асимметрию можно компенсировать, приписав действию  $E$  нетривиальный копродукт, введя еще один оператор  $P$ , действие которого в терминах физических координат имеет вид

$$E[\mathcal{O}(\theta_+) \mathcal{O}(\theta_-)] = E[\mathcal{O}(\theta_+)] \mathcal{O}(\theta_-) + P[\mathcal{O}(\theta_+)] P \cdot E[\mathcal{O}(\theta_-)], \quad (6.3)$$

где

$$E[\mathcal{O}(\theta)] \equiv v^{-1} \cos \left[ \frac{\pi}{2} + v \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \right] \partial_{\theta} \mathcal{O}(\theta) - \Delta \sin \left[ \frac{\pi}{2} + v \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \right] \mathcal{O}(\theta), \quad (6.4)$$

$$P[\mathcal{O}(\theta)] \equiv \mathcal{O}(\theta - \pi(1 - v)/v). \quad (6.5)$$

Эти наблюдения мотивируют изучение примеров с нетривиальным копроизведением, и поэтому данная глава посвящена квантовому диску. В данной работе будет проанализирована структура голографии на некоммутативной версии гиперболического диска, также известной как квантовый диск, который был подробно изучен Л. Ваксманом [284, 275, 274, 278, 276, 277]. Это некоммутативное пространство-время, группа симметрии которого имеет вид  $SU_q(1, 1)$ .



Эта тема настолько сложная, что мы сочли необходимым посвятить значительную часть данной главы обзору фундаментальных работ Л. Ваксмана по квантовому диску. Таким образом, раздел 6.2 представляет собой педагогический обзор работы [284, 275, 274, 278, 276, 277], описывающий, как определить квантовый диск и его квантовую группу симметрии. В разделе 6.3 мы описываем механику голографии, вычисляем корреляционные функции и индуцированные квантовые симметричные преобразования граничных первичных операторов. В разделе 6.4 мы изучаем аспекты симметрии предполагаемой граничной теории квантового диска. Мы вычисляем трехточечную функцию примарных операторов, используя квантовые симметрии, и потом сопоставляем данное вычисление с явным вычислением диаграммы Виттена.

## 6.2 Обзор квантового диска

В этом разделе мы описываем, как определить квантовый диск [284, 275, 274, 278, 276, 277],  $q$ -деформированную версию гиперболического диска, как пространство, чья группа симметрии является квантовой группой  $SU_q(1, 1)$  [201, 183, 299, 235]. Координаты на квантовом диске будут некоммутативными - свойство, вытекающее из некоммутативности матричных элементов элементов группы  $SU_q(1, 1)$ . Мы не будем описывать внутреннюю геометрическую структуру квантового диска, а сосредоточимся на свойствах функций его координат.

### 6.2.1 $SU_q(1, 1)$ : группа симметрии квантового диска

Чтобы понять группу симметрии квантового диска  $SU_q(1, 1)$ , мы начнем с квантовой деформации  $SL(2, \mathbb{C})$ , называемой  $SL_q(2)$ . Элементами  $SL_q(2)$  являются все  $2 \times 2$  матрицы, элементы которых удовлетворяют следующим соотношениям

$$SL_q(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} ab = qba, \quad bd = qdb, \quad ad = da + (q - q^{-1})cb \\ ac = qca, \quad cd = qdc, \quad bc = cb, \quad ad - qbc = 1 \end{array} \right\}, \quad (6.6)$$

Комбинация  $\det_q \equiv ad - qbc$  называется квантовым определителем и принадлежит центру алгебры  $a, b, c, d$ . Без условия  $\det_q = 1$ , (6.6) определяет  $GL_q(2)$ . Приведенные выше соотношения порождают идеал и определяются решением  $R$ -матричного уравнения (6.159). Мы описываем эту конструкцию в 6.6.

Уравнение (6.6) дает представление  $SL_q(2)$  [107]. Иногда такое представление называют “координатным представлением”, поскольку элементы матрицы определяют координаты, параметризующие элементы группы на групповом многообразии. Как и обычные группы, эта группа включает единицу  $e$ , где  $a = d = 1, b = c = 0$ , которые удовлетворяют соотношениям (6.6). Таким образом, можно определить отображение  $\epsilon$ , переводящую любой элемент группы  $g \in SL_q(2)$  в единицу. Она известна как ко-единица  $\epsilon(g) = e$ .

Мы можем определить обратный элемент как

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -q^{-1}b \\ -qc & a \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Формально мы имеем  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ . Отображение элемента группы в его обратный элемент называется антипод  $S : g \rightarrow g^{-1}$ . Так мы имеем

$$S(a) = d, \quad S(b) = -q^{-1}b, \quad S(c) = -qc, \quad S(d) = a. \quad (6.8)$$

Групповое умножение можно определить и для  $SL_q(2)$ . Это отображение из матричных элементов пары групповых элементов  $g_1$  и  $g_2$  в их произведение  $g_1 g_2$  таким образом, чтобы сохранялся идеал (6.6). Чтобы определить это произведение, сначала нужно представить себе, что матричные элементы  $a, b, c, d$  являются просто функциями на групповом многообразии, которые присваивают значение (абстрактно) каждому групповому элементу, то есть матричные элементы группового элемента  $g$  - это  $a(g), b(g), c(g), d(g)$ . Тогда умножение можно определить как отображение  $\hat{\times}$ , переводящее матричные элементы двух групповых элементов в матричные элементы произведения этих элементов

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a(g_1) & b(g_1) \\ c(g_1) & d(g_1) \end{pmatrix} \hat{\times} \begin{pmatrix} a(g_2) & b(g_2) \\ c(g_2) & d(g_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(g_1) \otimes a(g_2) + b(g_1) \otimes c(g_2) & a(g_1) \otimes b(g_2) + b(g_1) \otimes d(g_2) \\ c(g_1) \otimes a(g_2) + d(g_1) \otimes c(g_2) & c(g_1) \otimes b(g_2) + d(g_1) \otimes d(g_2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a(g_1 g_2) & b(g_1 g_2) \\ c(g_1 g_2) & d(g_1 g_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Таким образом, мы отобразили функции матричных элементов  $a, b, c, d$  на функции, действующие на двух копиях группового многообразия. Эта операция отображения функций на одной копии пространства в функции на двух копиях называется ко-

произведением и обозначается  $\Delta(\cdot)$ . Для  $SL_q(2)$  имеем,

$$\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c, \quad (6.10)$$

$$\Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d, \quad (6.11)$$

$$\Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c, \quad (6.12)$$

$$\Delta(d) = c \otimes b + d \otimes d. \quad (6.13)$$

копроизведение является гомоморфизмом алгебры.

Часто возникает интерес к определению функций на групповом многообразии. Это пространство функций является векторным пространством, составленным мономами  $a^i b^j c^k d^l$  с целыми степенями, и обозначается  $\mathcal{O}(SL_q(2))$ . Понятия **коединица**, **антипод** и **копроизведения** обобщаются на эту алгебру очевидным образом. Коединица действует таким образом  $\epsilon : \mathcal{O}(SL_q(2)) \rightarrow \mathbb{C}$ , а копроизведение действует таким образом  $\Delta : \mathcal{O}(SL_q(2)) \rightarrow \mathcal{O}(SL_q(2)) \otimes \mathcal{O}(SL_q(2))$ . Мы можем ввести “обратные” отображения, совместимые с этими отображениями. Эти отображения определяются как **единица**, которая отображает константу на элемент тождества алгебры  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}(SL_q(2))$  (она также отображает константу на тождество группы  $SL_q(2)$ ), и умножение, называемое **произведением**, которое отображает тензорное произведение двух копий  $m : \mathcal{O}(SL_q(2)) \otimes \mathcal{O}(SL_q(2)) \rightarrow \mathcal{O}(SL_q(2))$ , действующее как  $m(a \otimes b) = ab$ . Эти структуры вместе образуют  $\mathcal{O}(SL_q(2))$  **алгеброй Хопфа**.

Чтобы получить  $SU_q(1, 1)$ , нам нужно наложить условия действительности на  $SL_q(2)$ . Для  $q = 1$  оба являются преобразованиями Мёбиуса на комплексной плоскости, но  $SU(1, 1)$  сохраняет единичный диск. Определение комплексного сопряжения превращает  $\mathcal{O}(SL_q(2))$  в **\*-алгебру Хопфа** с инволюцией  $*$ , удовлетворяющей  $(ab)^* \rightarrow b^* a^*$ . Условием реальности для  $SU_q(1, 1)$  является  $g^* = \eta S(g) \eta$ , где  $\eta = \text{diag}\{1, -1\}$  и т.д.

$$\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & q^{-1}b \\ qc & a \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

Это определяет сопряжение для всех элементов в  $\mathcal{O}(SU_q(1, 1))$ .

## 6.2.2 $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$ : генераторы из $SU_q(1, 1)$

На групповом многообразии  $SU_q(1, 1)$  можно определить набор генераторов, формально реализующих инфинитезимальное действие группы. Эти генераторы

обычно обозначаются  $K, E, F$  и удовлетворяют алгебре, известной как  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$  (точнее, это векторное пространство, образованное всеми многочленами из  $K, E, F$ ). Их действие на элементы  $SU_q(1, 1)$  определяется через следующее спаривание

$$q^{-1}\langle K, a \rangle = q\langle K, d \rangle = q^{-1/2}\langle E, c \rangle = q^{1/2}\langle F, b \rangle = 1, \quad (6.15)$$

Следовательно, на элементе группы мы имеем

$$\langle K, g \rangle = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}, \quad \langle E, g \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle F, g \rangle = \begin{pmatrix} 0 & q^{-1/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

Это спаривание распространяется на все элементы  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$  и  $\mathcal{O}(SU_q(1, 1))$  и устанавливает двойственность между этими двумя алгебрами. Для этого оно должно удовлетворять ряду условий (см. приложение (6.5)).

Одно из условий состоит в том, что оно должно соблюдать соотношения, определяющие алгебру (6.6) после того, как действие будет распространено на все элементы  $\mathcal{O}(SU_q(1, 1))$ . Например, мы должны иметь  $\langle E, ac \rangle = q\langle E, ca \rangle$ . Существует несколько способов расширить спаривание, один из которых состоит в том, чтобы наложить следующее условие

$$\langle K, AB \rangle = \langle K, A \rangle \langle K, B \rangle, \quad (6.17)$$

$$\langle E, AB \rangle = \langle E, A \rangle \langle 1, B \rangle + \langle K, A \rangle \langle E, B \rangle, \quad (6.18)$$

$$\langle F, AB \rangle = \langle F, A \rangle \langle K^{-1}, B \rangle + \langle 1, A \rangle \langle F, B \rangle, \quad (6.19)$$

для любого  $A, B \in \mathcal{O}(SL_q(2))$ . Спаривание с единицей должно реализовать коединицу,  $\langle 1, B \rangle = \epsilon(B)$ . Эти отношения дают нам копроизведение для  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$

$$\Delta(K) = K \otimes K, \quad (6.20)$$

$$\Delta(E) = E \otimes 1 + K \otimes E, \quad (6.21)$$

$$\Delta(F) = F \otimes K^{-1} + 1 \otimes F, \quad (6.22)$$

при условии, что спаривание удовлетворяет

$$\langle X \otimes Y, A \otimes B \rangle = \langle X, A \rangle \langle Y, B \rangle, \quad (6.23)$$

, где  $X, Y \in U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$ . В результате можно показать, что спаривание удовлетворяет

$$\langle \Delta(XY), A \otimes B \rangle = \langle X \otimes Y, \Delta(AB) \rangle. \quad (6.24)$$

Мы можем найти  $*$ -инволюцию при условии, что при спаривании мы имеем

$$\langle X^*, A \rangle = \langle X, S(A)^* \rangle^*. \quad (6.25)$$

Использование копроизведения из  $K, E, F$ , антипода (6.8) и инволюции (6.14), дает нам следующую инволюцию

$$K^* = K, \quad E^* = -KF, \quad F^* = -EK^{-1}. \quad (6.26)$$

Дополнительные условия на спаривание могут быть использованы для определения **единицы, коединицы, антипода, произведения** для алгебры  $K, E, F$ , что делает ее  $*$ -алгеброй Хопфа. Мы рассматриваем эти дополнительные структуры в разделе 6.5.2. До сих пор мы установили двойственность между двумя  $*$ -алгебрами Хопфа  $\mathcal{O}(SU_q(1, 1))$  и свободно порожденной алгеброй из  $K, E, F$ . Поэтому заметим, спаривание (6.15) не является точным и имеет ядро, порожденное отношениями, или **идеалами**, между  $K, E, F$ ,

$$KE = q^2EK, \quad KF = q^{-2}FK, \quad EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}. \quad (6.27)$$

Вывод этого ядра можно найти в разделе 6.5.2. Если мы наложим эти условия на алгебру  $K, E, F$ , то мы определим алгебру  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$ . Из нее можно найти элемент Казимира, коммутирующего с генераторами

$$C_q = EF + \frac{q^{-1}(K - 1) + q(K^{-1} - 1)}{(q^{-1} - q)^2}. \quad (6.28)$$

Действие Казимира на тензорном произведении двух представлениях вытекает из копроизведения генераторов и дается следующим образом

$$\Delta(C_q) = C_q \otimes K^{-1} + K \otimes C_q + E \otimes F + KF \otimes EK^{-1} - \frac{(q^{-1} + q)(K - 1) \otimes (K^{-1} - 1)}{(q - q^{-1})^2}. \quad (6.29)$$

### 6.2.3 Координаты на квантовом диске и их алгебра

Определив группу симметрии квантового диска и связанные с ней генераторы, перейдем к определению самого квантового диска. Напомним, что стандартный гиперболический диск может быть получен из стандартного  $SL_2(\mathbb{R})$  группового многообразия [191]. Аналогично, как обсуждалось в [278], квантовый диск может быть

определен как множество элементов группы  $SU_q(1, 1)$  эквивалентных по правому действию  $K$ ,

$$SU_q(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} t_{11}t_{12} = qt_{12}t_{11}, \quad t_{12}t_{22} = qt_{22}t_{12}, \quad t_{11}t_{21} = qt_{21}t_{11}, \quad t_{21}t_{22} = qt_{22}t_{21}, \\ t_{12}t_{21} = t_{21}t_{12}, \quad t_{11}t_{22} = t_{22}t_{11} + (q - q^{-1})t_{21}t_{12}, \quad t_{11}t_{22} - qt_{12}t_{21} = 1, \end{array} \right. \right\}$$

$$\mathbb{D}_q = SU_q(1, 1)/K. \quad (6.30)$$

Действие  $SU_q(1, 1)$  на диске соответствует левому умножению матриц  $t' = g \times t$ , которое можно представить в следующем виде

$$t_{11} \rightarrow t'_{11} = a \otimes t_{11} + b \otimes t_{21}, \quad (6.31)$$

$$t_{12} \rightarrow t'_{12} = a \otimes t_{12} + b \otimes t_{22}, \quad (6.32)$$

$$t_{21} \rightarrow t'_{21} = c \otimes t_{11} + d \otimes t_{21}, \quad (6.33)$$

$$t_{22} \rightarrow t'_{22} = c \otimes t_{12} + d \otimes t_{22}. \quad (6.34)$$

Параметры  $t'_{ij}$  имеют ту же алгебру, что и  $t_{ij}$ . Позже будет полезно отметить, что  $\det_q(t') = \det_q(g \otimes t) = \det_q g \otimes \det_q t$ , где  $\det_q t = t_{11}t_{22} - qt_{12}t_{21}$ .

Полезно проанализировать действие генераторов на  $t_{ij}$ . Действие генераторов на  $t_{ij}$  получается с помощью (6.16)

$$K(t_{11}) = qt_{11}, \quad K(t_{12}) = qt_{12}, \quad K(t_{21}) = q^{-1}t_{21}, \quad K(t_{22}) = q^{-1}t_{22}, \quad (6.35)$$

$$E(t_{11}) = 0, \quad E(t_{12}) = 0, \quad E(t_{21}) = q^{1/2}t_{11}, \quad E(t_{22}) = q^{1/2}t_{12}, \quad (6.36)$$

$$F(t_{11}) = q^{-1/2}t_{21}, \quad F(t_{12}) = q^{-1/2}t_{22}, \quad F(t_{21}) = 0, \quad F(t_{22}) = 0. \quad (6.37)$$

Чтобы получить действие  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  на произвольных мономах  $t_{ij}$ , мы следуем тем же правилам, что и при сопряжении в предыдущем разделе. Тогда **копроизведение** реализует действие на мономах  $t_{ij}$ .

## Дисковые координаты

Определив координаты диска  $z = q^{-1}t_{21}^{-1}t_{11}$ ,  $z^* = t_{22}t_{12}^{-1}$ , которые действительно инвариантны под действием  $K$ . Применив \*-инволюцию  $SU_q(1, 1)$   $t_{11}^* = t_{22}$ ,  $t_{12}^* = qt_{21}$ , мы можем найти, что  $(z)^* = z^*$ . Это также следует из (6.14). Согласно приведенным выше правилам преобразований для  $t_{ij}$  под действием квантовой группы, мы имеем

$$\begin{aligned} z \rightarrow w &= q^{-1}t_{21}'^{-1}t_{11}' = (c \otimes t_{11} + d \otimes t_{21})^{-1}(a \otimes t_{11} + b \otimes t_{21}) \\ &= q^{-1}(qcz + d)^{-1}(qaz + b), \end{aligned} \quad (6.38)$$

что является обычным преобразованием Мёбиуса. Символ тензорного произведения был опущен из последнего уравнения для краткости. В качестве проверки можно показать, что это отображение сохраняет границу; предположим, что  $w, w^*$  строится из матрицы  $t'$  так же, как  $z, z^*$  строится из  $t$ . Граничные точки в  $z$  соответствуют  $zz^* = 1$ , которые удовлетворяют  $\det_q t = 0$ , из чего следует, что  $\det_q t' = 0$  и, следовательно,  $ww^* = 1$ .<sup>1</sup>

Действие генераторов на  $z, z^*$  может быть выведено из их действия на  $t_{ij}$  и с помощью копроизведения, что дает

$$K(z) = q^2 z, \quad E(z) = -q^{5/2} z^2, \quad F(z) = q^{-3/2}, \quad (6.39)$$

$$K(z^*) = q^{-2} z^*, \quad E(z^*) = q^{1/2}, \quad F(z^*) = -q^{1/2} z^{*2}. \quad (6.40)$$

Опять же, по копроизведению мы можем распространить это действие на любые полиномы  $z, z^*$ . Для “(анти)голоморфных” функций имеем

$$K(g(z)) = g(q^2 z), \quad E(g(z)) = -q^{5/2} z^2 \frac{g(z) - g(q^2 z)}{z - q^2 z}, \quad F(g(z)) = q^{-3/2} \frac{g(z) - g(q^{-2} z)}{z - q^{-2} z}, \quad (6.41)$$

$$K(g(z^*)) = g(q^{-2} z^*), \quad E(g(z^*)) = q^{1/2} \frac{g(z^*) - g(q^{-2} z^*)}{z^* - q^2 z^*}, \quad F(g(z)) = -q^{1/2} z^{*2} \frac{g(z^*) - g(q^2 z^*)}{z^* - q^2 z^*}. \quad (6.42)$$

Квантовый диск обладает интересным свойством некоммутативности, а именно тем, что  $z, z^*$  не коммутируют, что вытекает из некоммутативности матричных элементов (6.30). Начиная с  $t_{11}t_{22} = t_{22}t_{11} + (q - q^{-1})t_{21}t_{12}$ , мы можем умножить справа (слева) на  $t_{21}^{-1}(t_{12}^{-1})$  соответственно, а затем использовать оставшиеся соотношения в (6.30) что дает

$$z^* z = q^2 z z^* + 1 - q^2. \quad (6.43)$$

Это соотношение также может быть получено с помощью  $R$ -матричных методов. Как обсуждалось в приложении 6.6, универсальная  $R$ -матрица для  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$  дана в виде

$$\check{R}(\cdot) = \exp_{q^2} \left( (q^{-1} - q)F \otimes E \right) q^{-\frac{H \otimes H}{2}}(\cdot), \quad (6.44)$$

---

<sup>1</sup>Поскольку диск, классический или квантовый, является строго открытым множеством, он не включает в себя границу, и поэтому  $\det_q$  разрешается становится нулевым на границе

которая, в частности, дает

$$z^*z = m\check{R}(z \otimes z^*) = q^2zz^* + 1 - q^2, \quad (6.45)$$

где  $m$  просто "убирает" символ тензорного произведения <sup>2</sup>.

Алгебра  $z, z^*$  обозначается как  $\mathbb{C}_q[z, z^*]$ . Важным элементом этой алгебры является элемент  $y = 1 - zz^*$ , удовлетворяющий следующим коммутационным соотношениям.

$$zy = q^{-2}yz, \quad z^*y = q^2yz^*. \quad (6.46)$$

Заметим, что существует связь  $\mathbb{C}_q[z, z^*]$  с  $q$ -деформированным гармоническим осциллятором. Так, заметим, что

$$\hat{a} = \frac{z}{\sqrt{1 - q^2}}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{z^*}{\sqrt{1 - q^2}}, \quad \hat{a}^\dagger \hat{a} - q^2 \hat{a} \hat{a}^\dagger = 1, \quad (6.47)$$

таким образом, любой элемент  $f \in \mathbb{C}_q[z, z^*]$  можно рассматривать как оператор, действующий в гильбертовом пространстве  $q$ -деформированного гармонического осциллятора. Это гильбертово пространство генерируется векторами  $|n\rangle, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ , а действие задается

$$z|n\rangle = |n+1\rangle, \quad z^*|n\rangle = (1 - q^{2n})|n-1\rangle, \quad y|n\rangle = q^{2n}|n\rangle, \quad (6.48)$$

можно показать, что это отображение на самом деле является изоморфизмом и любая функция  $\psi(y)$  из  $y$  может быть дана просто путем задания значений из  $\psi(q^{2n})$ . В некотором свободном смысле квантовый диск - это набор концентрических окружностей дискретных радиусов постоянных  $y$ , которые накапливаются до единичной окружности.

## $q$ - Дифференциальное Исчисление

Различные понятия дифференциального исчисления могут быть распространены на некоммутативные аналоги. Можно определить понятие дифференциального оператора  $d$ , удовлетворяющего обычному правилу Лейбница  $dz^2 = zdz + dz z$ . Дифференциальная форма  $dz$  удовлетворяет условию  $d(dz) = 0$ , что следует из равенства  $d^2 = 0$ . Аналогично следует действие на  $z^*$ .

---

<sup>2</sup>Структуру алгебры тензорных произведений двух алгебр  $A_{1,2}$  мы определяем как  $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$



Действие генераторов из  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$  на дифференциалах следует из правила Лейбница

$$K(dz) = q^2 dz, \quad E(dz) = -q^{5/2} dz z (1 + q^{-2}), \quad F(dz) = 0, \quad (6.49)$$

$$K(dz^*) = q^{-2} dz^*, \quad E(dz^*) = 0, \quad F(dz^*) = -q^{1/2} dz^* z^* (1 + q^2). \quad (6.50)$$

Алгебра между  $dz, dz^*, z, z^*$  можно вывести, используя  $R$ -матрицу в (6.44)

$$z dz = q^{-2} dz z, \quad z^* dz^* = q^2 dz^* z^*, \quad (6.51)$$

$$z dz^* = q^{-2} dz^* z, \quad z^* dz = q^2 dz z^*. \quad (6.52)$$

Дифференциалы позволяют определить дифференциальные операторы, действующие на любую функцию  $h(z, z^*)$  на квантовом диске через

$$\begin{aligned} dh(z, z^*) &= dz \frac{1}{q^{-2}z - z} (h(q^{-2}z, z^*) - h(z, z^*)) + dz^* (h(q^{-2}z, z^*) - h(q^{-2}z, q^2 z^*)) \frac{1}{z^* - q^2 z^*} \\ &\equiv dz \frac{\partial h}{\partial z} + dz^* \frac{\partial h}{\partial z^*}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Это определяет производные  $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z^*}$ . Голоморфные и антиголоморфные дифференциалы могут быть определены как  $\partial h = dz \frac{\partial h}{\partial z}, \bar{\partial} h = dz^* \frac{\partial h}{\partial z^*}$ . Это означает, что мы имеем  $d = \partial + \bar{\partial}$ . Нетрудно проверить, что эти производные удовлетворяют следующей алгебре

$$\frac{\partial}{\partial z} z^* = q^2 z^* \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial z^*} z = q^{-2} z \frac{\partial}{\partial z^*}, \quad (6.54)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} z = 1 + q^{-2} z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial z^*} z^* = 1 + q^2 z^* \frac{\partial}{\partial z^*}. \quad (6.55)$$

Элемент Казимир может быть выражен в терминах этих производных. Используя формулу для элемента Казимира (6.28) и (6.29), находим

$$C_q = q^{-1} (1 - z z^*)^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z^*}. \quad (6.56)$$

В разделе (6.7) мы проверяем, что обе стороны этого уравнения имеют одинаковое действие на любой моном  $z^n z^{*m}$ .

Далее мы определим, как интегрировать по всему квантовому диску. Такой интеграл можно представить как отображение функций на квантовом диске в комплексные числа. Если предположить, что у нас есть мера  $d\nu$ , инвариантная под действием генераторов  $E, F, K$ , то для любой функции мы должны иметь

$$\int_{\mathbb{D}_q} d\nu E^m F^n h(z, z^*) = \int_{\mathbb{D}_q} d\nu (K^l - 1) h(z, z^*) = 0, \quad (6.57)$$

для любых  $m, n, l > 0$ . Теперь предположим, что мы хотим вычислить интеграл от произвольной функции  $h(z, z^*)$ . Любую такую функцию можно представить в виде

$$h(z, z^*) = \sum_{k>0} h_k(y)z^k + h_0(y) + \sum_{k>0} h_{-k}(y)z^{*k}. \quad (6.58)$$

Заметим, что члены с дополнительными коэффициентами  $z, z^*$ , то есть первый и третий члены в разложении, не инвариантны под действием  $K$ , а значит, их интеграл должен исчезнуть. Остается только

$$\int_{\mathbb{D}_q} d\nu h(z, z^*) = \int_{\mathbb{D}_q} d\nu h_0(y), \quad (6.59)$$

, то есть интеграл чисто радиальной функции. Есть два способа сделать это формальное выражение более явным. Первый - отметить, что спектр  $y$  задается дискретными значениями  $q^{2n}$  для всех  $n \geq 0$ , и, следовательно, этот интеграл может быть выражен как линейная сумма по  $h_0$ , а именно

$$\int_{\mathbb{D}_q} d\nu h_0(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_0(q^{2n}), \quad (6.60)$$

где коэффициент  $a_n$  нужно найти из условий инвариантности интеграла. Это можно сделать, рассмотрев интеграл от  $F$ , действующий на элемент вида  $zh_0(y)$ . Поскольку

$$F(zh_0(y)) = q^{-3/2}h_0(y) - q^{1/2}(1-y)\frac{h_0(q^{-2}y) - h_0(y)}{1-q^2}. \quad (6.61)$$

Интеграл от первого и второго членов правой части должен исчезать, поэтому мы получаем рекуррентное соотношение

$$a_n = \frac{1}{q^{-2} - 1} ((1 - q^{2(n+1)})a_{n+1} - (1 - q^{2n})a_n), \quad a_n = q^{-2n}a_0. \quad (6.62)$$

Значение  $a_0$  не определено. Однако если мы выберем  $a_0 = \pi(1 - q^2)$ , то воспроизведем стандартный интеграл по классическому гиперболическому диску в пределе  $q \rightarrow 1$ , что мы покажем ниже.

Есть более интуитивный, но менее точный способ прийти к этому результату. Сначала нам нужно найти меру этого интеграла, инвариантную по действию  $K, E, F$ . Одной из таких мер является следующая двумерная форма

$$\epsilon = -2iy^{-2}dz \wedge dz^*. \quad (6.63)$$

Заметим, что из (6.52) следует  $dz \wedge dz^* = -q^{-2}dz^* \wedge dz$ .<sup>3</sup> Тогда можно "убедиться" что

$$\int_{\mathbb{D}_q} d\nu = \alpha \int y^{-2} d_{q^2}y, \quad (6.64)$$

где  $\alpha$  - некоторая постоянная, а мера  $d_{q^2}y$  обозначает интеграл Джексона, то есть мы интегрируем вдоль  $y$ , но дискретными шагами, задаваемыми разностью  $y$  в двух последовательных точках, то есть  $d_{q^{-2}}y = (q^{2n} - q^{2(n+1)})$ . Тогда имеем

$$\int_{\mathbb{D}_q} d\nu h_0(y) = k \sum_{n=0}^{\infty} h_0(q^{2n}) q^{-4n} (q^{2n} - q^{2(n+1)}) = k(1 - q^2) \sum_{n=0}^{\infty} h_0(q^{2n}) q^{-2n}. \quad (6.65)$$

Это согласуется с (6.60).

Дополнительное интересное представление этого интеграла использует представление (6.48), для которого заметим, что

$$\int_{\mathbb{D}_q} d\nu h(z, z^*) = (1 - q^2) \sum_n \langle n | h(z, z^*) | n \rangle q^{-2n} = \text{tr} \left[ h(z, z^*) \frac{1}{1 - z^*z} \right], \quad (6.66)$$

такое представление позволяет эффективно вычислять интегралы на квантовом диске.

В качестве проверки мы можем сравнить это с выражением для классического гиперболического диска, взяв  $q \rightarrow 1$ . Тогда имеем  $r^2 = |z|^2 = 1 - y = 1 - q^{2n}$ , а значит и  $q^{2n} - q^{2(n+1)} \approx 2rdr$  и получаем

$$\pi(1 - q^2) \sum_{n=0}^{\infty} h_0(q^{2n}) q^{-2n} = \pi \int h_0(1 - r^2) \frac{2rdr}{(1 - r^2)^2}, \quad (6.67)$$

что действительно является радиальным интегралом по гиперболическому диску.

Наконец, мы обсудим два полезных соотношения, которые можно использовать при вычислении интегралов. Первое - это интегрирование по частям, которое можно выразить как

$$\int_{\mathbb{D}_q} d\nu E h(z, z^*) f(z, z^*) = - \int_{\mathbb{D}_q} d\nu K h(z, z^*) E f(z, z^*), \quad (6.68)$$

которое использует действие  $E$  на произведение двух функций через копроизведение и инвариантность интеграла относительно этого действия  $E$ . Второе - понятие дельта-функции, которая может быть определена как элемент  $\delta_{z, \xi} \in \mathbb{C}_q[z, z^*] \otimes \mathbb{C}_q[\xi, \xi^*]$ , удовлетворяющий

$$f(z, z^*) = \int d\nu_{\xi} \delta_{z, \xi} f(\xi, \xi^*). \quad (6.69)$$

<sup>3</sup>Знак минус появляется из-за коммутации  $d$  мимо  $d$

## 6.3 $q$ -Голография

В этом разделе мы сосредоточимся на голографических аспектах квантового диска, уделяя основное внимание выводу явных формул для пропагаторов. Мы ограничим наш анализ скалярными полями. Эти поля будут произвольными функциями из  $z, z^*$ , а значит, элементами  $\mathbb{C}_q[z, z^*]$ . Формулы (6.39, 6.40, 6.41, 6.42) дадут нам действие генераторов  $E, F, K$  на поля, а Казимира (6.28, 6.56) - волновое уравнение.

### 6.3.1 Асимптотический анализ

Предположим, что у нас есть поле  $\phi(z, z^*)$  на квантовом диске. Это поле является элементом  $\phi \in \mathbb{C}_q[z, z^*]$ . Без потери общности мы можем использовать коммутационные соотношения из  $z, z^*$ , чтобы выразить его как

$$\phi(z, z^*) = \sum_{k>0} \phi_k(y) z^k + \phi_0(y) + \sum_{k>0} \phi_{-k}(y) z^{*k}, \quad (6.70)$$

где  $y = 1 - zz^*$ . Мы требуем, чтобы динамика соблюдала  $SU_q(1, 1)$  симметрию квантового диска, из чего следует, что его действие должно быть инвариантным при бесконечно малых преобразованиях, порожденных  $K, E, F$ . Простейшее  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  инвариантное волновое уравнение, линейное по полю, представляет собой сумму элемента Казимира и массового членов

$$(-\square_q + m^2) \phi = 0, \quad \text{with } \square_q = C = -q^{-1}(1 - zz^*)^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z^*}. \quad (6.71)$$

где мы использовали выражение Казимира из (6.56) в системе координат  $z, z^*$ . Это волновое уравнение следует из действия

$$S = \int_{\mathbb{D}_q} (-\phi \square_q \phi + m^2 \phi^2) d\nu. \quad (6.72)$$

Полезно посмотреть, как проинтегрировать его по частям, чтобы выразить кинетический член в виде квадрата. Используя соответствующую меру и определение

из  $\square$ , мы запишем этот интеграл в виде

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{D}_q} \phi \square_q \phi d\nu &= q^2 \int_{\mathbb{D}_q} \phi(z, z^*) y^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z^*} \phi(z, z^*) y^{-2} dz \wedge dz^* \\
&= \int_{\mathbb{D}_q} \phi(z, z^*) y^2 \frac{\partial}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial z} \phi(z, z^*) y^{-2} dz \wedge dz^* \\
&= \int_{\mathbb{D}_q} \phi(z, z^*) dz \wedge dz^* \frac{\partial}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial z} \phi(z, z^*) \\
&= \int_{\mathbb{D}_q} \left( dz^* \frac{\partial}{\partial z^*} \phi(z, z^*) \right) \wedge \left( dz \frac{\partial}{\partial z} \phi(z, z^*) \right), \tag{6.73}
\end{aligned}$$

где на первом шаге мы коммутируем производные, что дает коэффициент  $q^{-2}$ . На третьем шаге мы интегрируем по частям, используя что  $\int \bar{\partial}(f_1 dz f_2) = 0$ .

Изучение асимптотических решений выявляет некоторые интересные аспекты теории поля на квантовом диске. Без каких-либо источников на границе мы должны рассматривать решения, которые спадают вблизи границы. Без потери общности мы можем рассмотреть

$$\phi(z, z^*) \approx (f(z) + f^*(z^*)) y^\Delta + \dots \tag{6.74}$$

Заметим, что на границе мы можем сделать функцию коэффициентов только функцией от  $z$ , поскольку граница удовлетворяет  $zz^* = 1$ . Поскольку  $y = 0$  на границе, то с помощью (6.29) ведущая форма волнового уравнения сводится к

$$\frac{(1 - q^{2\Delta})(1 - q^{2-2\Delta})}{(1 - q^2)^2} + m^2 = 0. \tag{6.75}$$

первый член даёт собственное значение оператора Лапласа (поскольку асимптотическое разложение решения должно всё равно удовлетворять волновому уравнению) и был также получен в [278]. Как обсуждалось в [285], чтобы получить решение с граничным условием (6.74), которое является вещественным и несингулярным везде на квантовом диске, мы должны выбрать представление с  $\Delta = \frac{1}{2} + i\rho$ . Тогда мы получаем, что собственные значения лапласиана задаются следующей формулой

$$\lambda_\rho = \frac{1 + q^2 - 2q \cos(2\rho \log q)}{(1 - q^2)^2}, \tag{6.76}$$

и, следовательно, лапласиан ограничен [278, 285]

$$\frac{1}{(1 + q)^2} \leq \square_q \leq \frac{1}{(1 - q)^2}. \tag{6.77}$$

Ограниченность лапласиана подразумевает, что теория конечна, по крайней мере классически, и, в частности, не имеет ультрафиолетовых расходимостей в совпадающих точках. В  $q \rightarrow 1$  мы получаем неравенство Брейтенлохнера-Фридмана для унитарных теорий поля.

Второй интересный факт в (6.71) состоит в том, что ограничение на собственные значения накладывает ограничение на массы (классических) полей на этом пространстве! Для  $q \approx 1$  мы видим, что масса ограничена сверху  $\ln q$ , единицей дискретности радиального направления, что с точки зрения дважды масштабированным SYK было бы планковским масштабом.

### 6.3.2 Пропагаторы

Мы будем думать о пропагаторе как о функции на тензорном произведении двух копий квантового диска с координатами  $z, z^*$  и  $w, w^*$ . Следовательно, пропагатор будет представлять собой следующий элемент

$$G(z, z^*; w, w^*) = \sum_{m,n,k,l} A_{mn,kl} z^m z^{*n} \otimes w^k w^{*l}. \quad (6.78)$$

Задача состоит в том, чтобы найти решения, удовлетворяющие

$$-q^{-1}(1-zz^*)^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z^*} \phi(z, z^*) + m^2 \phi(z, z^*) = J(z, z^*), \quad (6.79)$$

$$\phi(z, z^*) = \int_{\mathbb{D}_q} d\nu_w G(z, z^*; w, w^*) J(w, w^*). \quad (6.80)$$

Как и в классическом случае, пропагатор на квантовом диске должен быть функцией  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$  геодезического расстояния. Это функция, определенная на тензорном произведении двух квантовых дисков, которая аннигилируется действиями  $E^n, F^m, (K^k - 1)$  для любого  $n, m, k$ , действующего по обеим координатам. Расстояние определяется

$$d(z, z^*; w, w^*) = (1 - zz^*)^{-1} \times_{\text{op}} (1 - q^{-2}zw^*) \times_{\text{op}} (1 - z^*w) \times_{\text{op}} (1 - ww^*)^{-1}, \quad (6.81)$$

где  $\times_{\text{op}}$  - означает "противоположное умножение указывающий, что умножение на первый множитель (квантовый диск, параметризованный  $z, z^*$ ) включает перестановку:  $f(z, z^*) \times_{\text{op}} g(z, z^*) = g(z, z^*) f(z, z^*)$ , где для выражения справа мы использовали стандартное умножение. Это означает, что расстояние можно записать как

$$d(z, z^*; w, w^*) = (1 - q^{-2}zw^* - z^*w + q^{-2}z^*zw^*w)(1 - zz^*)^{-1}(1 - ww^*)^{-1}. \quad (6.82)$$

Это обратное умножение важно, потому что оно сохраняет  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$  инвариантность, что следует из следующей теоремы [285].

**Theorem 1.** *Если  $I_1 = \sum_i a_i \otimes b_i$ ,  $I_2 = \sum_j c_j \otimes d_j$  инвариантны  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$ , то  $I_{12} \equiv I_1 \times_{\text{op}} I_2 \equiv \sum_{i,j} c_j a_i \otimes b_i d_j$  также инвариантны  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$ .*

Эта теорема доказана в разделе (6.5.3). Эта теорема важна для нас, поскольку мы хотим умножать инвариантные расстояния. Инвариантное расстояние, возведенное в произвольную положительную степень (в смысле обратного умножения), дается следующим образом

$$d^m = (1 - zz^*)^{-m} \times_{\text{op}} (q^{-2m} zw^*; q^2)_m \times_{\text{op}} (q^{-2(m-1)} z^* w; q^2)_m \times_{\text{op}} (1 - ww^*)^{-m}, \quad (6.83)$$

где мы использовали символ  $q$ -Поххаммера, определяемый как

$$(a; q)_m = \prod_{j=0}^{m-1} (1 - aq^j). \quad (6.84)$$

Вывод написан в разделе 6.5.4. Удобно будет записать инвариантное расстояние следующим образом

$$d^m = (1 - zz^*)^{-m} (1 - ww^*)^{-m} [(q^{-2m} zw^*; q^2)_m \times_{\text{op}} (q^{-2(m-1)} z^* w; q^2)_m], \quad (6.85)$$

где обратное умножение происходит только внутри квадратных скобок. Обратные степени квантового расстояния будут определяться как

$$(d^m)^{-1} = [(q^{-2m} zw^*; q^2)_m \times_{\text{op}} (q^{-2(m-1)} z^* w; q^2)_m]^{-1} (1 - zz^*)^m (1 - ww^*)^m. \quad (6.86)$$

Заметим, что это выражение расходится с выражением, полученным в [285, 278]; мы обнаружили, что их выражение не является инвариантным, в то время как наше является таковым. Таким образом, общий пропагатор имеет вид

$$G(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m (d^m(z, w))^{-1}, \quad (6.87)$$

для некоторых коэффициентов  $g_m$ . Включены только отрицательные степени, поскольку требуется, чтобы поля исчезали вблизи границы (в отсутствии источников).

### 6.3.3 Граничная двухточечная функция

Из анализа, приведенного в предыдущем разделе вблизи границы, мы ожидаем  $\phi \sim \mathcal{O}(z, z^*)(1 - zz^*)^\Delta$ . Следовательно, граничный предел корреляционной функции имеет вид

$$\langle \phi(z, z^*)\phi(w, w^*) \rangle = \langle \mathcal{O}(z, z^*)\mathcal{O}(w, w^*) \rangle (1 - zz^*)^\Delta (1 - ww^*)^\Delta. \quad (6.88)$$

Таким образом, мы можем считать граничную корреляционную функцию с помощью (6.86). Заметим, что координаты диска некоммутативны, в то время как их граничные пределы являются коммутативными переменными (то есть обычными числами). Кроме того, коммутативность граничных координат делает  $\times_{\text{op}}$  избыточным. Следовательно, двухточечная функция на границе имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(\varphi)\mathcal{O}(\theta) \rangle &= (q^{-2\Delta} e^{i(\varphi-\theta)}; q^2)_\Delta^{-1} (q^{-2(\Delta-1)} e^{-i(\varphi-\theta)}; q^2)_\Delta^{-1}, \\ &= (e^{i(\varphi-\theta)}; q^2)_{-\Delta} (q^2 e^{-i(\varphi-\theta)}; q^2)_{-\Delta}. \end{aligned} \quad (6.89)$$

И действительно, в пределе  $q \rightarrow 1$  мы получаем стандартный конформный пропагатор,

$$\langle \mathcal{O}(\varphi)\mathcal{O}(\theta) \rangle \rightarrow \left( \frac{1}{\sin \left[ \frac{\theta-\varphi}{2} \right]} \right)^{2\Delta}. \quad (6.90)$$

В качестве заключительного комментария мы можем найти ядро Пуанкаре (пропагатор с границы на диск). В силу инвариантности и граничного условия  $\phi \sim \mathcal{O}(z, z^*)(1 - zz^*)^\Delta$ , ядро Пуанкаре должно быть таким

$$K_\Delta \equiv \langle \phi(z, z^*)\mathcal{O}(w, w^*) \rangle = [(q^{-2\Delta} zw^*; q^2)_\Delta \times_{\text{op}} (q^{-2(\Delta-1)} z^*w; q^2)_\Delta]^{-1} (1 - zz^*)^\Delta, \quad (6.91)$$

где  $w = e^{i\theta}$ .

## 6.4 $q$ -Конформная квантовая механика

В этом разделе мы проанализируем свойства предполагаемой граничной квантовомеханической системы с  $SU_q(1, 1)$  симметрией. Заметим, что хотя действие  $SU_q(1, 1)$  на  $e^{i\theta}$  на границе такое же, как и  $SU(1, 1)$  (с точностью до постоянных коэффициентов), они действуют по-разному на степени  $(e^{i\theta})^n$ , где  $SU_q(1, 1)$  действует при помощи нетривиального копроизведения.



Примарные операторы определяются через стандартный голографический словарь из разложения дуальных операторов вблизи границы,  $\phi \sim \mathcal{O}_\Delta(e^{i\theta})y^\Delta$ . Это разложение определяет преобразование граничного оператора по  $SU_q(1, 1)$  следующим образом.

$$E(\phi) = E[\mathcal{O}(z)y^\Delta] \equiv E_\partial[\mathcal{O}(z)]y^\Delta. \quad (6.92)$$

Процедура состоит в том, чтобы подействовать на дуальное поле генератором симметрии, например  $E(\phi)$ , а затем выполнить то же самое разложение, следовательно

$$E_\partial[\mathcal{O}(z)] = E[\mathcal{O}(z)y^\Delta]y^{-\Delta}, \quad (6.93)$$

где  $z \rightarrow e^{i\theta}$ . Преобразования  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$  имеют следующий вид

$$K_\partial[\mathcal{O}(z)] = \mathcal{O}(q^2z), \quad (6.94)$$

$$E_\partial[\mathcal{O}(z)] = -q^{5/2}z^2 \frac{\mathcal{O}(z) - \mathcal{O}(q^2z)}{z - q^2z} + q^{1/2} \frac{q^{2\Delta} - 1}{q^{-2} - 1} z \mathcal{O}(q^2z), \quad (6.95)$$

$$F_\partial[\mathcal{O}(z)] = q^{-3/2} \frac{\mathcal{O}(q^{-2}z) - \mathcal{O}(z)}{q^{-2}z - z} + q^{1/2} \frac{1 - q^{-2\Delta}}{1 - q^2} z^{-1} \mathcal{O}(z). \quad (6.96)$$

Они дадут тождества Уорда, из которых мы сможем извлечь корреляционные функции. Заметим, что действие генераторов на границе удовлетворяет тому же копроизведению, что и на квантовом диске.

Анализ корреляционных функций значительно упрощается в частотном базисе

$$\mathcal{O}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{O}_n z^{-n}, \quad \mathcal{O}_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} \mathcal{O}(z) z^{n-1}. \quad (6.97)$$

Правила преобразования (6.94), (6.95), (6.96) подразумевают следующие преобразования

$$K_\partial[\mathcal{O}_n] = q^{-2n} \mathcal{O}_n, \quad (6.98)$$

$$E_\partial[\mathcal{O}_n] = q^{1/2} \frac{q^{2\Delta-2n-2} - 1}{q^{-2} - 1} \mathcal{O}_{n+1} = q^{\frac{1}{2}} [1 + n - \Delta]_{q^{-2}} \mathcal{O}_{n+1}, \quad (6.99)$$

$$F_\partial[\mathcal{O}_n] = q^{1/2} \frac{q^{2n-2} - q^{-2\Delta}}{1 - q^2} \mathcal{O}_{n-1} = -q^{\frac{1}{2}-2\Delta} [\Delta + n - 1]_{q^2} \mathcal{O}_{n-1}. \quad (6.100)$$

## 6.4.1 Корреляционные функции

Суммирование по  $SU_q(1, 1)$  подразумевает, что корреляционные функции инвариантны под действием любого из генераторов, а именно, что

$$\langle E^a F^b (K^c - 1) [\mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_m)] \rangle = 0. \quad (6.101)$$

Стратегия, которой мы придерживаемся при вычислении корреляционных функций, заключается в том, чтобы сначала разложить корреляционные функции в базисе Фурье

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_m) \rangle = \sum_{n_1, \dots, n_m} \langle \mathcal{O}_{n_1} \dots \mathcal{O}_{n_m} \rangle x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}, \quad (6.102)$$

, а затем определяем коэффициенты  $\langle \mathcal{O}_{n_1} \dots \mathcal{O}_{n_m} \rangle$  при помощи симметрии. Такой подход был рассмотрен ранее Леклером и Бернардом [40] для случая  $SL_q(2, \mathbb{R})$ . Ниже мы рассмотрим несколько случаев для группы  $SU_q(1, 1)$ , группы изометрий квантового диска.

### Двухточечная функция

Наша задача - найти инвариантное скалярное произведение мод Фурье  $\langle \mathcal{O}_m \mathcal{O}_n \rangle$ . Простейшее условие вытекает из действия  $K_\partial - 1$ , требующего, чтобы  $\langle \mathcal{O}_m \mathcal{O}_n \rangle = d_m \delta_{m, -n}$ . Зададим  $d_0 = 1$ . По  $E$  получим уравнение  $\langle E_\partial[\mathcal{O}_m] \mathcal{O}_n \rangle + \langle K_\partial[\mathcal{O}_m] E_\partial[\mathcal{O}_n] \rangle = 0$ , где мы использовали копроизведение из  $E_\partial$ . Так мы находим  $m = -(n + 1)$  и получаем рекуррентное соотношение

$$\langle \mathcal{O}_{-(n+1)} \mathcal{O}_{n+1} \rangle = \alpha_n \langle \mathcal{O}_{-n} \mathcal{O}_n \rangle, \quad (6.103)$$

где

$$\alpha_n \equiv \frac{q^{-\Delta-n-1} - q^{\Delta+n-1}}{q^{\Delta-n-1} - q^{-\Delta+n+1}}. \quad (6.104)$$

Его можно решить, используя граничное условие  $\langle \mathcal{O}_0 \mathcal{O}_0 \rangle = 1$ , и найти коэффициенты Фурье

$$\langle \mathcal{O}_m \mathcal{O}_n \rangle = \delta_{m, -n} q^{-2\Delta n} \frac{(q^{2\Delta}; q^2)_n}{(q^{-2\Delta+2}; q^2)_n} \quad (6.105)$$

Заметим, что  $\langle \mathcal{O}_n \mathcal{O}_{-n} \rangle \sim q^{-2\Delta n}$ ,  $n \rightarrow \infty$  и  $\langle \mathcal{O}_n \mathcal{O}_{-n} \rangle \sim q^{-(2-2\Delta)n}$ ,  $n \rightarrow -\infty$ . Сумма может быть записана следующим компактным образом

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \mathcal{O}(x_2) \rangle = \sum_n \frac{(q^{2\Delta}; q^2)_n}{(q^{-2\Delta+2}; q^2)_n} \left( q^{-2\Delta} \frac{x_1}{x_2} \right)^n \quad (6.106)$$

И, используя тождество Рамануджана [263], получаем

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \mathcal{O}(x_2) \rangle = \frac{(q^2; q^2)_\infty (q^{-4\Delta+2}; q^2)_\infty}{(q^{-2\Delta+2}; q^2)_\infty^2} \frac{(x_1/x_2; q^2)_\infty}{(q^{-2\Delta} x_1/x_2; q^2)_\infty} \frac{(q^2 x_2/x_1; q^2)_\infty}{(q^{-2\Delta+2} x_2/x_1; q^2)_\infty} \quad (6.107)$$

Или более компактно

$$\langle \mathcal{O}(x_1)\mathcal{O}(x_2) \rangle = \frac{(q^2; q^2)_\infty (q^{-4\Delta+2}; q^2)_\infty}{(q^{-2\Delta+2}; q^2)_\infty^2} (x_1/x_2; q^2)_{-\Delta} (q^2 x_2/x_1; q^2)_{-\Delta} \quad (6.108)$$

С точностью до общего постоянного множителя это совпадает с результатом, полученным при помощи асимптотического разложения пропагатора для скалярной теории на квантовом диске в (6.89).

### $q$ -ОПЕ

В этом подразделе мы кратко обсудим ОПЕ. Итак, предположим, что у нас есть два оператора  $\mathcal{O}_{1,2}(x)$ , и мы можем разложить их через другие локальные операторы  $\mathcal{O}_i(x)$ , используя правило

$$\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y) = \sum_i \lambda_{12}^i P_{12i}(x, y, E_\partial) \mathcal{O}_i(y), \quad (6.109)$$

Функции  $P_{12i}$ , грубо говоря, должны давать коэффициенты Клебша-Гордана и быть фиксированы симметриями [221, 87, 189]. Числа  $\lambda_{12}^i$  являются коэффициентами ОПЕ и определяются самой теорией. Таким образом, мы хотим найти коэффициенты  $p_n$ , которые дадут следующее разложение

$$\sum_n p_n \mathcal{O}_{1,n} \mathcal{O}_{2,-n} = \mathcal{O}_{3,0}. \quad (6.110)$$

Используя асимптотику двухточечной функции ниже (6.105), мы должны потребовать, чтобы коэффициенты затухали быстрее, чем  $p_n \sim q^{(\Delta_1+\Delta_2)n}$ ,  $n \rightarrow \infty$  и  $p_n \sim q^{(2-\Delta_1-\Delta_2)|n|}$ ,  $n \rightarrow -\infty$ .

Коэффициенты  $p_n$  можно найти с помощью следующего трюка. Заметим, что оператор в правой части является собственным вектором Казимира  $C_q$ . Таким образом, действие с Казимиром с обеих сторон этого уравнения дает следующее рекуррентное соотношение для  $p_n$ .

$$\begin{aligned} & q^{2+2\Delta_1} (q^{2\Delta_1} - q^{2n}) (q^{2\Delta_2} - q^{2n}) p_{n-1} + q^{2\Delta_2} (q^{2(n+\Delta_1)} - 1) (q^{2(n+\Delta_2)} - 1) p_{n+1} + \\ & (q^{2(1+n+\Delta_1)} + q^{2(1+n+\Delta_2)} - q^{2(1+\Delta_1+\Delta_2)} - q^{2(\Delta_1+\Delta_2)} - q^{2(2n+\Delta_1+\Delta_2)} - q^{2(1+2n+\Delta_1+\Delta_2)} + \\ & q^{2(n+2\Delta_1+\Delta_2)} + q^{2(n+2\Delta_2+\Delta_1)}) p_n = (1 - q^{2\Delta_3})(1 - q^{2-2\Delta_3}) p_n. \end{aligned} \quad (6.111)$$

Это сложное уравнение. Но мы нашли следующую функцию, которая удовлетво-

ряет нашему уравнению

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3) \rangle = \\ & = (q^{2\Delta_{12,3}}x_1/x_2, q^2)_{-\Delta_{12,3}} (q^{2\Delta_{12,3}}x_2/x_3, q^2)_{-\Delta_{23,1}} (q^{2+2\Delta_{23,1}}x_3/x_1, q^2)_{-\Delta_{13,2}} \times \\ & \quad (q^{2-2\Delta_{12,3}}x_2/x_1, q^2)_{-\Delta_{12,3}} (q^{2-2\Delta_{12,3}}x_3/x_2, q^2)_{-\Delta_{23,1}} (q^{-2\Delta_{23,1}}x_1/x_3, q^2)_{-\Delta_{13,2}}, \end{aligned} \quad (6.112)$$

где  $\Delta_{ij,k} = \frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3)$  и  $\Delta_{i,j} = \Delta_i - \Delta_j$ . Разложение данной трехточечной функции по степеням  $x_{1,2,3}$  позволит нам найти  $P_{i,j,k}$ .

Возвращаясь к квантовому диску, можно задаться вопросом, можно ли получить трехточечную функцию из квантового диска (по симметрии она должна, но полезно проверить явно). Для этого нам нужно вычислить следующий интеграл<sup>4</sup>.

$$G(x_1, x_2, x_3) = \int_{\mathbb{D}_q} d\nu_z K_{\Delta_1}(z, x_1) K_{\Delta_2}(z, x_2) K_{\Delta_3}(z, x_3). \quad (6.113)$$

$G(x_1, x_2, x_3)$  является  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$  инвариантным, так как  $K_{\Delta_{1,2,3}}$  и сам интеграл являются  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$  инвариантными. Чтобы увидеть это более явно, заметим, что интеграл является элементом  $\mathbb{C}_q[z, z^*] \otimes \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ , а поскольку он инвариантен  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$ , то имеем

$$\begin{aligned} 0 & = \int_{\mathbb{D}_q} d\nu_z \Delta(E) K_{\Delta_1}(z, x_1) K_{\Delta_2}(z, x_2) K_{\Delta_3}(z, x_3) \\ & = \int_{\mathbb{D}_q} d\nu_z (E_z + K_z E_x) K_{\Delta_1}(z, x_1) K_{\Delta_2}(z, x_2) K_{\Delta_3}(z, x_3) = E_x G(x_1, x_2, x_3) = 0. \end{aligned} \quad (6.114)$$

К сожалению, проверить, что данный интеграл работает для общей размерности полей, сложно, но нам удалось проверить её численно для отрицательных размерностей,  $\Delta_{1,2,3} = -1, -2$ .

## 6.5 Введение в квантовые группы

### 6.5.1 Общая философия

Это приложение содержит то, что, как мы надеемся, будет доступным и педагогичным обзором квантовых групп. Для этого мы начнем с общей философии или идеи, которая привела к созданию квантовых групп. Обычно, когда мы изучаем группы или другие классические многообразия, у нас есть представление о

<sup>4</sup>Произведение инвариантных элементов следует брать по правилу (6.5.3), но поскольку  $x_{1,2,3}$  - это коммутативные элементы, мы можем просто умножить

том, что это некий геометрический объект, который можно представить как некоторую поверхность в плоском пространстве. Вместо этого здесь удобнее использовать язык алгебраической геометрии, которая анализирует функции на многообразии, чьи структуры как-то отражаются в алгебре функций. Так, если у нас есть топологическое пространство  $\mathcal{M}$ , то мы обозначим  $\mathcal{O}(\mathcal{M})$  как множество всех функций  $f \in \mathcal{O}(\mathcal{M}), f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  на данном топологическом многообразии. Это множество автоматически имеет структуру коммутативной алгебры. Мы имеем следующие операции и специальный элемент  $\mathbf{1}$

$$\begin{aligned} \forall f_{1,2} \in \mathcal{O}(\mathcal{M}), \quad (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad (f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x)f_2(x) \quad \forall x \in \mathcal{M}, \\ \mathbf{1}(x) = 1, \quad \forall x \in \mathcal{M}, \quad \mathbf{1} \cdot f = f \end{aligned} \quad (6.115)$$

Легко проверить, что  $\mathbf{1}$  действительно является единицей в алгебре  $\mathcal{O}(\mathcal{M})$ . Изучая алгебраические свойства этой коммутативной алгебры, мы можем понять геометрические свойства топологического многообразия  $\mathcal{M}$ . Например, идеалам  $\mathcal{O}(\mathcal{M})$  будут соответствовать подмногообразия и так далее.

### 6.5.2 Алгебра Хопфа

Теперь предположим, что  $\mathcal{M}$  - это не только топологическое многообразие, но и группа. Тогда алгебра функций  $\mathcal{O}(\mathcal{M})$  имеет дополнительные структуры, которые кодируют групповую структуру этой топологической группы. Таким образом, теперь у нас есть специальный элемент  $e \in \mathcal{M}$ , единица, и две дополнительные операции: взятие обратного элемента и произведение. Вычисляя функцию на многообразии по элементу  $e$ , мы можем представить ее как отображение из  $\mathcal{O}(\mathcal{M})$  в комплексные числа. Такую операцию мы будем называть коединицей

$$\eta : \mathcal{O}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \eta(f) = f(e). \quad (6.116)$$

Существование группового произведения означает, что мы можем сделать любую функцию одной переменной функцией двух переменных

$$\Delta : \mathcal{O}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{M}), \quad \Delta(f)(g_1, g_2) = f(g_1 g_2), \quad \forall g_{1,2} \in \mathcal{M} \quad (6.117)$$

где мы предположили, что можем произвести замену  $\mathcal{O}(\mathcal{M} \times \mathcal{M}) = \mathcal{O}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{M})$ . Карта  $\Delta$  является **копроизведением**. Ассоциативность группового произведения

предполагает коассоциативность **копродукт**  $(\Delta \otimes \text{id})\Delta = (\text{id} \otimes \Delta)\Delta$ . Из аксиом группы следует, что должно выполняться следующее соотношение

$$(\text{id} \otimes \eta)\Delta = (\eta \otimes \text{id})\Delta = \text{id}. \quad (6.118)$$

Если множество имеет коединицу  $\eta$  и копроизведение, то оно является **коалгеброй**. Если алгебра имеет структуру **коалгебры** и эти структуры совместимы в смысле

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b), \quad \eta(ab) = \eta(a)\eta(b), \quad (6.119)$$

то множество является **биалгеброй**.

Взятие обратного элемента позволяет определить дополнительную структуру, которая отображает алгебру функций обратно в саму себя

$$S : \mathcal{O}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{M}), \quad S(f)(g) = f(g^{-1}), \quad \forall g \in \mathcal{M}, \quad (6.120)$$

где операция  $S$  называется антиподом. Аксиомы группы предполагают, что должно выполняться следующее соотношение

$$m(S \otimes \text{id})\Delta = m(S \otimes \text{id})\Delta = \eta. \quad (6.121)$$

Наконец, если у нас есть **биалгебра** с антиподом  $S$ , удовлетворяющая приведенному выше соотношению, то **биалгебра** является **алгеброй Хопфа**. Мы видим, что алгебра функций на любой топологической группе удовлетворяет этим соотношениям. В результате получается коммутативная **алгебра Хопфа**,<sup>5</sup> что в каком-то смысле определяет группу. С другой стороны, квантовая группа определяется некоммутативной **алгеброй Хопфа**.

### Алгебра Хопфа $\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{R}))$

Прежде чем перейти к квантовому случаю, рассмотрим сначала классическую группу  $SL_2(\mathbb{R})$  и посмотрим, как работают приведенные выше определения. Группа  $SL_2(\mathbb{R})$  может быть определена следующим образом

$$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} = 1 \right\}, \quad (6.122)$$

<sup>5</sup>Но она не является **кокоммутативной**, так как  $f(g_1g_2) \neq f(g_2g_1)$  для произвольной функции  $f$

Элементы матрицы  $t_{ij}$  можно рассматривать как координаты в том смысле, что они являются отображениями элементов группы  $g$  на их матричные элементы  $t_{ij}(g)$  в приведенном выше двумерном представлении, и они представляют собой базис для функций на группе. Следовательно, алгебра функций - это алгебра всех возможных многочленов по коммутативным переменным  $t_{ij}$ , подчиняющихся соотношению  $t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} = 1$ , поэтому мы получаем

$$\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{R})) = \mathbb{C}[t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}] / (t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} - 1) . \quad (6.123)$$

Структуры  $\eta$ ,  $S$  и  $\Delta$  определяются структурой группы. Грубо говоря, если заданы координаты элемента группы, то эти операции вычисляют координаты единицы, произведения и обратного элемента данного элемента группы

$$\eta(t_{ij}) = \delta_{ij}, \quad \Delta(t_{ij}) = t_{ik} \otimes t_{kj}, \quad S(t_{ij}) = \epsilon_{ik}\epsilon_{jl}t_{kl} . \quad (6.124)$$

Если у нас есть два элемента  $g, h$  с координатами  $t_{ij}(g), t_{lm}(h)$ , то копроизведение дает координаты их произведения

$$\Delta(t_{ij})(g, h) = t_{ik}(g)t_{kj}(h) = g_{ik}h_{kj} = t_{ij}(gh) , \quad (6.125)$$

и можно проверить, что эти операции удовлетворяют соотношениям (6.115)-(6.121), давая нам **алгебру Хопфа**  $\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{R}))$ . Обычно вместе с группой полезно рассматривать универсальную обертывающую алгебру  $U(\mathfrak{sl}_2)$ , которую можно представить как алгебру векторных полей, порожденных левым действием группы. Так, рассматривая инфинитезимальное преобразование, мы находим три векторных поля  $E, F, H$ , которые подчиняются следующим соотношениям

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H . \quad (6.126)$$

$U(\mathfrak{sl}_2)$  - свободная порожденная алгебра по переменным  $E, F, H$ , подчиняющаяся указанным выше соотношениям.

Поскольку мы используем алгебраический подход, было бы полезно понять, как получить эту алгебру, начиная с алгебры Хопфа  $\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{R}))$ . Для этого сначала заметим, что  $U(\mathfrak{sl}_2)$  - это **алгебра Хопфа**, в которой структура **коалгебры** определяется как

$$\eta(J_i) = 0, \quad \Delta(J_i) = 1 \otimes J_i + J_i \otimes 1, \quad S(J_i) = -J_i, \quad J_i = E, F, H , \quad (6.127)$$

Затем заметим, что поскольку  $E, F, H$  - векторные поля, они имеют естественное действие на элементы алгебры  $\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{R}))$ , которое в сочетании с коединицей определяет спаривание между этими двумя **алгебрами Хопфа**

$$\sum_{ijk} \langle c_{ijk} E^i F^j H^k, f \rangle = \sum c_{ijk} \eta(E^i F^j H^k f), \quad \sum c_{ijk} E^i F^j H^k \in U(\mathfrak{sl}_2), f \in \mathcal{O}(SL_2(\mathbb{R})) \quad (6.128)$$

где мы применяем последовательно векторные поля  $E, F, H$  на заданной функции  $f \in \mathcal{O}(SL_2(\mathbb{R}))$ . Это сопряжение является ключом к пониманию связи между  $U(\mathfrak{sl}_2)$  и  $\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{R}))$ . Прежде всего, заметим, что это спаривание позволяет восстановить действие  $U(\mathfrak{sl}_2)$  на  $\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{R}))$ . Действительно,  $J(f) = (\langle J, \cdot \rangle \otimes \text{id})\Delta(f)$ . Во-вторых, это спаривание уважает структуру **алгебры Хопфа**, а именно

$$\begin{aligned} \langle JK, f \rangle &= (\langle J, \cdot \rangle \otimes \langle F, \cdot \rangle)\Delta(f), & \langle J, fg \rangle &= (\langle \cdot, f \rangle \otimes \langle \cdot, g \rangle)\Delta(J) \\ \langle 1, f \rangle &= \eta(f), & \langle J, 1 \rangle &= \eta(J), \quad f, g \in \mathcal{O}(SL_2(\mathbb{R})), J, K \in U(\mathfrak{sl}_2). \end{aligned} \quad (6.129)$$

Теперь, если у нас есть две **алгебры Хопфа**  $U, V$ , которые связаны через спаривание  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , то мы скажем, что эти две **алгебры Хопфа** двойственны друг к другу. Затем мы определим, что  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  является дуальной алгеброй  $\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{R}))$ . Этот же подход мы применим к квантовым алгебрам.

### Алгебра Хопфа $\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{R}))$

Поняв, как из классических групп можно получить **алгебру Хопфа**, мы можем забыть о нашем базовом многообразии и начать сразу с алгебры. Таким образом, мы рассматриваем следующую алгебру

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{R})) &= \mathbb{C}[t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}]/I, \\ I &= (t_{11}t_{12} - qt_{12}t_{11}, t_{11}t_{21} - qt_{21}t_{11}, t_{12}t_{22} - qt_{22}t_{12}, t_{21}t_{22} - qt_{22}t_{21}, t_{12}t_{21} - t_{21}t_{12}, \\ & \quad t_{11}t_{22} - t_{22}t_{11} = (q - q^{-1})t_{12}t_{21}, t_{11}t_{22} - qt_{12}t_{21} - 1), \end{aligned} \quad (6.130)$$

и полиномы, порожденные некоммутирующими переменными  $t_{ij}$ . Структура **коалгебры** определяется как

$$\eta(t_{ij}) = \delta_{ij}, \quad \Delta(t_{ij}) = t_{ik} \otimes t_{kj}, \quad S(t_{ij}) = \epsilon_{il} \epsilon_{jm} q^{-\epsilon_{ij}} t_{lm}, \quad (6.131)$$

Отсюда видно, что квантовая группа как группа имеет структуру, напоминающую обычную  $SL_2(\mathbb{R})$  группу с обычным групповым произведением и единицей. Таким



образом, как группа квантовая группа ничем не отличается от любой другой группы, но единственное отличие состоит в том, что координаты не коммутативны.

Теперь попробуем использовать описанную выше процедуру для построения  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . Для этого определим следующие элементы  $E, F, K$  через сопряжение, такое, что их сопряжение с базисными элементами определяется как

$$q^{-1}\langle K, t_{11} \rangle = q\langle K, t_{22} \rangle = q^{1/2}\langle E, t_{12} \rangle = q^{-1/2}\langle F, t_{21} \rangle = 1, \quad (6.132)$$

а действие над произведением двух элементов удовлетворяет следующему соотношению

$$\begin{aligned} \langle E, ab \rangle &= \langle E, a \rangle \eta(b) + \langle K, a \rangle \langle E, b \rangle, \\ \langle F, ab \rangle &= \langle F, a \rangle \langle K^{-1}, b \rangle + \eta(a) \langle F, b \rangle, \\ \langle K, ab \rangle &= \langle K, a \rangle \langle K, b \rangle. \end{aligned} \quad (6.133)$$

Можно проверить, что такое определение совместимо с идеалом  $I$ , а значит, определяет единственное сопряжение на всех элементах  $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{R}))$ .

Это сопряжение можно использовать для нахождения следующих идеалов из  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

$$I_E = KE - q^2EK, \quad I_F = K^{-1}F - q^2FK^{-1}, \quad (6.134)$$

а именно  $\langle I_{E,F}, t_{ij} \rangle = 0$ . Давайте сосредоточимся на  $I_E$ . Теперь, если у нас есть произведение двух элементов, мы можем переписать действие  $I_E$ , используя копроизведение

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= a'_i \otimes a''_i, \quad \Delta(b) = b'_j \otimes b''_j, \\ \Delta(ab) &= a'_i b'_j \otimes a''_i b''_j. \end{aligned} \quad (6.135)$$

где  $a, b \in \mathcal{O}(SL_q(2))$ . Они дают

$$\begin{aligned} \langle KE, ab \rangle &= \langle K, a'_i b'_j \rangle \langle E, a''_i b''_j \rangle = \langle K, a'_i \rangle \langle K, b'_j \rangle (\langle E, a''_i \rangle \eta(b''_j) + \langle K, a''_i \rangle \langle E, b''_j \rangle) = \\ &= \langle KE, a \rangle \langle K, b \rangle + \langle K, a \rangle \langle KE, b \rangle \end{aligned} \quad (6.136)$$

и

$$\begin{aligned} \langle EK, ab \rangle &= \langle E, a'_i b'_j \rangle \langle K, a''_i b''_j \rangle = (\langle E, a'_i \rangle \eta(b'_j) + \langle K, a'_i \rangle \langle E, b'_j \rangle) \langle K, a''_i \rangle \langle K, b''_j \rangle = \\ &= \langle EK, a \rangle \langle K, b \rangle + \langle K, a \rangle \langle EK, b \rangle \end{aligned} \quad (6.137)$$

в конечном итоге давая

$$\langle I_E, ab \rangle = \langle I_E, a \rangle \langle K, b \rangle + \langle I_E, b \rangle \langle K, a \rangle, \quad (6.138)$$

и поэтому легко убедиться, что  $I_E \equiv 0$  (аналогично для  $I_F \equiv 0$ ). Аналогично, мы находим другой идеал

$$P = EF - FE - \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}. \quad (6.139)$$

Попробуем вычислить сопряжение этого элемента с любым элементом  $t_{ij}$ . Легко проверить, что

$$\langle P, t_{ij} \rangle = 0, \quad (6.140)$$

и аналогично все произведения  $ab$ . Наиболее простым действием является действие  $K$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, ab \right\rangle &= \frac{\langle K, a \rangle \langle K, b \rangle - \langle K^{-1}, a \rangle \langle K^{-1}, b \rangle}{q - q^{-1}} = \\ &= \left\langle \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, a \right\rangle \langle K^{-1}, b \rangle + \langle K, a \rangle \left\langle \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, b \right\rangle \end{aligned} \quad (6.141)$$

Тогда действие  $EF$  на эти два элемента имеет вид

$$\begin{aligned} \langle EF, ab \rangle &= \langle E, a'_i b'_j \rangle \langle F, a''_i b''_j \rangle = (\langle E, a'_i \rangle \eta(b'_j) + \langle K, a'_i \rangle \langle E, b'_j \rangle) (\langle F, a''_i \rangle \langle K^{-1}, b''_j \rangle + \eta(a''_i) \langle F, b''_j \rangle) = \\ &= \langle E, a'_i \rangle \langle F, a''_i \rangle \langle K^{-1}, b \rangle + \langle E, a \rangle \langle F, b \rangle + \langle K, a'_i \rangle \langle E, b'_j \rangle \langle F, a''_i \rangle \langle K^{-1}, b''_j \rangle + \langle K, a \rangle \langle E, b'_j \rangle \langle F, b''_j \rangle = \\ &= \langle EF, a \rangle \langle K^{-1}, b \rangle + \langle E, a \rangle \langle F, b \rangle + \langle KF, a \rangle \langle EK^{-1}, b \rangle + \langle K, a \rangle \langle EF, b \rangle, \end{aligned}$$

Аналогично для противоположного упорядочения

$$\begin{aligned} \langle FE, ab \rangle &= \langle F, a'_i b'_j \rangle \langle E, a''_i b''_j \rangle = (\langle F, a'_i \rangle \langle K^{-1}, b'_j \rangle + \eta(a'_i) \langle F, b'_j \rangle) (\langle E, a''_i \rangle \eta(b''_j) + \langle K, a''_i \rangle \langle E, b''_j \rangle) = \\ &= \langle F, a'_i \rangle \langle E, a''_i \rangle \langle K^{-1}, b \rangle + \langle F, a'_i \rangle \langle K^{-1}, b'_j \rangle \langle K, a''_i \rangle \langle E, b''_j \rangle + \langle F, b \rangle \langle E, a \rangle + \langle F, b'_j \rangle \langle K, a \rangle \langle E, b''_j \rangle = \\ &= \langle FE, a \rangle \langle K^{-1}, b \rangle + \langle FK, a \rangle \langle K^{-1} E, b \rangle + \langle F, b \rangle \langle E, a \rangle + \langle FE, b \rangle \langle K, a \rangle, \end{aligned}$$

где мы использовали свойства копроизведения  $\Delta$  и коединицы  $\eta$ . Комбинируя два приведенных выше соотношения, получаем

$$\langle P, ab \rangle = \langle P, a \rangle \langle K^{-1}, b \rangle + \langle K, a \rangle \langle P, b \rangle, \quad (6.142)$$

следовательно,  $P \equiv 0$ . Вместе с  $I_{E,F}$  они дают определение квантовой универсальной обертывающей алгебры  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ .

### 6.5.3 Инвариантные элементы

Важным понятием является понятие инвариантных элементов. Точнее говоря, пусть у нас есть два модуля  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  из  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$ . Элемент  $d \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$  инвариантен, если

$$E(d) = F(d) = K(d) - d = 0, \quad d = \sum_i m_i \otimes n_i,$$

где, например

$$E(d) = \sum_i E(m_i) \otimes n_i + K(m_i) \otimes E(n_i) = 0. \quad (6.143)$$

Если мы предположим, что  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  - алгебры и у нас есть два инвариантных элемента  $d_{1,2}$ , то, как обсуждалось в [284], мы можем построить новый инвариантный элемент  $d_3$  следующим образом

$$d_{1,2} = \sum_i m_i^{1,2} \otimes n_i^{1,2}, \quad d_3 = \sum_{i,j} m_i^1 m_j^2 \otimes n_j^2 n_i^1, \quad (6.144)$$

прямое вычисление показывает, что этот элемент действительно инвариантен

$$\begin{aligned} E(d_3) &= \sum_{i,j} [E(m_i^1) m_j^2 \otimes n_j^2 n_i^1 + K(m_i^1) E(m_j^2) \otimes n_j^2 n_i^1 + K(m_i^1) K(m_j^2) \otimes E(n_j^2) n_i^1 \\ &\quad + K(m_i^1) K(m_j^2) \otimes K(n_j^2) E(n_i^1)] = \\ &= \sum_i (K(m_i^1) \otimes 1) E(d_2) (1 \otimes n_i^1) + \sum_{i,j} (1 \otimes n_j^2) E(d_1) (m_j^2 \otimes 1) = 0 \end{aligned} \quad (6.145)$$

### 6.5.4 Степени инвариантного расстояния

Рассмотрим тензорное произведение двух квантовых дисков, параметризованными с помощью  $t_{ij}$  и  $\tau_{ij}$ . Следующие линейные комбинации из  $\tau_{ij} \otimes t_{kl}$  инвариантны под действием  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$

$$A = t_{22} \tau_{11} - q^{-1} t_{12} \tau_{21}, \quad (6.146)$$

$$B = t_{11} \tau_{22} - q t_{21} \tau_{12}, \quad (6.147)$$

где для краткости мы опустили символ тензорного произведения. Координаты диска связаны с этими переменными следующим образом

$$z = q^{-1} t_{21}^{-1} t_{11}, \quad z^* = t_{22} t_{12}^{-1} \quad (6.148)$$

$$w = q^{-1} \tau_{21}^{-1} \tau_{11}, \quad w^* = \tau_{22} \tau_{12}^{-1}. \quad (6.149)$$

Два инварианта могут быть выражены через координаты диска следующим образом при выполнении обратного произведения на первый тензорный множитель

$$A = (-q^{-1}t_{12}\tau_{21}) \times_{\text{op}} (1 - q^2 z^* w), \quad (6.150)$$

$$B = (1 - zw^*) \times_{\text{op}} (-qt_{21}\tau_{12}). \quad (6.151)$$

Используя следующие соотношения, вытекающие из алгебры (6.30)

$$t_{12}\tau_{21} \times_{\text{op}} (z^* w) = q^{-2}(z^* w) \times_{\text{op}} \tau_{21}t_{12}, \quad (zw^*) \times_{\text{op}} t_{21}\tau_{12} = q^{-2}t_{21}\tau_{12} \times_{\text{op}} (zw^*), \quad (6.152)$$

степени этих инвариантов равны

$$A^m = (-q^{-1}t_{12}\tau_{21})^m \times_{\text{op}} (q^2 z^* w; q^2)_m, \quad (6.153)$$

$$B^m = (zw^*; q^2)_m \times_{\text{op}} (-qt_{21}\tau_{12})^m. \quad (6.154)$$

Взяв их обратное произведение, получим

$$B^m A^m = (zw^*; q^2)_m \times_{\text{op}} (-qt_{21}\tau_{12})^m \times_{\text{op}} (-q^{-1}t_{12}\tau_{21})^m \times_{\text{op}} (q^2 z^* w; q^2)_m \quad (6.155)$$

$$= q^{-2m}(zw^*; q^2)_m \times_{\text{op}} (1 - zz^*)^{-m}(1 - ww^*)^{-m} \times_{\text{op}} (q^2 z^* w; q^2)_m \quad (6.156)$$

где мы использовали  $t_{12}t_{21} = -q^{-1}(1 - zz^*)^{-1}$  и аналогично для  $w$ . В итоге

$$B^m A^m = q^{-2m}(1 - zz^*)^{-m} \times_{\text{op}} (q^{-2m} zw^*; q^2)_m \times_{\text{op}} (q^{-2(m-1)} z^* w; q^2)_m \times_{\text{op}} (1 - ww^*)^{-m} \quad (6.157)$$

Для  $m = 1$  это просто инвариантное расстояние  $d$  в (6.82). Таким образом, строится соответствующий степен инвариантного расстояния  $d$ .

## 6.6 $R$ Матричный подход к $SL_q(2)$

Некоммутативная структура (6.6) определяет специфическую квантовую деформацию  $SL(2)$ . Эти соотношения самосогласованны, и любой полином элементов матрицы может быть записан как сумма мономов с заданным упорядочением элементов  $a, b, c, d$  без изменения степени полинома. Эти два свойства гарантируются уравнением Янга-Бакстера

$$g^i_k g^j_l R^{kl}_{mn} = R^{ji}_{rs} g^s_n g^r_m, \quad (6.158)$$

где  $g \in SL_q(2)$  и  $R$  -  $4 \times 4$  матрица комплексных чисел, удовлетворяющая уравнению Янга-Бакстера (ЯБ)

$$R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23}, \quad (6.159)$$

где  $R_{12} = R^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} \delta^{i_3}_{j_3}$  и другие определяются аналогично <sup>6</sup>. Для рассматриваемого случая имеем

$$\begin{pmatrix} aa & ab & ba & bb \\ ac & ad & bc & bd \\ ca & cb & da & db \\ cc & cd & dc & dd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aa & ba & ab & bb \\ ca & da & cb & db \\ ac & bc & ad & bd \\ cc & dc & cd & dd \end{pmatrix} \quad (6.160)$$

Определение коммутационных соотношений (6.158) позволяет определить квантовое пространство, в котором действуют элементы квантовых групп. Таким образом, мы вводим координатные функции  $x_i$ , которые удовлетворяют соотношению

$$R_{mn}^{kl} x_k x_l = x_m x_n, \quad (6.161)$$

Затем можно проверить, что если мы введем новые объекты  $y_k = g_k^i x_i$ , то они также будут удовлетворять этому соотношению.

В общем случае решение уравнения ЯБ довольно сложно, но Дринфельду удалось найти универсальное решение, когда  $R$  действует на тензорное произведение представлений квантовой группы [98]. Таким образом, если мы имеем  $V_1, V_2$  с некоторым действием  $U_q(\mathfrak{su}_{1,1})$ , то матрица  $R$  приводится к виду

$$R = \exp_{q^2} \left( (q^{-1} - q)E \otimes F \right) q^{-\frac{H \otimes H}{2}} \quad (6.162)$$

## 6.7 Казимир и производные

Здесь мы покажем, что

$$C_q = q^{-1} (1 - zz^*)^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z^*} \quad (6.163)$$

---

<sup>6</sup>Это уравнение иногда записывают в виде  $g^i_k g^j_l \hat{R}^{kl}_{mn} = \hat{R}^{ji}_{rs} g^r_m g^s_n$ , где  $\hat{R} = R \circ \tau$  и  $\tau$  - перестановка

Рассмотрим действие оператора Казимира на следующем мономе

$$\begin{aligned}
C_q(z^n z^{*m}) = & \\
q^3 [n]_{q^2} [m]_{q^2} z^{n+1} z^{*m+1} + q [n]_{q^2} [m]_{q^2} z^{n-1} z^{*m-1} - q(1+q^2) [n]_{q^2} [m]_{q^2} z^n z^{*m} = & \\
q [n]_{q^2} [m]_{q^2} z^{n-1} (1 - (1+q^2) z z^* + q^2 z^2 z^{*2}) z^{*m-1} & \quad (6.164)
\end{aligned}$$

Сравним его со следующим оператором

$$\begin{aligned}
q^{-1} (1 - z z^*)^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z^*} (z^n z^{*m}) = q^{-3} [m]_{q^2} [n]_{q^2} z^{n-1} z^{*m-1} = & \\
q [m]_{q^2} [n]_{q^2} z^{n-1} (1 - (1+q^2) z z^* + q^2 z^2 z^{*2}) z^{*m-1} = C_q(z^n z^{*m}) & \quad (6.165)
\end{aligned}$$

# Глава 7

## Двумерные модели КХД

### 7.1 Введение и суперсимметричная квантовая электродинамика

Одной из самых важных загадок современной теоретической физики является проблема конфайнмента в квантовой хромодинамике (КХД), которая представляет собой просто  $SU(3)$  теорию Янга-Миллса, связанную с фермионами в фундаментальном представлении. Благодаря экспериментальным достижениям мы знаем, что эти фермионы существуют только в адронах и никогда не наблюдаются как отдельные частицы. Несмотря на то, что мы понимаем правила и законы, управляющие поведением кварков на малых расстояниях, мы все еще не до конца понимаем КХД и ее свойства на больших расстояниях. Одна из перспективных идей, позволяющая радикально упростить проблему и дать некоторое понимание, была предложена 'т-Хоофтом [2]. А именно, он предложил идею, что если рассматривать  $SU(N)$  калибровочную теорию в большом  $N$  пределе с фиксированным  $\lambda = g_{YM}^2 N$ , то вклад будет давать только какой-то определенный тип диаграмм. Чтобы продемонстрировать силу такого подхода, 'т-Хоофту удалось решить  $SU(N)$  калибровочную теорию с массивным Дираковским фермионным полем в фундаментальном представлении в  $1 + 1$  измерениях [3]. Рассматривались различные обобщения модели т-Хоофта, например, добавлялись фермионные поля в различных представлениях  $SU(N)$ . В большом  $N$  пределе эти модели не могут быть решены подобным образом, но все же были найдены и изучены некоторые другие интересные и своеобразные модели.

В этой главе мы обсуждаем свойства спектра этих двумерных моделей кванто-

вой хромодинамики. А именно, нас будет интересовать вопрос, когда такие модели могут стать суперсимметричными. Для этого мы рассматриваем калибровочное поле с калибровочной группой  $G$ , которая предполагается простой группой Ли, и добавляем массивный майорановский фермион  $\psi^i$ , принадлежащий присоединенному представлению калибровочной группы  $G$ . Одно из замечательных свойств состоит в том, что спектр модели становится суперсимметричным при определенных массах фермионов  $m_{\text{adj}}$ . Это было показано сначала Кутасовым [207], а затем проверено явно с помощью некоторых численных методов [43, 86, 143]. Несмотря на то, что это свойство двумерных калибровочных теорий было очень хорошо установлено, физическая интуиция, лежащая в основе этого результата, остается неясной и понимается только в терминах квантования светового конуса. Мы выдвигаем утверждение, что эти суперсимметричные модели КХД можно понимать как деформацию  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных моделей ВЗВ релевантными операторами. А именно, рассмотрим ВЗВ-модель или некоторое представление алгебры Каца-Муди на уровне  $\tilde{k}$ :

$$[\tilde{J}_n^a, \tilde{J}_m^b] = i f^{abc} \tilde{J}_{n+m}^c + n \delta_{n,-m} \delta_{ab} \frac{\tilde{k}}{2}. \quad (7.1)$$

Такую систему легко сделать суперсимметричной, введя фермионы Майораны  $\psi^i$  в присоединенном представлении [184, 297]. Затем следует переопределить операторы  $\tilde{J}_n^a$  так, чтобы они корректно действовали на фермионные операторы  $\psi_n^i$ , и построить фермионный оператор  $Q$ :

$$\begin{aligned} \{\psi_n^i, \psi_m^j\} &= \delta^{ij} \delta_{n+m,0}, \quad J_n^a = \tilde{J}_n^a + \frac{i}{2} \sum_m f_{abc} \psi_{n-m}^b \psi_m^c, \quad [J_n^a, \psi_m^b] = i f^{abc} \psi_{n+m}^c \\ Q &= \sum_{n,m} \frac{1}{6} f_{abc} \psi_n^a \psi_m^b \psi_{-n-m}^c + \sum_n J_n^i \psi_{-n}^i, \end{aligned} \quad (7.2)$$

Легко проверить, что под действием  $Q$  токовый и фермионный операторы будут преобразовываться друг через друга

$$\{Q, \psi_n^i\} = J_n^i, \quad [Q, J_n^i] = i \frac{kn}{4\pi} \psi_n^i.$$

Поскольку  $Q$  является фермионным оператором, мы заключаем, что  $Q$  является суперсимметричным оператором. Одна из интересных особенностей этой конструкции в том, что она не зависит от начального уровня  $k$  алгебры Каца-Муди. Мы можем просто начать с пустого представления алгебры Каца-Муди ( $\bar{k} = 0$ ) и, рассматривая только фермионы в присоединенном представлении, увидеть, что они автоматически являются суперсимметричными.



Простейшим примером такой суперсимметрии является рассмотрение  $U(1)$  версии алгебры Каца-Муди и просто свободного безмассового фермиона Майораны. Алгебра Каца-Муди  $U(1)$  является просто алгеброй Гейзенберга-Вейля и может быть реализована с помощью свободного скалярного поля. Поэтому суперсимметричная  $U(1)$  алгебра Каца-Муди может быть реализована следующим образом

$$S = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi \right], \quad (7.3)$$

которая, как легко видеть, является суперсимметричной по конструкции (спектр состоит из безмассового фермиона и скалярного поля, поэтому он суперсимметричен). Мы можем немного усложнить эту модель, введя массовый член для обеих полей (что можно рассматривать как деформацию исходного СФТ релевантным оператором, но при этом мы сохраняем суперсимметрию)

$$S = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + im\bar{\psi}\psi \right], \quad (7.4)$$

Мы можем заметить, что массивное скалярное поле может быть реализовано как  $U(1)$  калибровочное поле, связанное с безмассовым фермионом. Поэтому мы должны заключить, что следующая модель должна быть суперсимметричной

$$S = \int d^2x \left[ -\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\chi}\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) \chi + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + i\frac{e}{\sqrt{2\pi}} \bar{\psi}\psi \right], \quad (7.5)$$

Отметим, что именно эта модель может служить простым примером суперсимметричной модели КХД с массивными фермионами в присоединенном представлении, открытой Кутасовым [207]. Основное отличие состоит в том, что наряду с фермионами в присоединенном представлении мы добавили безмассовые заряженные фермионы, которые, по сути, создали массу для скалярного поля в действии (7.4). Рассматриваемая в  $U(1)$  калибровочная группа довольно проста, что позволяет понять физику и математику, стоящую за этой аномальной суперсимметрией. Так, в то время как классическая суперсимметрия требует, чтобы масса фермионного поля в присоединенном представлении была нулевой, суперсимметричные преобразования являются киральными, и поэтому мера не инвариантна под действием суперсимметрии. Чтобы компенсировать этот дополнительный член, мы должны добавить массовый член для Майорановских фермионов. В случае неабелевых калибровочных полей можно ожидать, что произойдет то же самое, но вычисления станут более сложными. Тем не менее, существенные особенности и свойства остаются прежними. Сравнение с моделью  $U(1)$  позволяет сделать весьма интересное

обобщение этой суперсимметрии, когда наряду с массивными фермионами в присоединенном представлении мы добавляем несколько безмассовых фермионов в различных представлениях калибровочной группы и при этом можно найти массу  $m_{\text{adj}}$ , где модель становится суперсимметричной.

## 7.2 Гамильтониан и гильбертово пространство двумерных моделей КХД

Как говорилось во введении, мы хотим изучить теорию калибровочного поля с массивным Майорановским фермионом в присоединенном представлении некоторой непрерывной группы Ли  $G$  вместе с некоторыми безмассовыми фермионами Дирака или Майораны в другом неприводимом унитарном представлении  $\mathcal{R}$ . Действие модели имеет вид.

$$S = \int d^2x \left( \text{tr} \left[ -\frac{1}{4g_{\text{YM}}^2} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\Psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi - m_{\text{adj}} \bar{\Psi}\Psi \right] + i\bar{v}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu v \right) \quad (7.6)$$

Чтобы сделать все вычисления простыми и явными, мы запишем их непосредственно в терминах компонент полей

$$S = \int d^2x \left[ \frac{1}{4g_{\text{YM}}^2} F_{+-}^2 + \left( \frac{i}{2} f_{ijk} \psi_-^i \psi_-^j + \bar{v}_-^\alpha \tau_{\alpha\beta}^k v_-^\beta \right) A_+^k - \left( -\frac{i}{2} f_{ijk} \psi_+^i \psi_+^j + \bar{v}_+^\alpha \tau_{\alpha\beta}^k v_+^\beta \right) A_-^k + \frac{i}{2} \psi_+^i \partial_- \psi_+^i + \frac{i}{2} \psi_-^i \partial_+ \psi_-^i + \frac{i}{\sqrt{2}} m_{\text{adj}} \psi_+^i \psi_-^i + i\bar{v}_-^\alpha \partial_+ v_-^\alpha + \bar{v}_+^\alpha \partial_- v_+^\alpha \right], \quad (7.7)$$

, которые совпадают с действием, полученным в [86]. Теперь удобно изучать эту модель в калибровке светового конуса, где мы рассматриваем одну из координат светового конуса, например  $x_-$ , как время, а другую,  $x_+$ , как пространственную координату. В этом случае мы выберем калибровку  $A_+^i = 0$ , которая сделает другую компоненту поля  $A_-^i$  нединамической. Тогда его влияние на действие можно будет легко учесть. То же самое справедливо и для фермионных полей  $\psi_-^i$  и  $v_-^\alpha$ . Проинтегрировав  $\psi_-^i$  и  $A_-$ , мы получим следующее действие

$$S = \int d^2x \left[ i\bar{v}_+^\alpha \partial_- v_+^\alpha + \frac{i}{2} \psi_+^i \partial_- \psi_+^i - g_{\text{YM}}^2 J^i \frac{1}{\partial_+^2} J^i - \frac{im_{\text{adj}}^2}{4} \psi_+^i \frac{1}{\partial_+} \psi_+^i \right],$$

где  $J^i = -\frac{i}{2} f_{ijk} \psi_+^j \psi_+^k + \bar{v}_+^\alpha \tau_{\alpha\beta}^i v_+^\beta$  (7.8)

Из этого действия сразу видно, что единственными динамическими полями являются  $\psi_+^i$  и  $v_+^\alpha$ . Затем, следуя стандартной процедуре квантования, мы строим

гильбертово пространство  $\mathcal{H}$  и гамильтониан, действующий в этом пространстве. Поскольку действие содержит только первую производную фермионных полей, мы имеем довольно простые коммутационные соотношения

$$\begin{aligned}\pi_\psi^i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_- \psi_+^i)} = i\partial_- \psi_+^i, & \{\psi_+^i(x^+), \psi_+^j(y^+)\} &= \delta^{ij}\delta(x^+ - y^+) \\ \pi_v^\alpha &= \bar{v}^\alpha, & \{\bar{v}_+^\alpha(x^+), v_+^\beta(y^+)\} &= \delta^{\alpha\beta}\delta(x^+ - y^+)\end{aligned}\quad (7.9)$$

После этого мы можем ввести вакуум  $|0\rangle$  в виде

$$\begin{aligned}v_+^\alpha(p_+) |0\rangle &= 0 \quad \forall p_+ \in \mathbb{R}, & \psi_+^i(p_+) |0\rangle &= 0 \quad \forall p_+ < 0 \\ v_+^\alpha(p_+) &= \int dx_+ v_+^\alpha(x_+) e^{-ip_+ x_+}, & \psi_+^i(p_+) &= \int dx_+ \psi_+^i(x_+) e^{-ip_+ x_+}\end{aligned}\quad (7.10)$$

и использовать другие поля  $\bar{v}_+^\alpha(k_+)$  и  $\psi_+^i(k_+)$  для действия на вакуум  $|0\rangle$  и построить другие состояния в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  способом, аналогичным модулю Клиффорда, где рассматривается конечное число фермионов Майораны или Дирака. Обратите внимание, что мы определили вакуум для  $\psi_+^i(p_+)$  только для положительного импульса, поскольку коммутационные соотношения включают то же самое поле, но с противоположным импульсом. Моду  $\psi_+^i(0)$  мы исключим из спектра.

Чтобы сделать утверждение более конкретным, мы должны принять во внимание остаточные калибровочные симметрии. А именно, калибровка  $A_+ = 0$  не фиксирует калибровку полностью, мы все еще можем сделать калибровочное преобразование с параметром, являющимся функцией только  $x_-$

$$U = U(x^-) \Rightarrow A_+^U = U^{-1}A_+U + iU^{-1}\partial_+U = 0. \quad (7.11)$$

Эта симметрия заставляет нас рассматривать только подсектор всего гильбертова пространства,  $\mathcal{H}_G \subset \mathcal{H}$ , который содержит только синглеты под действием глобальной группы  $G$ . В этом гильбертовом пространстве мы можем ввести гамильтониан и оператор импульса в виде

$$H = \int dx^+ \left[ -g_{\text{YM}}^2 J^i \frac{1}{\partial_+^2} J^i - \frac{im_{\text{adj}}^2}{4} \psi^i \frac{1}{\partial_+} \psi^i \right], \quad P = \int dx^+ \left[ \frac{i}{2} \psi_+^i \partial_+ \psi_+^i + i\bar{v}^\alpha \partial_+ v^\alpha \right], \quad (7.12)$$

Массовый спектр состояний можно найти через соотношение  $M^2 = 2HP$ . Видно, что поскольку  $H$  и  $P$  являются синглетными по отношению к калибровочной

группе  $G$ , они корректно отображают  $\mathcal{H}_G$  на себя, и поэтому их действие хорошо определено. Теперь нас будут интересовать только симметрии спектров этого гамильтониана.

### 7.3 Диагонализация Гамильтониана

В этом разделе мы покажем в явном виде, как гильбертово пространство модели обладает суперсимметричным оператором, и обобщим его на случай, когда в модель добавляются дополнительные фермионы. В этом разделе для краткости мы будем опускать подпериоды  $+$  в обозначениях операторов (7.9). Гильбертово пространство строится с помощью следующих операторов

$$\{\psi_i(p), \psi_j(q)\} = 2\pi\delta_{ij}\delta(p+q), \quad \{\bar{v}_\alpha(p), \bar{v}_\beta(q)\} = 2\pi\delta_{\alpha\beta}\delta(p-q), \quad (7.13)$$

Мы будем использовать шредингеровский подход к этой квантовой проблеме — операторы не эволюционируют со временем, в то время как состояния эволюционируют. Опять же, алгебра  $\mathfrak{g}$  представлена эрмитовыми матрицами  $T^i$ , удовлетворяющими соотношению  $[T^i, T^j] = if_{ijk}T^k$  и представлена матрицами  $\tau_{\alpha\beta}^i$  в представлении  $\mathcal{R}$  безмассовых фермионов  $v_\alpha$ . Мы определяем следующие операторы тока

$$J_i^\psi(p) = -\frac{i}{2}f_{ijk} \int \frac{dp_1}{2\pi} \psi_j(p+p_1)\psi_k(-p_1), \quad (7.14)$$

$$J_i^v(p) = \int \frac{dp_1}{2\pi} \bar{v}_\alpha(p_1)\tau_{\alpha\beta}^i v_\beta(p_1+q), \quad (7.15)$$

Как обычно, когда мы имеем дело с бесконечным числом операторов, мы должны позаботиться о том, как мы определяем операторы, чтобы получить конечные результаты. Для данного случая мы определяем эти операторы с помощью нормального упорядочения. Мы сразу же замечаем, что эти операторы равны нормально упорядоченным версиям самих себя — в определениях нет никакой неоднозначности :  $J_i^\psi(p) := J_i^\psi(p)$ . Легко проверить, что они дают правильное действие в гильбертовом пространстве. А именно, коммутатор токов с полем

$$[J_i^\psi(p), \psi_j(q)] = if_{ijl}\psi_l(p+q), \quad (7.16)$$

, который показывает, что преобразования  $\psi_j(q)$  в присоединенном представлении алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  и  $J_i^\psi(p)$  действительно являются операторами тока алгебры Ли и дают

правильное представление алгебры Каца-Муди. А именно, проверим коммутаторы двух операторов тока

$$[J_i^\psi(p), J_j^\psi(q)] = \frac{1}{2} f_{jmn} \int \frac{dp_1}{2\pi} (f_{ima} \psi_a(p + p_1 + q) \psi_n(-p_1) + f_{ina} \psi_m(p_1 + q) \psi_a(p - p_1)),$$

который содержит некоторые неоднозначности, связанные с нормальным упорядочением, которые необходимо разрешить. Итак, предположим на некоторое время, что  $p + q \neq 0$ , где у нас нет никаких проблем с нормальным упорядочением. Тогда можно сдвинуть интеграл во втором члене и, используя тождество Якоби, получить

$$[J_i^\psi(p), J_j^\psi(q)] = \frac{1}{2} \int \frac{dp_1}{2\pi} f_{anm} f_{ijm} \psi_a(p + p_1 + q) \psi_n(-p_1) = i f_{ijm} J_m^\psi(p + q). \quad (7.17)$$

Если  $p = -q$  коммутатор (7.3), то интеграл плохо определен. А именно, при наивном интегрировании можно предположить, что эти два члена совпадают, и поэтому их разность должна быть равна нулю. На самом деле эти два члена расходятся, и чтобы правильно их учесть, нужно регуляризовать интеграл, а уже потом выполнять сдвиги. Другой способ убедиться в этом - заметить, что коммутатор

$$\begin{aligned} & [J_i^\psi(p), J_j^\psi(-p)] = \\ & = \frac{1}{2} \int \frac{dp_1}{2\pi} (f_{jmn} f_{ima} \psi_a(p_1) \psi_n(-p_1) + f_{jam} f_{imn} \psi_a(p_1 - p) \psi_n(p - p_1)) \end{aligned} \quad (7.18)$$

нормально упорядочен (или оба нормально неупорядочены), если  $p_1 > p$  или  $p_1 < 0$ . Но если  $0 < p_1 < p$ , то первый член нормально упорядочен, а второй - нет. Из-за этого мы не можем выполнить сдвиг. Правильно выполнив нормальное упорядочивание, мы получим некоторый постоянный вклад, пропорциональный  $p$ . А именно, мы приходим к следующему выражению

$$[J_i^\psi(p), J_j^\psi(-q)] = i f_{ijm} J_m^\psi(p - q) + \frac{C_f}{2} \delta_{ij} \delta(p - q), \quad f_{\alpha\beta i} f_{\alpha\beta j} = C_f \delta_{ij} \quad (7.19)$$

Теперь мы можем видеть, что гильбертово пространство, порожденное фермионами в присоединенных представлениях, уже является суперсимметричным. Для этого мы вводим заряд  $Q^\psi$

$$Q^\psi = \frac{1}{3} \int \frac{dp_1}{2\pi} \psi_i(-p_1) J_i^\psi(p_1), \quad (7.20)$$

Можно проверить, что этот оператор нормально упорядочен :  $Q^\psi := Q^\psi$ . Антиккоммутатор с полями  $\psi_i(p)$  читается как

$$\{Q^\psi, \psi_i(p)\} = \frac{1}{3} \int \frac{dp_1}{2\pi} [i \psi_j(-p_1) f_{jik} \psi_k(p + p_1)] + \frac{1}{3} J_i^\psi(p) = J_i^\psi(p), \quad (7.21)$$

и поскольку мы не сдвигаем интегралы и нет никаких неоднозначностей, мы можем доверять этому результату. Теперь рассмотрим коммутатор с  $J_i^\psi(p)$ . Имеем

$$[Q^\psi, J_i^\psi(p)] = -\frac{pC_f}{12\pi}\psi_i(p) + \frac{i}{3} \int \frac{dp_1}{2\pi} \left( f_{jik}\psi_k(p-p_1)J_j^\psi(p_1) + \psi_j(-p_1)f_{jik}J_k^\psi(p+p_1) \right),$$

Чтобы их согласовать, снова нужно сделать сдвиг. Как и в случае с нетривиальным коциклом для алгебры Каца-Муди, мы должны делать это очень осторожно. Заметим, что этот член снова либо упорядочен, когда  $p_1 < -p$  либо неупорядочен, когда  $p_1 > 0$ , тогда получаем

$$[Q^\psi, J_i^\psi(p)] = -\frac{pC_f}{4\pi}\psi_i(p), \quad (7.22)$$

действие из  $Q^\psi$  совпадает с действием, полученным Кутасовым и др. Мы обобщаем эту конструкцию, когда в ней участвуют дополнительные фермионы. Чтобы сделать вычисления достаточно общими, предположим, что мы добавили просто некоторую дополнительную систему токов  $J_i^v$  со следующими коммутационными соотношениями

$$[J_i^v(p), J_j^v(q)] = if_{ijm}J_m^v(p+q) + \frac{k}{2}p\delta(p+q)\delta_{ij}, \quad (7.23)$$

которая может возникнуть по каким-то другим причинам, не обязательно путем введения безмассовых фермионов. Определим суммарный ток  $J_i = J_i^\psi + J_i^v$  и, поскольку  $J^\psi$  и  $J^v$  коммутируют, сразу получим

$$[J_i(p), J_j(q)] = if_{ijm}J_m(p+q) + \frac{k_t}{2}p\delta(p+q)\delta_{ij}, \quad k_t = C_f + k. \quad (7.24)$$

Затем мы вводим новый суперсимметричный заряд в виде

$$Q = \int \frac{dp_1}{2\pi}\psi_i(-p_1) \left[ \frac{1}{3}J_i^\psi(p_1) + J_i^v(p_1) \right], \quad (7.25)$$

Отметим, что аналогичное выражение было предложено в [184, 185]. Легко проверить, что для нового заряда справедливы те же коммутационные соотношения  $Q$

$$\{Q, \psi_i(q)\} = J_i(q) = J_i^\psi(q) + J_i^v(q) \quad (7.26)$$

После этого попробуем коммутировать его с током  $J_i^t(q)$ , имеем

$$[Q, J_i^\psi(q) + J_i^v(q)] = [Q^\psi, J_i^\psi(q)] + \int \frac{dp_1}{2\pi} \left[ \psi_j(-p_1)J_j^v(p_1), J_i^\psi(q) + J_i^v(q) \right], \quad (7.27)$$

Первый член был вычислен ранее. Второй член может быть вычислен аналогичным образом, и мы получаем

$$[Q, J_i(q)] = -\frac{k_t q}{4\pi} \psi_i(q). \quad (7.28)$$

Теперь мы можем легко проверить, что  $Q$  коммутирует с гамильтонианом для определенной массы  $m$  и оператором импульса, определенного в предыдущем разделе. Для оператора импульса мы получаем  $[Q, P] = 0$  просто потому, что  $Q$  не несет никакого импульса, или просто заметив, что он не зависит от координат  $x^-$  в явном виде. Остается проверить, что  $[Q, H] = 0$ . Заметим, что гамильтониан в импульсном представлении имеет следующий вид

$$H = \int \frac{dp}{2\pi} \left[ g_{\text{YM}}^2 \frac{J^i(p) J^i(-p)}{p^2} + \frac{m_{\text{adj}}^2 \psi^i(p) \psi^i(-p)}{4p} \right] \quad (7.29)$$

Тогда, коммутируя его с  $Q$ , получаем

$$[Q, H] = \int \frac{dp}{2\pi} \left[ -k_t \frac{g_{\text{YM}}^2 \psi^i(p) J^i(-p)}{2\pi p} + \frac{m_{\text{adj}}^2 \psi^i(p) J^i(-p)}{2p} \right], \quad (7.30)$$

а для  $m^2 = \frac{k_t g_{\text{YM}}^2}{\pi}$  получим, что  $Q$  является фермионной симметрией нашей системы. Например, если мы рассмотрим  $G = SU(N)$  и один присоединенный фермион, то  $k = N$  и масса будет  $m^2 = \frac{g_{\text{YM}}^2 N}{\pi}$ . Если к гамильтониану добавить фермионы  $N_f$  в фундаментальном представлении, то масса присоединённого фермиона должна быть

$$m_{\text{adj}}^2 = \frac{g_{\text{YM}}^2 (N + N_f)}{\pi}, \quad (7.31)$$

чтобы вся система соблюдала фермионную симметрию  $Q$ . Чтобы утверждать, что фермионный оператор  $Q$  является реальным суперсимметричным оператором, необходимо вычислить  $Q^2$  и сравнить с  $P$ , что мы и сделаем в следующем разделе. Было бы весьма интересно проверить этот результат численно. Пока что мы можем проверить это утверждение численно только в большом пределе  $N$ . Если мы зафиксируем  $N_f$ , то в большом  $N$  пределе поправка будет мала. Поэтому мы не сможем непосредственно увидеть малую  $N_f$  поправку к массе присоединённого фермиона. Тем не менее мы можем проверить, что ведущая поправка остается такой же и суперсимметрия действительно возникает в большом  $N$  пределе при той же массе <sup>1</sup>. Другой

---

<sup>1</sup>Я хотел бы поблагодарить Росса Демпси за предоставленные численные данные, подтверждающие это утверждение

подход предполагает рассмотрение большого числа безмассовых фермионов в фундаментальном представлении  $N_f \sim N$ , что будет довольно трудно реализовать. И последнее замечание заключается в том, чтобы просто добавить безмассовый фермион в присоединённом представлении, что должно удвоить значение суперсимметричной массы. Кроме того, этот результат очень похож на универсальность моделей КХД с безмассовыми фермионами, предложенную Кутасовым и Швиммером [208], где спектр массивных состояний не зависит от конкретной структуры безмассового сектора, а только от коэффициента перед действием ВЗВ.

Можно задаться вопросом, как дополнительный безмассовый фермион может резко изменить свойства материи. Еще более удивительно, почему спектр модели не зависит от реальной структуры безмассового сектора теории, а только от одного фактора  $k$ , определяющего уровень алгебры Каца-Мури. Второй вопрос был частично решен в случае, когда все фермионы безмассовые [208]. Чтобы увидеть, как можно ответить на оба этих вопроса, рассмотрим случай калибровочной теории  $U(1)$ , который был частично рассмотрен во введении. А именно, мы хотим рассмотреть электромагнитное поле, связанное с  $N_f$  безмассовыми фермионами и одним массивным фермионом, не связанным с электромагнитным полем. В этом случае мы имеем следующее действие

$$S = \int d^2x \left[ -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + im_f\bar{\psi}\psi + \sum_j i\bar{\chi}_j\gamma^\mu(\partial_\mu + iq_j A_\mu)\chi_j \right], \quad (7.32)$$

Любое калибровочное поле может быть разложено как  $A_\mu = \partial_\mu\alpha + \epsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\beta$ . Чисто калибровочный член может быть удален обычным калибровочным вращением, а член  $\beta$  может быть удален аксиальным вращением  $\chi_j \rightarrow e^{iq_j\beta\gamma^5}\chi_j$ . Последнее преобразование меняет фермионную меру. Приходится добавлять к действию аномальный член Швингера. После этого мы получаем следующее действие

$$S = \int d^2x \left[ \frac{1}{2g^2} (\Delta\beta)^2 - k\beta\Delta\beta + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + im_f\bar{\psi}\psi + \sum_j i\bar{\chi}_j\gamma^\mu\partial_\mu\chi_j \right], \quad (7.33)$$

После этого мы видим, что поле  $\beta$  имеет два полюса: один с массой  $k^2 = g^2 \sum_j q_j^2$  с положительным вычетом и  $k^2 = 0$  с отрицательным вычетом. Первый соответствует реальному бозону, второй - нефизический. Его роль - аннулирование одной из безмассовых степеней свободы, и вместо  $N_f$  безмассовых фермионных степеней свободы мы имеем  $N_f - 1$  безмассовых фермионов. Чтобы проверить это утверждение, можно бозонировать эти  $N_f$  фермиона и получить  $SU_1(N_f) \times U_{N_f}(1)$  модель ВЗВ.



Фактор  $U_{N_f}(1)$  связан с калибровочным полем и по существу создает массу для фотона  $m^2 = g^2 k$ . Таким образом, мы получаем  $SU_1(N_f)$  ВЗВ вместе с массивным фотоном. После этого, если мы выберем  $m_f^2 = g^2 k$ , то получим, что фермионные и бозонные степени свободы будут иметь одинаковую массу, а значит, мы тривиально получим суперсимметричный спектр.

Из этого следует сделать один важный вывод: если спектр массивных состояний является суперсимметричным (на каждое массивное бозонное состояние приходится массивное фермионное состояние), то спектр безмассовых состояний таковым не является. Мы ожидаем, что то же самое будет справедливо и для неабелева случая. Для выяснения конкретной структуры безмассовых состояний нам потребуется дополнительное исследование данной части спектра [84]. Тем не менее, возможно, что безмассовая часть спектра также является суперсимметричной. Так, в случае одного безмассового фермиона в фундаментальном представлении и одного массивного фермиона в присоединенном представлении известно, что в спектре, помимо безмассового мезона, присутствуют безмассовые барионные состояния. Если  $N$  нечетно, то состояние с барионным числом 1 является фермионом и может быть партнером мезона. Таким образом, спектр будет полностью суперсимметричным.

## 7.4 Интеграл по путям

Предыдущий подход для абелева случая может быть обобщен на неабелев случай. В этом разделе мы повторно получаем результаты предыдущего раздела, используя подход интеграла пути. Он имеет преимущество, так как позволяет рассматривать и находить эти суперсимметричные преобразования не только используя квантование в калибровке светового конуса. Как обсуждалось во введении, чтобы сделать модель ВЗВ суперсимметричной, нужно просто добавить безмассовый фермион в присоединенном представлении. Это утверждение можно сформулировать на уровне интеграла по путям и явно записать правила преобразования для ВЗВ поля  $g$ , которое является элементом калибровочной группы, и фермионного поля  $\psi^i$ . А именно, если у нас есть модель ВЗВ на уровне  $k$  и безмассовый фермион Майораны в присоединенном представлении [297]:

$$S_0 = \int d^2x \operatorname{tr} [i\psi_+ \partial_- \psi_+ + i\psi_- \partial_+ \psi_-] + kW[g], \quad (7.34)$$

то можно проверить, что действие (7.34) обладает следующей симметрией

$$\begin{aligned} \delta g &= \frac{4\pi i}{k} [\epsilon_- g \psi_+ + \epsilon_+ \psi_- g], \\ \delta \psi_+ &= \epsilon_- \left( g^{-1} \partial_+ g - \frac{4\pi i}{k} \psi_+^2 \right), \quad \delta \psi_- = \epsilon_+ \left( \partial_- g g^{-1} + \frac{4\pi i}{k} \psi_-^2 \right). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Действительно, проверим для  $\epsilon_+ = 0$ , что действие инвариантно

$$\delta S_f = 2i\epsilon_- \int d^2x \operatorname{tr} [g^{-1} \partial_+ g \partial_- \psi_+] \quad (7.36)$$

$$\delta S_{\text{WZW}}(g) = \frac{k}{2\pi} \int d^2x \operatorname{tr} [g^{-1} \delta g \partial_- (g^{-1} \partial_+ g)] = 2i\epsilon_- \int d^2x \operatorname{tr} [\psi_+ \partial_- (g^{-1} \partial_+ g)] \quad (7.37)$$

Просуммировав эти две вариации (7.37) и (7.36), мы получим полную производную. Одно важное замечание в этом выводе состоит в том, что преобразование (7.35) работает для любого выбранного  $k$ . Это глубоко связано с фактом, обнаруженным в предыдущем разделе: для двумерной КХД с массивными фермионами и безмассовыми фермионами мы всегда можем выбрать массу  $m_{\text{adj}}$ , чтобы модель стала суперсимметричной.

Теперь мы покажем, что симметрия (7.35) ответственна за суперсимметричные преобразования. Для этого мы хотим сделать следующее простое преобразование действия (7.6), которое привело бы его к виду, похожему на  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричного ВЗВ. Итак, мы выбираем калибровку  $A_- = 0$ , как и в предыдущем случае, но замечаем, что всегда можно найти элемент группы  $g \in G$  такой, что

$$A_- = 0, \quad A_+ = -ig^{-1} \partial_+ g, \quad \mathcal{D}_- = \partial_-, \quad \mathcal{D}_+ = g^{-1} \cdot \partial_+ \cdot g, \quad (7.38)$$

что позволяет переписать действие следующим образом

$$\begin{aligned} S = \int d^2x \operatorname{tr} \left[ -\frac{1}{2g_{\text{YM}}^2} (\partial_- (g^{-1} \partial_+ g))^2 + i\psi_+ \partial_- \psi_+ + ig\psi_- g^{-1} \partial_- (g\psi_- g^{-1}) + i\sqrt{2}m_{\text{adj}}\psi_+ \psi_- + \right. \\ \left. + i\bar{v}_+ \partial_- v_+ + i\bar{v}_- \rho(g^{-1}) \partial_+ (\rho(g)v_-) \right], \end{aligned} \quad (7.39)$$

Мы можем легко избавиться от  $g$  в действии, сделав преобразование  $v_- \rightarrow \rho(g)v_-$  и  $\psi_- \rightarrow g^{-1}\psi_-g$ , что можно сделать без больших проблем, но цена, которую мы должны заплатить, - это добавить член ВЗВ, потому что фермионная мера не инвариантна при этих преобразованиях. После такого вращения безмассовые фермионы "отвязываются" от действия. Эти безмассовые состояния все еще присутствуют, но они не взаимодействуют с калибровочным полем, в то время как взаимодействующие степени свободы могут быть представлены с помощью действия ВЗВ.

Например, если мы рассмотрим  $G = SU(N)$  и рассмотрим  $N_f$  фермионов, то существует хорошо известное соотношение [129]

$$S = \sum_{\alpha=1}^{N_f} \int d^2x \bar{\psi}_{i\alpha} \not{\partial} \psi_{i\alpha} \leftrightarrow \int d^2x [N_f W[g] + N_c W[h] + (\partial\phi)^2], \quad (7.40)$$

где  $g \in SU(N)$ ,  $h \in SU(N_f)$  и  $\phi$  представляют собой общую фазу. Видно, что калибровочные поля взаимодействуют только с  $W[g]$ , а  $W[h]$  и  $\phi$  выпадают из члена взаимодействия.

Отметим, что в аксиальной калибровке призраки Ф.Попова не взаимодействуют с остальной системой и поэтому ими можно пренебречь. В итоге мы получаем следующее действие

$$S = \int d^2x \text{tr} [i\psi_+ \partial_- \psi_+ + i\psi_- \partial_+ \psi_-] + kW[g] + \int d^2x \text{tr} \left[ i\sqrt{2}m_{\text{adj}}\psi_- g\psi_+ g^{-1} - \frac{1}{2g_{\text{YM}}^2} (\partial_- [g^{-1}\partial_+ g])^2 \right], \quad (7.41)$$

где коэффициент  $k = c_f + k_0$  перед действием ВЗВ происходит отдельно от фермионов  $c_f$  и безмассовой части  $k_0$ . Это действие очень похоже на рассмотренное выше, и поэтому естественно предположить, что то же преобразование (7.35) оставляет действие (7.41) инвариантным. Прямое вычисление показывает, что к преобразованию нужно добавить следующие члены, чтобы все было согласовано (для краткости мы рассматриваем только  $\epsilon_- = 0$ , "плюсовая" часть преобразований может быть легко записана аналогичным образом)

$$\delta g = \frac{4\pi i}{k} \epsilon_- g\psi_+, \quad \delta\psi_- = \epsilon_- \frac{\pi m_{\text{adj}}}{\sqrt{2}g^2 k} gF_{+-} g^{-1}$$

$$\delta\psi_+ = \epsilon_- \left( g^{-1}\partial_+ g - \frac{4\pi i}{k} \psi_+^2 \right) + \frac{\pi}{g_{\text{YM}}^2 k} \epsilon_- \left( \frac{1}{2} m_{\text{adj}}^2 g^{-1}\partial_+ g - \mathcal{D}_+ F_{-+} \right), \quad (7.42)$$

Мы можем легко проверить, что при этих преобразованиях все действие инвариантно. Действительно, вариация янг-милсовской части действия имеет вид

$$\delta (g^{-1}\partial_+ g) = \frac{2\pi i}{k} \epsilon_- [\partial_+ + \text{ad}(g^{-1}\partial_+ g)] \psi_+, \quad \text{ad}(g^{-1}\partial_+ g)\psi_+ = [g^{-1}\partial_+ g, \psi_+]$$

$$\delta S_{\text{YM}} = \frac{4\pi i \epsilon_-}{g_{\text{YM}}^2 k} \int d^2x \text{tr} [\mathcal{D}_+ F_{-+} \partial_- \psi_+], \quad (7.43)$$

Тогда мы имеем следующие дополнительные члены в фермионной части действия

$$\delta S_- = \int d^2x \epsilon_- \text{tr} \left[ \frac{2\pi i m_{\text{adj}}}{\sqrt{2}g_{\text{YM}}^2 k} gF_{+-} g^{-1} [2\partial_+ \psi_- + \sqrt{2}m_{\text{adj}}g\psi_+ g^{-1}] \right],$$

$$\delta S_+ = \frac{2\pi i}{g_{\text{YM}}^2 k} \int d^2x \epsilon_- \text{tr} \left[ \left( \frac{1}{2} m_{\text{adj}}^2 g^{-1}\partial_+ g - \mathcal{D}_+ F_{-+} \right) [2\partial_- \psi_+ - \sqrt{2}m_{\text{adj}}g^{-1}\psi_- g] \right],$$

$$\delta S_m = -\sqrt{2}i\epsilon_- m_{\text{adj}} \int d^2x \text{tr} [\psi_- \partial_+ g g^{-1}] \quad (7.44)$$

Комбинируя все  $\delta S_-$ ,  $\delta S_+$ ,  $\delta S_{YM}$ , мы получаем следующую вариацию

$$\delta S = \frac{\sqrt{2}\pi i m_{\text{adj}}^3 \epsilon_-}{g_{\text{YM}}^2 k} \text{tr} [\psi_- \partial_+ g g^{-1}], \quad (7.45)$$

где мы проинтегрировали по частям и использовали  $\mathcal{D}_+(g^{-1}\psi_-g) = g^{-1}\partial_+\psi_-g$ . Добавив вариацию  $\delta S_m$  (7.44) мы получаем

$$\frac{\sqrt{2}\pi m_{\text{adj}}^3}{g_{\text{YM}}^2 k} = \sqrt{2}m_{\text{adj}}, \quad m_{\text{adj}}^2 = \frac{g_{\text{YM}}^2 k}{\pi}, \quad (7.46)$$

что совпадает с результатами предыдущего раздела. Теперь вычислим квадрат оператора  $Q$  (7.25)

$$\{Q, Q\} = \frac{k + c_f}{4\pi} \int \frac{dp_1}{2\pi} \psi_i(-p_1) p_1 \psi_i(p_1) + \int \frac{dp_1}{2\pi} J_i^v(-p_1) J_i^v(p_1), \quad (7.47)$$

Хотя легко видеть, что он не совпадает с оператором импульса всей системы, тем не менее, он воспроизводит оператор импульса взаимодействующей части, описываемой действием (7.41)<sup>2</sup>. Это показывает, что  $Q$  действительно является оператором суперсимметрии для модели КХД с фермионами и действительно эта суперсимметрия связана с  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричными моделями ВЗВ. Можно заметить, что рассматриваемое в этом разделе суперсимметричное преобразование выглядит как калибровочное преобразование с калибровочным параметром  $\epsilon_- \psi_+$  (в двух измерениях суперсимметричные преобразования калибровочных теорий действительно могут быть представлены в такой форме). Причина, по которой в этом случае суперсимметрия требует дополнительного массового члена для присоединенных фермионов, заключается в чувствительности к киральным преобразованиям меры. Оригинальные преобразования суперсимметрии нарушают киральную симметрию, и чтобы учесть изменение меры, мы должны добавить к действию дополнительные члены (что является просто вариацией члена ВЗВ), которые должны и могут быть компенсированы массовым членом для фермионных полей.

## 7.5 Возможные обобщения

Одним из интересных обобщений предложенного механизма для построения суперсимметричных калибровочных теорий в двух измерениях было бы использование теории косета  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных ВЗВ-моделей [297, 184, 185]. Хорошо

<sup>2</sup>Я хотел бы поблагодарить С.Пуфу и И.Клебанова за обсуждение и проверку этого соотношения

известно, что такие модели могут приводить к  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии. Суперсимметричное действие в этом случае имеет следующий вид

$$S = kW[g] + \frac{1}{2\pi} \int d^2z \operatorname{tr} [B_- g^{-1} \partial_+ g - B_+ \partial_- g g^{-1} - B_- B_+ + B_- g^{-1} B_+ g] + \frac{i}{4\pi} \int d^2z \operatorname{tr} [\psi_+ \mathcal{D}_-^B \psi_+ + \psi_- \mathcal{D}_+^B \psi_-], \quad (7.48)$$

где  $B$  - калибровочное поле, которое принадлежит подалгебре  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  и  $\psi_{\pm}$  принадлежат подпространству  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ . При общих предположениях эта модель станет  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной. Было бы очень интересно использовать эту суперсимметрию для построения  $\mathcal{N} = 2$  модели КХД. Тем не менее, препятствием является введение дополнительного калибровочного поля  $B_{\pm}$ , которое также "калибрует" исходное калибровочное поле.

## 7.6 Обозначения и условности

В этом разделе мы приводим все условные обозначения, которые использовались в основной части этой главы. В двумерном пространстве-времени удобно изучать его в координатах светового конуса

$$ds^2 = 2dx^+ dx^-, \quad x^{\pm} = \frac{t \pm x}{\sqrt{2}}, \quad \eta_{+-} = \eta_{-+} = 1, \quad \gamma^+ = (\gamma^-)^T = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.49)$$

Мы представляем нашу калибровочную группу  $G$  с помощью ее алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , мы выбираем следующий базис эрмитовых матриц  $T^i$ :

$$T^i \in \mathfrak{g}, \quad [T^i, T^j] = i f_{ijk} T^k, \quad \operatorname{tr} [T^i T^j] = \frac{1}{2} \delta^{ij}, \quad (7.50)$$

константы структуры  $f_{ijk}$  полностью антисимметричны и удовлетворяют тождеству Якоби.

Фермионное поле в присоединённом представлении может быть разложено относительно этого базиса следующим образом

$$\Psi = \Psi^i T^i, \quad \Psi^i = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \begin{pmatrix} \psi_+^i \\ \psi_-^i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \bar{\Psi} = \Psi^T \gamma^0. \quad (7.51)$$

Предполагается, что безмассовое фермионное поле находится в некотором пред-

ставлении (это не обязательно должно быть неприводимое представление)

$$v = \begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix}, \quad v_{\pm} = \{v_{\pm}^{\alpha}\} \in \mathbb{C}^n = \mathcal{R}, \quad \bar{v} = v^{\dagger} \gamma^0,$$

$$\rho_{\mathcal{R}} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathcal{R}), \quad \rho_{\mathcal{R}}(T^i)_{\beta}^{\alpha} = \tau_{\beta}^{i\alpha} \quad (7.52)$$

Калибровочное поле  $A_{\mu} \in \mathfrak{g}$  принадлежит присоединенному представлению группы  $G$  и снова может быть разложено с помощью базиса  $T^i$

$$A_{\mu} = A_{\mu}^i T^i, \quad (7.53)$$

Ковариантная производная определяется следующим образом

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu} &= \partial_{\mu} + iA_{\mu}, & F_{\mu\nu} &= -i[\mathcal{D}_{\mu}, \mathcal{D}_{\nu}] = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} + i[A_{\mu}, A_{\nu}] = F_{\mu\nu}^i T^i, \\ \mathcal{D}_{\mu}\Psi &= \partial_{\mu}\Psi + i[A_{\mu}, \Psi], & \mathcal{D}_{\mu}v &= \partial_{\mu}v + i\rho(A_{\mu})v, \\ (\mathcal{D}_{\mu}\Psi)^i &= \partial\Psi^i - f_{ijk}A^j\Psi^k, & (D_{\mu}v)^{\alpha} &= \partial_{\mu}v^{\alpha} + iA_{\mu}^i \tau_{\beta}^{i\alpha} v^{\beta}, \\ F_{+-}^i &= \partial_+ A_-^i - \partial_- A_+^i - f^{ijk} A_+^j A_-^k, \end{aligned}$$

где  $F_{+-}^i$  - единственная ненулевая компонента кривизны  $F_{\mu\nu}$  в двух измерениях.

# Глава 8

## Магические углы скрученного двухлистного графена

### 8.1 Введение

Скрученный двулистный графен (ТБГ) в последнее время привлекает большое внимание физического сообщества благодаря своим интересным свойствам и применениям [59] - [298]. Одной из наиболее заметных особенностей является недавнее открытие сверхпроводимости, которое наблюдается в узком диапазоне углов вблизи  $\theta = 1.05^\circ$ , который обычно называют магическим углом. При этом угле в системе возникает почти плоская зона. Недавно такая плоская зона была аналитически исследована в киральной модели ТБГ, в которой пренебрегается взаимодействием внутри одних и тех же подрешеток разных листов ТБГ [283]. В данной работе мы продолжаем исследование математических структур плоской зоны и демонстрируем связь математических свойств таких плоских зон с теорией векторных пучков над римановыми поверхностями высших родов, что может дать более глубокое понимание физики киральной модели скрученного двулистного графена. С физической точки зрения это позволит изучить поведение такой системы во внешнем магнитном поле.

ТБГ состоит из двух графеновых листов, расположенных друг на друге под небольшим углом  $\theta \ll 1$ , которые образуют длиннопериодный узор (муаровый узор). Можно оценить, что период полученной сверхрешетки порядка  $L(\theta) \sim \frac{a}{\theta} \gg a$ , где  $a$  - постоянная решетки графена. Это позволяет рассматривать континуальную модель для гамильтониана вместо решеточной. Такой подход использовали Бист-

ризер и Макдональд [48, 49] и Лопес дос Сантос [224]. Таким образом, мы можем записать эффективный гамильтониан для этой модели [283] в виде

$$H_0 = \begin{pmatrix} iv_0 \vec{\sigma}_{\theta/2} \vec{\nabla} & T(r) \\ T^\dagger(r) & iv_0 \vec{\sigma}_{-\theta/2} \vec{\nabla} \end{pmatrix}, T(r) = \begin{pmatrix} t_{aa}(r) & t_{ab}(r) \\ t_{ba}(r) & t_{bb}(r) \end{pmatrix}$$

где мы уже использовали тот факт, что сверхрешетка намного больше межатомного расстояния в каждой решетки отдельных листов графена. Поэтому мы можем использовать уравнение Дирака для описания возбуждений в каждом отдельном листе графена. Внедиагональный член  $T$  отвечает за прыжки между листами ТБГ и подрешетками  $a$  и  $b$  отдельных графеновых листов. Член  $H_0$  действует на четырехмерную волновую функцию  $\Psi = (\psi_{a1}, \psi_{b1}, \psi_{a2}, \psi_{b2})^T$ , где второй индекс соответствует листам графена, а первый - соответствует подрешеткам отдельных листов графена.

Численное исследование этой модели подтвердило существование плоской зоны при магическом угле  $\theta_1^* \approx 1.05^\circ$ . В рассматриваемой здесь модификации пренебрегаются константами взаимодействия между подрешетками графена  $t_{aa} = t_{bb} = 0$ . В этом случае система приобретает дополнительную хиральную симметрию и обычно называется *кирально симметричной моделью* (КСМ). После соответствующего изменения базиса гамильтониан КСМ может быть приведён к следующему виду

$$H = UH_0U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D} \\ \mathcal{D}^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 2i\bar{\partial} + W(\vec{r}) & V(\vec{r}) \\ U(\vec{r}) & 2i\bar{\partial} - W(\vec{r}) \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

где  $\vec{r}$  - вектор в 2d графеновом листе,  $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$  - антиголоморфная производная вдоль листа, а  $V(r), U(r)$  - потенциалы взаимодействия между двумя листами ТБГ, которые могут быть выражены линейно через  $t_{ab}(r)$  и  $t_{ba}(r)$ . Этот гамильтониан действует на волновые функции  $\Psi_U = U\Psi = (\phi, \psi)^T = (\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2)^T$ .

Спектр модели находится путем решения следующей задачи на собственные значения

$$H\Psi_U = E\Psi_U \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{D}\psi = E\phi \\ \mathcal{D}^*\phi = E\psi \end{cases} \quad (8.2)$$

Поскольку нас интересует существование плоской зоны при  $E = 0$ , эти уравнения



упрощаются, и мы должны изучать только следующее уравнение

$$-\frac{i}{2}\mathcal{D}\psi = (\bar{\partial} + \bar{A})\psi = 0, \quad \mathcal{D}^*\phi = 0 \quad (8.3)$$

$$\text{where } \bar{A} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} -W(\vec{r}) & V(\vec{r}) \\ U(\vec{r}) & W(\vec{r}) \end{pmatrix},$$

Благодаря усиленной хиральной симметрии уравнения на  $\psi$  и  $\phi$  отщепляются, что позволяет провести более глубокое аналитическое исследование свойств КСМ модели. Эти уравнения можно интерпретировать как уравнение Дирака в неабелевом магнитном поле  $\bar{A} \in \mathfrak{su}(2)$  на римановой поверхности [270]. Поскольку мы изучаем периодическую мы должны наложить блоховские граничные условия <sup>1</sup>

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{a}_{1,2}) = e^{i\vec{k}\vec{a}_{1,2}}\psi_{\vec{k}}(\vec{r}), \quad (8.4)$$

где  $\vec{a}_{1,2}$  являются периодами муаровой сверхрешетки, а вектор  $\vec{k}$  определяет положение в зоне Бриллюэна (МБЗ) для сверхрешетки. Если решение существует для любой точки  $k$  в зоне МБЗ, то тогда система автоматически имеет плоскую зону. Можно показать, что такие потенциалы существуют [283]. Но для общего выбранного потенциала  $\bar{A}$  система уравнений (8.3) и (8.4) имеет гладкое конечное решение *только* при конечном числе точек  $k$  в МБЗ.

*Цель данной главы* заключается в том, чтобы рассмотреть произвольный  $\bar{A}$  в уравнении (8.3) и получить общие свойства, не зависящие от конкретной формы  $\bar{A}$ , которые могут пролить свет на физику, лежащую в основе модели КСМ. Наш главный результат состоит в том, что, когда система обладает плоской зоной, мы можем разделить ТБГ на систему из двух отдельных листов с положительными и отрицательными эффективными магнитными полями, что поддерживает уровни Ландау различной хиральности [156]. Отрицательное магнитное поле может быть сокращено внешним магнитным полем, что приведет к появлению дополнительных плоских зон. Таким образом, число плоских зон увеличивается в присутствии магнитного поля.

---

<sup>1</sup>Примечание: в [283] авторы ввели дополнительный матричный поворот в граничные условия. Можно показать, что на результаты нашей работы это изменение не влияет, поэтому для простоты аргументации мы будем рассматривать только граничные условия вида (8.4)

## 8.2 Интеграл Ферми, нули волновых функций и плоская зона

Для простоты рассмотрим только уравнение (8.3) без учёта граничных условий (8.4):

$$\mathcal{D}\psi = (\bar{\partial} + \bar{A})\psi = 0, \psi = (\psi_1, \psi_2)^T \in \mathbb{C}^2, \text{tr } \bar{A} = 0 \quad (8.5)$$

Мы начнем с изучения свойств векторнозначных функций  $\psi$ , удовлетворяющих уравнению  $\mathcal{D}\psi = 0$ . Такие уравнения широко изучаются в различных областях математики. Поэтому для упрощения дальнейших вычислений и использования результатов мы используем некоторую математическую терминологию. Мы предполагаем, что наш ТБГ разделен на геометрические области  $U_\alpha$  таким образом, что при переходе от одной области к другой мы должны соответствующим образом изменить векторнозначную функцию  $\psi$ :

$$\begin{pmatrix} \psi_{1\alpha} \\ \psi_{2\alpha} \end{pmatrix} = g_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} \psi_{1\beta} \\ \psi_{2\beta} \end{pmatrix}.$$

О наборе  $\psi = \{\psi_\alpha\}$  говорят, что она является сечением векторного пучка  $E$ , который представляет собой совокупность доменов  $\{U_\alpha\}$  с функциями переклейки  $g_{\alpha\beta}$ . Если существует только один домен, то пучок считается тривиальным. Пример нетривиального векторного пучка можно получить, разделив ТБГ на множество фундаментальных доменов с помощью трансляций  $\vec{a}_{1,2}$ . Функции трансляции в этом случае являются граничными условиями (8.4).

С математической точки зрения голоморфное уравнение  $\bar{\partial}\psi = 0$  аналогично уравнению (8.5):  $\mathcal{D}\psi = 0$ . Тогда математики говорят, что если  $\mathcal{D}\psi = 0$ , то волновая функция  $\psi$  - *мероморфная* функция, а  $\bar{A}$  - голоморфная связность. Если  $\psi$  также конечна всюду, то мы назовем такую функцию *голоморфной*. Удобство такой терминологии заключается в том, что такие  $\psi$  имеют много общих свойств с обычными голоморфными функциями, изучаемыми в комплексном анализе.

С физической точки зрения, любая волновая функция должна быть конечной. Поэтому мы должны предположить, что  $\psi$  также является *голоморфной* функцией в указанном выше смысле векторного пучка <sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Строго говоря, мы можем допустить интегрируемые сингулярности типа  $1/z^{1/4}$ , но они не согласуются с уравнением (8.5), поскольку мы предполагаем, что  $\bar{A}$  не имеет полюсов

Рассмотрим два конечных решения  $\psi_1, \psi_2$  уравнения (8.5). Можно вычислить вронскиан этих решений

$$I_F(\psi_1, \psi_2) = \det(\psi_1, \psi_2) = I_F(r), \quad \text{then}$$

$$\bar{\partial}I_F(r) = -\text{tr } \bar{A} \cdot I_F(r), \quad \text{tr } \bar{A} = 0 \Rightarrow I_F(r) = I_F(z), \quad (8.6)$$

где мы использовали тот факт, что  $\bar{A} \in \mathfrak{su}(2)$  и, следовательно,  $\text{tr } \bar{A} = 0$ . Мы приходим к выводу, что вронскиан  $I_F(z)$  должен быть аналитической функцией. Если  $\psi_{1,2}$  всюду конечна, то  $I_F(z)$  голоморфна и, следовательно, должна быть постоянной (в силу теоремы Лиувилля). Благодаря этому свойству мы можем рассматривать  $I_F$  как интеграл движения уравнения (8.5). Это свойство может быть обобщено на другие системы и даст необходимое и достаточное условие для существования плоской зоны в системе.

### 8.2.1 Плоские зоны и зануление интеграла Ферми $I_F = 0$

Здесь мы доказываем, что плоская зона может существовать, если только  $I_F = 0$ . Для применения к ТБГ мы должны изучить уравнение (8.3) на торе, как это было объяснено в предыдущем разделе. А именно, мы можем рассматривать ТБГ как тор  $\mathbb{C}/\Lambda$ , где  $\Lambda = ma_1 + na_2$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $a_{1,2} = a_{1,2}^x + ia_{1,2}^y$ . Мы должны наложить граничные условия (8.4), чтобы склеить волновую функцию при сдвиге вдоль решетки  $\Lambda$ . Эти граничные условия являются функциями переклейки векторного пучка над тором. Без потери общности мы зададим  $a_1 = 1$  и  $a_2 = \tau$ .

Определим  $\mathbb{C}_K^2$  как векторный пучок с граничными условиями (функциями склейки) (8.4) с квазимпульсом  $K$ . Опять же, уравнение (8.5) со связностью  $\bar{A}$  определяет мероморфное сечение этого векторного пучка.

Мы предполагаем, что в МБЗ существует по крайней мере две точки  $K_1, K_2$ , в которых решение существует. Подчеркнем, что  $K_{1,2}$  отличаются от особых точек  $K, K'$ , обычно рассматриваемых при изучении ТБГ, где в силу дискретной симметрии  $C_3$  зона должна иметь нулевую энергию  $E = 0$ . Конечно, в ТБГ потенциал должен соблюдать симметрию  $C_3$ , и поэтому точки Дирака должны существовать в точках  $K, K'$ . Но в общем скрученном двухслойном материале такая симметрия может отсутствовать, и, чтобы сделать обсуждение более общим, мы сделаем предположение, что есть по крайней мере две точки  $K_{1,2}$ , в которых закрывается щель. Поэтому для сохранения общности обсуждения мы просто предположим, что бла-

годаря некоторому удачному выбору  $\bar{A}$  в уравнении (8.3) система имеет нулевую энергию в некоторых точках  $K_{1,2}$  МБЗ.

Соотношение (8.6) по-прежнему справедливо, так как оно не чувствительно к граничным условиям. Если у нас есть два голоморфных решения  $\psi_{K_{1,2}}$  в двух разных точках зоны Бриллюэна  $K_{1,2}$ , то мы можем вычислить вронскиан

$$I_{F,K_1+K_2}(z) = I_F(\psi_{K_1}, \psi_{K_2}) = \det(\psi_{K_1}, \psi_{K_2}), \quad (8.7)$$

, но поскольку  $I_F(z)$  голоморфно и ограничено в комплексной плоскости ТБГ (в силу условий периодичности (8.4) и того факта, что  $\psi_{K_1}, \psi_{K_2}$  конечны), мы должны заключить, что  $I_F(z) = \text{const}$ . Более того, используя граничные условия (8.4), имеем

$$I_{F,K_1+K_2}(z + a_{1,2}) = I_{F,K_1+K_2}(z) e^{i(K_1+K_2)a_{1,2}}, \quad (8.8)$$

Но если  $K_1 + K_2 \neq 0$  и  $I_F(z)$  постоянны, то граничные условия удовлетворяются только в случае  $I_F(z) = 0$ . Следовательно, существуют только две возможности:

1.  $I_F(z) = 0$  и  $K_1, K_2$  произвольные.
2.  $I_F(z) \neq 0$ , но  $K_1 = -K_2$ .

Начнем со второго случая. Нормируем решения так, чтобы  $I_F = 1$ . Тогда сразу получаем, что  $\psi_{K_1}, \psi_{-K_1}$  нигде не равны нулю, так как в противном случае вронскиан был бы равен нулю в точках, где  $\psi_{\pm K_1} = \vec{0}$ . Поскольку  $I_F(z)$  ненулевая, то решения  $\psi_{K_1}$  и  $\psi_{-K_1}$  линейно независимы в каждой точке ТБГ. Если теперь рассмотреть матрицу  $M = (\psi_{K_1}, \psi_{-K_1})$ , то она удовлетворяет следующему уравнению

$$(\bar{\partial} + \bar{A}) M = 0, \quad \bar{A} = -\bar{\partial} M \cdot M^{-1}, \quad (8.9)$$

где мы использовали тот факт, что если  $\det M \neq 0$ , то матрица  $M$  является обратной. Отметим, что уравнение (8.9) не означает, что  $\bar{A}$  является чистой калибровкой (и, следовательно, плоской связностью), но поскольку  $M \in SL(2, \mathbb{C})$ , а не  $SU(2)$  и поэтому не является истинным калибровочным преобразованием.

Рассмотрим другое решение  $\psi$  уравнения (8.5). Поскольку  $\psi_{\pm K_1}$  линейно независимы, мы всегда можем представить  $\psi$  как линейную комбинацию этих решений:

$$\psi = v_1(r)\psi_{K_1} + v_2(r)\psi_{-K_1},$$

Применяя оператор  $D = \bar{\partial} + \bar{A}$ , получаем.

$$D\psi = \bar{\partial}v_1 \psi_{K_1} + \bar{\partial}v_2 \psi_{-K_1} = 0. \quad (8.10)$$

Поскольку  $\psi_{\pm K_1}$  линейно независимы в каждой точке тора  $\mathbb{C}/\Lambda$ , из этого следует, что коэффициенты  $v_i$  должны быть голоморфными  $\bar{\partial}v_i = 0$ . Функции  $\psi$  и  $\psi_{\pm K_1}$  конечны и ненулевые всюду, следовательно,  $v_i$  ограничены. Из принципа максимума для аналитических функций на комплексной плоскости следует, что  $v_i$  постоянны. Поэтому, если мы имеем произвольное решение уравнения (8.5) в точке  $k$  зоны Бриллюэна, мы должны иметь

$$\psi_k = v_{k,K_1} \psi_{K_1} + v_{k,-K_1} \psi_{-K_1}, \quad v_{k,\pm K_1} \in \mathbb{C}, \quad (8.11)$$

Но легко видеть, что при любом выборе чисел  $v_{\pm K_1}$  мы не можем удовлетворить граничным условиям (8.4) в МБЗ. Поэтому мы не можем иметь плоскую зону, если  $I_F \neq 0$ .

Докажем обратное. А именно, если  $I_F = 0$  для некоторых точек  $K_1, K_2$  в МБЗ, то в системе образуется плоская зона. Другими словами, уравнение (8.5) имеет решение в любой точке  $k$  в МБЗ. Начнем с того, что поскольку  $I_F(z) = 0$  и  $\psi_{K_1, K_2}$  удовлетворяют уравнению (8.5), то волновая функция  $\psi_{K_1}$  имеет нуль. Докажем это утверждение с помощью противоречия. Предположим обратное: что  $\psi_{K_1}(r) \neq 0$  в любой точке тора,  $\mathbb{C}/\Lambda$ , или фундаментальной области ТБГ. Поскольку тор компактен, то минимум  $\min_{r \in \mathbb{C}/\Lambda} |\psi_{K_1}(r)| = m > 0$  достигим. Если  $I_F(z) = 0$  волновые функции  $\psi_{K_1, K_2}$  пропорциональны друг другу:

$$\psi_{K_2}(r) = \gamma(r) \psi_{K_1}(r), \quad D\psi_{K_2} = \bar{\partial}\gamma(r) \psi_{K_1}(r) = 0,$$

где  $\gamma(r)$  ограничена как  $|\gamma(r)| < \frac{|\psi_{K_2}(r)|}{m}$  и голоморфна  $\bar{\partial}\gamma(r) = 0$ . Тогда функция  $\gamma(r) = \gamma(z)$  должна быть постоянной по принципу максимума. Однако это невозможно, так как  $\psi_{K_1, K_2}$  удовлетворяет различным граничным условиям. Отсюда следует вывод, что  $\psi_K$  имеет по крайней мере один простой ноль<sup>3</sup>.

Теперь мы можем следовать процедуре, описанной в работе [283], и построить решение в любой точке  $k$  зоны Бриллюэна. Конкретный потенциал, изученный в [283], обладает дополнительным свойством:  $I_F \propto v_F$ , и, следовательно, такое решение подразумевало существование плоской зоны. Нашими рассуждениями удалось обобщить это условие на произвольный потенциал  $\bar{A}$ .

<sup>3</sup>Голоморфность  $\gamma(z)$  позволяет заключить, что волновая функция имеет простой ноль  $\psi_K(z) \sim f(\bar{z})(z - z_0) + \mathcal{O}(z - z_0)$ , а не какое-то неаналитическое поведение

### 8.3 Сингулярная волновая функция

Из существования голоморфного сечения с нулем в любой точке  $K$  зоны Бриллюэна можно сделать некоторые интересные выводы. Мы будем считать, что  $\psi_K$  имеет один простой ноль, но это можно легко обобщить на случай множества нулей.

Заметим, что при общем  $K$  может существовать только один голоморфный участок  $\psi_K$ . Действительно, если существуют два голоморфных линейно независимых сечения  $\psi_K^{1,2}$ , то их вронскиан должен быть голоморфной ненулевой двойной периодической функцией с определенными граничными условиями. Но из этого следует, что  $2K = 0 \pmod{\Lambda}$  и вронскиан постоянен. Мы приходим к выводу, что если другое решение существует, то оно должно быть мероморфным.

Объясним, почему сингулярная волновая функция, удовлетворяющая уравнениям (8.3) и (8.4), действительно существует. Голоморфное сечение  $\psi_K$  (волновая функция плоской зоны) пучка  $\mathbb{C}_K^2$  образует подрасслоение, которое мы обозначим как  $\gamma$ . Тогда можно рассмотреть точную короткую последовательность:

$$0 \rightarrow \gamma \rightarrow \mathbb{C}_K^2 \rightarrow (\gamma)^\perp \rightarrow 0 \quad (8.12)$$

, где  $(\gamma)^\perp = \mathbb{C}_K^2/\gamma$ . Грубо говоря, мы разбиваем двумерное гильбертово пространство на два одномерных. Первое определено вдоль функции плоской зоны  $\psi_K$  в каждой точке ТБГ. Второе - вдоль любой другой линейно независимой волновой функции. В качестве примера можно рассматривать ортогональную волновую функцию  $\psi_\perp$ ,  $(\psi_\perp, \psi) = 0$ .

Пучки  $\gamma$  и  $(\gamma)^\perp$  или волновые функции  $\psi$  и  $\psi_\perp$  являются одномерными волновыми функциями на периодическом ТБГ и поэтому им можно присвоить (первые) числа Черна  $c_1$ . Эти числа можно вычислить аналогично тому, как это делается в случае обычных чисел Черна в топологических изоляторах, но при этом вычисления производятся не в пространстве импульсов, а в реальном пространстве. С математической точки зрения [140] число Черна  $c_1$  - это просто число нулей минус число полюсов. Поскольку расслоение  $\mathbb{C}_K$  в некотором смысле тривиально, числа Черна для подрасслоений  $\gamma$  и  $(\gamma)^\perp$  должны удовлетворять следующему соотношению

$$c_1((\gamma)^\perp) = -c_1(\gamma), \quad (8.13)$$

из которого следует, что если  $\gamma$  имеет голоморфное сечение, то  $(\gamma)^\perp$  имеет такое же

сечение, но вместо нуля у него есть полюс. Этого рассуждения недостаточно для доказательства её существования, поскольку (8.12) может не расщепляться. Другими словами, волновая функция  $\psi_{\perp}$  плохо определена: обход цикла тора не только даст фазу, но и добавит член пропорциональный  $\psi$ . С физической точки зрения это означает, что мы не можем просто представить эту двумерную систему как сумму из двух топологических материалов с противоположными числами Черна.

К счастью, теория векторных пучков над римановыми поверхностями активно изучалась Дональдсоном [97]. Можно показать, что короткая последовательность (8.12) расщепляется над тором. Ниже мы представим физическую конструкцию, с помощью которой можно найти решение в явном виде. В приложении 8.6 мы докажем существование с помощью алгеброгеометрических методов.

Начнем с голоморфного участка  $\psi_K$ , который является решением уравнения (8.5), удовлетворяет граничным условиям (8.4) и имеет нуль в некоторой точке  $z_0$ . Предположим, что нам каким-то образом удалось найти другое решение  $\phi_K$ , линейно независимое от  $\psi_K$ . Если такое решение существует, то вронскиан  $\tilde{I}(\psi_K, \phi_K)$  должен быть мероморфной функцией

$$\det(\psi_K, \phi_K) = \tilde{I}(z), \quad (8.14)$$

, удовлетворяющей двойным периодическим граничным условиям  $\tilde{I}(z + a_{1,2}) = e^{2i\vec{K}\vec{a}_{1,2}}\tilde{I}(z)$  (см. (8.4)). В отличие от предыдущего раздела,  $\phi_K$  может иметь полюса, поэтому мы не можем заключить, что  $\tilde{I}$  постоянна. Однако аналитическая функция с такими свойствами существует и единственна с точностью до нормировочного коэффициента [140]. А именно, эта функция представляется в виде

$$\tilde{I}(z) = e^{2i\vec{K}\vec{a}_1 z} \frac{\vartheta(z - z_0; \tau)}{\vartheta(z - z_{\infty}; \tau)}, \quad z_0 - z_{\infty} = \vec{K} \frac{\vec{a}_2 - \tau \vec{a}_1}{\pi}$$

где  $\vartheta(z; \tau)$  - тэта-функция Якоби. Поскольку  $\psi_K$  всюду конечна,  $\phi_K$  должна иметь полюс в точке  $z = z_{\infty}$ . Отсюда получаем простое линейное уравнение, которому  $\phi_K$  должно удовлетворять

$$\phi_K^1 \psi_K^2 - \phi_K^2 \psi_K^1 = \tilde{I}(z) \quad (8.15)$$

Определив  $\tilde{I}$ , построим теперь  $\phi_K$ . В любой точке  $z \in \mathbb{C}/\Lambda$  это уравнение имеет хотя бы одно решение. Поскольку в точке  $z = z_0$  обе стороны уравнения (8.15) имеют простой нуль, мы можем аналитически продолжить решение в эту точку.

Выберем произвольное решение уравнения (8.15) и обозначим его как  $\zeta_K(r)$ . Любое другое решение уравнения (8.15) имеет вид

$$\zeta_K^\lambda(r) = \zeta_K(r) + \lambda(r)\psi_K, \quad (8.16)$$

где  $\lambda(r)$  - произвольная функция.

Мы можем вывести уравнения для функции  $\zeta_K(r)$ . А именно, применим оператор  $\bar{\partial}$  к вронскиану, чтобы получить

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\tilde{I}(z) &= \bar{\partial} \det(\psi_K, \zeta_K) = \\ &= \det(\mathcal{D}\psi_K, \zeta_K) + \det(\psi_K, \mathcal{D}\zeta_K) = \\ &= \det(\psi_K, \mathcal{D}\zeta_K) = 0 \end{aligned} \quad (8.17)$$

Это означает, что в общем случае  $\mathcal{D}\zeta_K$  пропорциональна волновой функции  $\psi_K$

$$\mathcal{D}\zeta_K = \eta(r)\psi_K, \quad (8.18)$$

для некоторой функции  $\eta(r)$ , которая может иметь сингулярности. Чтобы пояснить, что мы сделали, решение  $\zeta_K$  является просто произвольным решением уравнения (8.15) и не удовлетворяет уравнению (8.5). В уравнении (8.15) мы можем произвольно выбрать  $\zeta_K^1$ . Оно может иметь некоторые сингулярности. Чтобы избежать этой проблемы, зададим  $\zeta_K^1 = 1$  на торе. Тогда сингулярности в  $\zeta_K^2$  возникают только в функции  $\tilde{I}(z)$ .

Как мы уже обсуждали, функция  $\zeta_K$  выбрана произвольной, поэтому мы можем найти любое другое решение, используя уравнение (8.16). Эта свобода позволяет положить правую часть уравнения (8.18) равной нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} \zeta_K^\lambda &= \zeta_K + \lambda(r)\psi_K \\ \mathcal{D}\zeta_K^\lambda(r) &= \mathcal{D}\zeta_K(r) + \bar{\partial}\lambda\psi_K(r) = [\eta(r) + \bar{\partial}\lambda(r)]\psi_K, \end{aligned} \quad (8.19)$$

Поэтому нам остается решить следующее уравнение на торе

$$\bar{\partial}\lambda = -\eta + C\delta^{(2)}(z - z_0), \quad (8.20)$$

с периодическими граничными условиями  $\lambda(r + a_{1,2}) = \lambda(r)$ . Член, пропорциональный функции  $\delta$ , допустим, так как  $\psi_K$  имеет нуль в точке  $z = z_0$ . Для решения (8.20) произведем двумерное преобразование Фурье над тором

$$\lambda(k) = \int d^2\vec{r}\lambda(\vec{r})e^{ik_x x + ik_y y} \quad (8.21)$$



Тогда уравнение (8.20) можно привести к виду

$$\bar{k}\lambda(k) = -\eta(k) + Ce^{ikz_0}, \quad k = k_x + ik_y, \quad (8.22)$$

Это уравнение имеет решение для любого  $k$ , если мы выберем  $C = \eta(0)$ . Таким образом правая часть равна нулю при  $k = 0$ , поэтому, разделив на  $\bar{k}$ , получим

$$\lambda(k) = -\frac{k\eta(k)}{|k|^2}, \quad \lambda(0) = 0 \quad (8.23)$$

Таким образом, нам удалось найти второе решение уравнения (8.5) с граничными условиями (8.4), которое является сингулярным, но линейно независимым от голоморфного решения.

Можно проверить, что  $\lambda(r)\psi_K$  всюду конечна, и поэтому полюс из  $\zeta_K$  никак не влияет. Мы проверили численно, что если следовать описанной выше процедуре, то полученная волновая функция имеет простой полюс и удовлетворяет системе уравнений (8.5) и (8.4).

## 8.4 Скрытые уровни Ландау

В этом разделе мы используем такие единицы измерения, что основной магнитный поток  $\Phi_0 = \frac{h}{e} = 1$ . Мы имеем два решения в точке Бриллюэна  $K$ :  $\psi_K^0$  с нулём в точке  $z_0$  и  $\psi_K^\infty$  с полюсом в точке  $z_\infty$ . Мы хотим изменить базис так, что исходный оператор  $\mathcal{D}$  в (8.3) будет выглядеть очень просто. К сожалению, мы не можем сделать это с исходными  $\psi_K^\infty, \psi_K^0$ , поскольку они имеют полюс и ноль. Мы можем ввести конечные везде волновые функции  $\hat{\psi}^\infty, \hat{\psi}^0$

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^\infty &= e^{i\vec{K}\vec{a}_1z - \frac{1}{2}B_1z\bar{z}}\vartheta(z - z_\infty; \tau)\psi_K^\infty, \\ \hat{\psi}^0 &= \frac{e^{i\vec{K}\vec{a}_1z + \frac{1}{2}B_1z\bar{z}}}{\vartheta(z - z_0; \tau)}\psi_K^0, \end{aligned} \quad (8.24)$$

где  $B_1$  - постоянное магнитное поле, соответствующее потоку 1 в муаровой решетке. Тета-функция Якоби сокращает соответствующие нули и полюса.

Можно ввести матрицу  $S$ , которая меняет базис:

$$\begin{aligned} S &= (\hat{\psi}^0, \hat{\psi}^\infty) \\ \det S &= \det(\hat{\psi}^0, \hat{\psi}^\infty) = 1 \end{aligned} \quad (8.25)$$

Тогда, поскольку  $\det S = 1$ , мы можем инвертировать эту матрицу в каждой точке решетки  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Эта матрица позволяет переписать оператор Дирака в виде

$$\hat{\mathcal{D}} = S^{-1}\mathcal{D}S = \begin{pmatrix} \bar{\partial} - \frac{1}{2}B_1z & 0 \\ 0 & \bar{\partial} + \frac{1}{2}B_1z \end{pmatrix}, \quad (8.26)$$

С помощью преобразования  $S$  нам удалось удалить потенциал  $\bar{A}$  из исходного оператора Дирака  $\mathcal{D}$ , определенного в уравнении (8.3), но ценой введения эффективных магнитных полей. Мы хотели бы отметить, что то же самое рассмотрение можно повторить для голоморфной части гамильтониана  $\mathcal{D}^*$  с теми же аргументами и результатами.

Это показывает, что в данном базисе мы только что эффективно расщепили ТБГ на два листа с эффективным магнитным полем  $B_1$ . Величина этого поля одинакова одинакова в обоих листах, но отличается по знаку. Форма уравнений точно такая же, как и для задачи уровня Ландау на торе (подробное обсуждение см. в приложениях 8.5 и [156]). Поскольку матрица  $S$  несингулярная, физические решения этой вспомогательной задачи также должны быть конечными. В одном слое эффективное магнитное поле поддерживает волновую функцию с нулем, а в другом слое решение имеет полюс и поэтому нефизично. Аналогичный вывод был получен из различных аргументов в работе [222], но в нашем случае нам удалось показать, что наша система действительно распадается на сумму двух систем с ненулевыми числами Черна для общего потенциала.

В чем преимущество представления (8.26)? Ключевая особенность этого представления заключается в том, что оно позволяет нам легко изучать систему во внешнем магнитном поле. Такое внешнее поле соответствует добавлению матрицы тождества к антиголоморфной связности в уравнении (8.5). Оно не будет чувствительно к преобразованиям в уравнении (8.26). Поэтому уравнение для нулевой моды имеет следующий вид

$$\hat{D}_B f = \begin{pmatrix} \bar{\partial} - \frac{1}{2}B_1z + \bar{A}_{U(1)} & 0 \\ 0 & \bar{\partial} + \frac{1}{2}B_1z + \bar{A}_{U(1)} \end{pmatrix} f = 0, \quad f = (f_-, f_+) \quad (8.27)$$

где  $\bar{A}_{U(1)}$  - калибровочный потенциал для внешнего магнитного поля, создающий магнитное поле в направлении, перпендикулярном плоскости ТБГ. Опять же, физические решения этих уравнений - те, которые не имеют сингулярностей. Мы видим,

что снова получили простую задачу Ландау! Мы посвящаем Приложение 8.5 для подробного описания этой известной проблемы.

Наиболее важным следствием этого является возникновение дополнительных плоских зон. Для простоты мы предполагаем, что  $\bar{A}_{U(1)}$  имеет поток  $\Phi_{ext} \in \mathbb{Z}$  через муаровую решетку. Уравнение (8.27) показывает, что система распадается на два не взаимодействующих слоя с потоками  $\Phi_{tot} \equiv \Phi = \Phi_{ext} \pm 1$ . Из приложения 8.5 следует, что для  $\Phi_{ext} \geq 1$  плоских зон нет, для  $\Phi_{ext} = 0$  есть ровно одна, для  $\Phi_{ext} \leq -1 - 2|\Phi_{ext}|$  плоских зон.

Заметим, что мы изучили только антиголоморфную часть гамильтониана (8.1). Голоморфная часть (другой хиральности) проявляет те же свойства, но для  $\Phi_{ext} \rightarrow -\Phi_{ext}$ . Это означает, что существует всего  $2|\Phi_{ext}|$  плоских зон для  $|\Phi_{ext}| > 0$ , а для  $\Phi_{ext} = 0$  - только 2 плоские зоны. Отметим, что если бы мы не учитывали скрытую волновую функцию, то в присутствии внешнего магнитного поля ожидали бы иметь  $|\Phi_{ext}| + 2$  плоских зон.

## 8.5 Уровни Ландау на торе

В этом разделе мы кратко рассмотрим волновые функции на торе, в основном мы будем следовать Халдейну и Резаи [156]. Мы рассматриваем комплексный тор  $\mathbb{C}/\Lambda$ ,  $\Lambda = \{n + m\tau; n, m \in \mathbb{Z}\}$  и хотим найти решения следующего уравнения

$$\hat{D}_B f = \left( \bar{\partial} + \frac{1}{2}eBz \right) f = 0, \quad F = \bar{\partial}A - \partial\bar{A} = B. \quad (8.28)$$

которое является одним из двух уравнений в (8.27). Для установления граничных условий рассмотрим сдвиг  $z$  на решеточный вектор  $a_i = 1, \tau$ , чтобы получить

$$\left( \bar{\partial} + \frac{1}{2}eBz + \frac{1}{2}eBa_i \right) f = 0 \quad (8.29)$$

Чтобы устранить изменение калибровочного потенциала, мы должны выполнить калибровочное преобразование

$$f \rightarrow f e^{-\frac{1}{2}eBa_i\bar{z} + \frac{1}{2}eB\bar{a}_i z}, \quad (8.30)$$

, которое можно использовать для определения граничных условий. А именно,

$$\begin{aligned} T_1 : f(z + 1) &= \psi(z) e^{-\frac{1}{2}eB\bar{z} + \frac{1}{2}eBz}, \\ T_\tau : f(z + \tau) &= f(z) e^{-\frac{1}{2}eB\tau\bar{z} + \frac{1}{2}eB\bar{\tau}z} \end{aligned} \quad (8.31)$$

Мы должны проверить согласованность этих граничных условий, что  $T_1 T_\tau = T_\tau T_1$ .  
Можно проверить, что

$$T_1 T_\tau f(z) = e^{eB(\tau-\bar{\tau})} T_\tau T_1 f(z) \quad (8.32)$$

Разность между этими фазами равна  $e^{eB(\tau-\bar{\tau})} = 1$ . Это дает условие согласованности граничных условий (8.31)

$$\pi\Phi = eB \operatorname{Im} \tau, \quad eB = \frac{\pi\Phi}{\operatorname{Im} \tau}, \quad \Phi \in \mathbb{Z} \quad (8.33)$$

Эти условия дают, что интеграл по фундаментальному периоду равен  $\Phi = \frac{1}{2\pi} \int F d^2 z = \frac{eB}{\pi} \operatorname{Im} \tau$ .

Тогда при рассмотрении общего  $k$  от зоны Бриллюэна получим.

$$\left( \bar{\partial} + \frac{1}{2} eBz \right) f_k(z) = 0, \quad (8.34)$$

$$f_k(z + a_i) = f_k(z) e^{-\frac{1}{2} eB a_i \bar{z} + \frac{1}{2} eB \bar{a}_i z + i(k, a_i)}$$

, где  $(k, z) = k_x x + k_y y = \operatorname{Im} k \bar{z}$ ,  $k = k_x + i k_y$ ,  $z = x + i y$ .

Для  $\Phi = -1$  легко решается уравнение (8.34), получаем

$$f_{k,-1}(z) = \vartheta \left( z + \frac{ik}{2eB}; \tau \right) e^{\frac{1}{2} eB(z + \frac{ik}{2eB})^2 + i\frac{1}{2} \bar{k}z - \frac{1}{2} eBz\bar{z}}$$

Ноль этой функции находится в точке

$$z_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tau - \frac{ik}{2eB} \quad (8.35)$$

Тогда как для  $\Phi = +1$  мы получаем решение с полюсом:

$$f_{k,+1}(z) = \frac{1}{\vartheta \left( z + \frac{ik}{2eB}; \tau \right)} e^{\frac{1}{2} eB(z + \frac{ik}{2eB})^2 + i\frac{1}{2} \bar{k}z - \frac{1}{2} eBz\bar{z}}$$

Если  $\Phi \neq -1$ , то решение просто

$$f_{K,\Phi}(z) = \prod_{k_1 + \dots + k_\Phi = K} f_{k_i, -1}(z) \quad (8.36)$$

Кажется, что теперь существует бесконечное число волновых функций при заданном  $K$ . Можно показать, что существует лишь конечное число линейно независимых решений (8.36).

Для вычисления этой размерности можно воспользоваться формулой Римана - Роша [140] для оператора  $\hat{D}_B$  в уравнении (8.28). Это дает  $\dim \ker \hat{D}_B = \Phi$ , так что при отрицательном  $\Phi$  мы не имеем конечных решений для уровней Ландау ни в одной точке зоны Бриллюэна. Случай  $\Phi = 0$  особый - здесь есть нулевые моды, но только в особых точках зоны Бриллюэна.

## 8.6 Расщепление короткой точной последовательности

В этом подразделе мы хотели бы выяснить существование второго решения с точки зрения когомологии. Хотя этот подход немного сложен, он математически строг и может быть обобщен на римановы поверхности более высокого рода [151].

Начнем со строгой постановки задачи. Предположим, что у нас есть риманова поверхность  $\mathcal{M}$  с некоторым голоморфным векторным пучком  $\pi$  ранга 2,  $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$  и некоторой связностью  $\bar{A}$ . А именно, мы имеем покрытие римановой поверхности открытыми подмножествами  $\{U_\alpha\}$ , где векторный пучок может быть тривиализован

$$\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}, \quad E|_{U_{\alpha}} \approx U_{\alpha} \times \mathbb{C}^2. \quad (8.37)$$

Когда мы переходим от одного покрытия  $U_{\alpha}$  к другому  $U_{\beta}$ , нам нужно склеить сечение с помощью голоморфных функций склейки  $g_{\alpha\beta}^0$ ,  $\bar{\partial}g_{\alpha\beta}^0 = 0$ . Соединение  $\bar{A}_{\beta}$  преобразуется как

$$\bar{A}_{\beta} = \hat{g}_{\alpha\beta}^{-1} \bar{A}_{\alpha} \hat{g}_{\alpha\beta} + \hat{g}_{\alpha\beta}^{-1} \bar{\partial} \hat{g}_{\alpha\beta} \quad (8.38)$$

Мы хотим найти голоморфные сечения этих векторных пучков: набор функций  $\{\psi_{\alpha}\}$ , таких, что выполняются следующие условия

$$\psi_{\alpha}^0 = g_{\alpha\beta}^0 \psi_{\beta}^0, \quad (\bar{\partial} + \bar{A}_{\alpha}) \psi_{\alpha}^0 = 0 \quad (8.39)$$

Мы можем избавиться от связи  $\bar{A}_{\alpha}$ , решив уравнение (8.39) на каждом покрытии и выполнив калибровочное преобразование.

Тогда мы можем в общем случае изучить следующую задачу

$$\psi_{\alpha} = g_{\alpha\beta} \psi_{\beta}, \quad \bar{\partial} \psi_{\alpha} = 0. \quad (8.40)$$

Итак, нам нужно найти *мероморфные* сечения векторного пучка  $E$ , определяемого коциклами  $g_{\alpha\beta}$ , в предположении, что у нас есть *голоморфные* сечения пучка (8.40)  $\psi^h$ . А именно, у нас есть набор голоморфных функций  $\psi_{\alpha}^h(z)$ , определённых на каждом накрытии и удовлетворяющих граничным условиям

$$\psi_{\alpha}^h = g_{\alpha\beta} \psi_{\beta}^h \quad (8.41)$$

Мы хотим, чтобы эти функции  $\psi_\alpha^h$  были ненулевыми на любом покрытии  $\mathcal{M}$ . Всякий раз, когда мы встречаем нуль на каком-либо покрытии  $U_\alpha$ ,  $\psi_\alpha^h(z_0^\alpha) = 0$ , мы переопределяем голоморфные функции сечения и склеивания  $\hat{\psi}_\alpha^h = \frac{1}{z-z_0^\alpha} \psi_\alpha^h$  и  $\hat{g}_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}^1 g_{\alpha\beta}$ ,  $\gamma_{\alpha\beta}^1 = \frac{z-z_0^\alpha}{z-z_0^\beta}$ . Эта новая функция нигде не равна нулю и изменяется как

$$\hat{\psi}_\alpha^h = \gamma_{\alpha\beta}^1 g_{\alpha\beta} \hat{\psi}_\beta^0, \quad \text{where } \gamma_{\alpha\beta}^1 \in \mathbb{C}, \quad \gamma_{\alpha\beta}^1 \gamma_{\beta\gamma}^1 \gamma_{\gamma\alpha}^1 = 1 \quad (8.42)$$

Поскольку это сечение нигде не равно нулю, мы можем найти другой набор голоморфных функций, линейно независимых от  $\hat{\psi}_\alpha$  в каждой точке. Назовем этот набор функций  $\hat{\psi}_\alpha^\infty$  и с помощью аналогичной процедуры введем  $\gamma_{\alpha\beta}^2$ , чтобы удалить все нули, которые он может иметь. Благодаря этому на каждом покрытии мы можем менять базис на  $\hat{\psi}_\alpha$  и  $\hat{\psi}_\alpha^\infty$ . Можно проверить, что функции склейки в этом новом базисе векторного пучка становятся

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \gamma_{\alpha\beta}^2 & h_{\alpha\beta} \\ 0 & \gamma_{\alpha\beta}^1 \end{pmatrix}, \quad \text{where} \\ \gamma_{\alpha\beta}^2 \gamma_{\beta\gamma}^2 \gamma_{\gamma\alpha}^2 = 1 \quad \text{and} \quad h_{\alpha\gamma} = \gamma_{\alpha\beta}^2 h_{\beta\gamma} + h_{\alpha\beta} \gamma_{\beta\gamma}^1 \quad (8.43)$$

Если бы мы получили  $h_{\alpha\beta} = 0$ , то функции  $\hat{\psi}_\alpha^\infty$  менялись бы друг через друга как

$$\hat{\psi}_\alpha^\infty = \gamma_{\alpha\beta}^2 g_{\alpha\beta} \hat{\psi}_\beta^\infty, \quad (8.44)$$

и определяют легитимное сечение векторного пучка  $E$ . Поскольку набор функций  $\gamma_{\alpha\beta}^2$  представляет собой линейный пучок, он имеет мероморфное сечение: набор мероморфных функций  $f_\alpha(z)$  со свойством  $\gamma_{\alpha\beta}^2 = \frac{f_\beta}{f_\alpha}$ . Тогда новые функции

$$\psi_\alpha^\infty = f_\alpha \hat{\psi}_\alpha^\infty \quad (8.45)$$

голоморфны всюду и преобразуются как

$$\psi_\alpha^\infty = g_{\alpha\beta} \psi_\beta^\infty, \quad (8.46)$$

И поэтому представляют собой законное сечение исходного векторного пучка  $E$ , но содержат полюс в некоторой точке.

Покажем, что мы можем избавиться от  $h_{\alpha\beta}$  путем соответствующего переопределения произвольно выбранного  $\hat{\psi}_\alpha^\infty$ . А именно, заметим, что выбор  $\hat{\psi}_\alpha^\infty$  не является единственным. При каждом покрытии мы можем внести изменения

$$\hat{\psi}_\alpha^\infty \rightarrow \hat{\psi}_\alpha^\infty + h_\alpha(z) \hat{\psi}_\alpha^0 \quad (8.47)$$

Оно изменяет функции склейки следующим образом

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow h_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}^2 h_{\beta}(z) - h_{\alpha}(z) \gamma_{\alpha\beta}^1 \quad (8.48)$$

Это дает, что  $h_{\alpha\beta}$  принадлежит  $H^1(\mathcal{O}(\gamma_1\gamma_2^{-1}))$  и по дуальности Серра двойственна к  $H^0(\mathcal{O}(\varkappa\gamma_1^{-1}\gamma_2))$ , где  $\varkappa$  - касательный пучок линий. Этот пучок не имеет голоморфного сечения, если его класс Черна отрицателен. Получаем.

$$\begin{aligned} c_1(\varkappa\gamma_1^{-1}\gamma_2) &= 2g - 2 - c(\gamma_1) + c(\gamma_2) = \\ &= 2g - 2 - 2c(\gamma_1) = -2c(\gamma_1) < 0 \end{aligned} \quad (8.49)$$

и мы использовали  $g = 1$  (тор),  $c_1(\gamma_1) \geq 1$  ( $\hat{\psi}_{\alpha}$  имеет хотя бы один простой ноль) и  $c_1(\gamma_1) + c_1(\gamma_2) = 0$  (следствие из уравнения (8.13)).

Поскольку  $H^1(\mathcal{O}(\gamma_1\gamma_2^{-1})) = 0$ , класс когомологий, представленный  $h_{\alpha\beta}$ , тривиален. Это означает, что мы всегда можем выбрать  $h_{\alpha}$  таким образом, что  $h_{\alpha\beta} = 0$  в уравнении. (8.48). Тогда, как мы обсуждали выше,  $\hat{\psi}_{\alpha}^{\infty}$  будет представлять собой мероморфное сечение векторного пучка  $E$ . Эту процедуру можно обобщить на римановы поверхности более высокого рода и другие векторные пучки.

## Глава 9

### Заключение

Диссертация представляет собой обширный и глубокий анализ различных аспектов теории квантовых полей, охватывающий разнообразные различные модели и методы их исследований. Так были изучены аспекты  $\epsilon$ -разложения, предела больших  $N$ , построения непрерывных квантово-полевых теорий различных материалов и были исследованы основные свойства теорий поля во внешних гравитационных и электромагнитных полях. Результаты исследований оказывают существенное влияние на дальнейшее развитие нескольких ключевых областей теоретической физики, предоставляя новые идеи и методологии.

Одним из вопросов, рассмотренных в ходе диссертационной работы, было изучение стабильности пространства де-Ситтера при учете квантовых флуктуаций. На данный вопрос обычно отвечают положительно, потому что рассматривают вакуумные состояния, которые уважают группу изометрий пространства де-Ситтера, и только в свободном, гауссовом приближении. Но любое возмущение над данным вакуумом сразу же нарушает группу изометрий, и вопрос о стабильности пространства де-Ситтера остается открытым. Было показано, что ответ на данный вопрос зависит от начального возмущения и даже наивное аналитическое продолжение со сферы может быть нетривиальным. Если возмущение мало, то система перейдет в новое равновесное состояние, похожее на термальное распределение над аут-вакуумом, но уважающее группу изометрий пространства де-Ситтера. Если же возмущение не мало, то в некоторый момент заселенность уровней станет сингулярной, что приведет к расходимости в тензоре энергии-импульса. Последнее означает, что группа изометрий пространства де-Ситтера не может быть восстановлена. Также возникает вопрос учета влияния гравитации на данное возмущение, ответ



на который может пролить свет на проблему космологической постоянной.

Другим вопросом, которым мы интересовались, было изучение петлевых поправок к эффекту Швингера. Обычно данный эффект рассматривается в гауссовом приближении. Вычисление Швингера явно показывает, что может происходить рождение электрон-позитронных пар в постоянном электрическом поле, но ток, который возникает в результате данного процесса, оказывается равным нулю, что может показаться парадоксальным. Однако при учете петлевых поправок было показано, что возникает инфракрасная расходимость и секулярный рост, который может разрешить данный вопрос. К примеру, петлевые вклады в ток теперь оказываются не равными нулю.

Кроме того, на основе развитых методов был предложен метод исследования компактных объектов, таких как коллапсирующие звезды, который дает новый взгляд на спектры скалярных теорий поля в подобных условиях. Это может иметь далеко идущие последствия для наших представлений о природе и эволюции космических объектов.

Также были проведены исследования в области тензорных моделей, суперсимметричных теорий, конформных дефектов и квантовых дисков, которые дополняют картину, расширяя области применения таких моделей и предоставляя новый набор методов и инструментов для дальнейших исследований. В частности, выведение уравнения Дайсона-Швингера для тензорных моделей и анализ аномальных размерностей операторов в суперсимметричных аналогах тензорных теорий являются значимыми шагами в понимании структуры этих теорий.

Кроме того, работа затрагивает вопросы аналитического продолжения теорий поля из пространства с евклидовой сигнатурой в пространства с лоренцевой метрикой, было введено понятие Кронекеровской аномалии и было показано, как они влияют на динамику квантовых теорий поля. Это может быть важным элементом в понимании особенностей перехода от евклидовой сигнатуры к минковской и может дать много интересных приложений.

Было предложено обобщение векторных и матричных моделей, а также проведено исследование нестандартных поведений РГ-поток, были предложены тензорные модели, в которых возникают предельные циклы и хаотическое поведение ренормгрупповых потоков. Эти результаты представляют собой значительный вклад в понимание ренормгрупповой динамики в разнообразных системах.

Таким образом, диссертация представляет собой обширный и важный вклад в теоретическую физику, расширяя наше понимание квантовых полей и их поведения в различных условиях. Полученные результаты могут стать отправной точкой для дальнейших исследований и применений в различных областях физики высоких энергий и космологии.

## Благодарности

Я хотел бы поблагодарить моего научного руководителя Ахмедова Эмиля Тофик оглы. Также я очень благодарен Игорю Романовичу Клебанову, Александру Марковичу Полякову и Хуану Малдасене. Я очень признателен им за помощь, поддержку и внимание к моим работам.

Я выражаю благодарность своим соавторам по совместным работам Химанчу Ханчандани, Ийфан Вэнг, Ахмед Альмхери, Стефано Негро, Кристиан Епсен, Симоне Джомби, Милехину А., Тарнопольскому Г., Горскому А.С, Годазгара Х., Сонненшайна К., Слепухина В.М., Калинова Д.А., Павленко К.Е., Астраханцева Н.Ю. и Дятлику А., а также признательность за полезные обсуждения научных вопросов Захарову В.И., Арефьеве И.Я., Лосякову В.В., Маршакову А.В., Лосеву А.С., Морозову А.Ю., Миронову А.Д., Ольщанецкому М.А., Новикову В.А., Васильеву Д., Апенко С.М., Арсееву П.И., Горбунову Д.С., Канчели О., Диесперову В.Н., Годазгару М., Мусаеву Э.Т.

Кроме того, я выражаю признательность моим однокурсникам и участникам научных семинаров в ИТЭФе и МФТИ Слепцову А., Анохине А., Бурде Ф., Кириллину В., Артамнову С., Садофьеву А., Морозову Анд., Сопенко Н., Авдошкину А., Кононову Я., Антоненко Д., Гладких А., Сон Л., Крайновым Н. и Л., Артемовой Т. и Хисамеевой А. за многочисленные обсуждения и полезные замечания по теме диссертации.

Также мне хотелось бы поблагодарить Суслову Елену за помощь на протяжении моей работы. А также выражаю искреннюю благодарность Сергею Демидову и Анне Александровне Бреевой за помощь в организации защиты данной диссертации.

Наконец, я хотел бы поблагодарить моих родителей, Емельянову Веру Фалалеевну и Попова Калину Федоровича, мою бабушку, Емельянову Любовь Ильиничну, моего дедушку, Емельянова Фалалея Павловича, за то, что они с самого детства прививали ко мне любовь к математике и физике. А также мою тетю, Емельянова Валентину Викторовну, Строкова Игоря Витальевича, моих двоюродных братьев, Емельянова Ивана Юрьевича и Емельянова Константина Юрьевича, и Нелагач Татьяну Владимировну.

## Список литературы

- [1] Gerard 't Hooft. «A Planar Diagram Theory for Strong Interactions». В: *Nucl. Phys. B* 72 (1974). Под ред. J. C. Taylor, с. 461. DOI: 10.1016/0550-3213(74)90154-0.
- [2] Gerard 't Hooft. «A planar diagram theory for strong interactions». В: *The Large N Expansion In Quantum Field Theory And Statistical Physics: From Spin Systems to 2-Dimensional Gravity*. World Scientific, 1993, с. 80–92.
- [3] Gerard 't Hooft. «A two-dimensional model for mesons». В: *The Large N Expansion In Quantum Field Theory And Statistical Physics: From Spin Systems to 2-Dimensional Gravity*. World Scientific, 1993, с. 94–103.
- [4] АА Abrikosov, LP Gor'kov и IE Dzyaloshinskii. «Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics [in Russian]». В: *GIFML, Moscow* (1962).
- [5] Ian Affleck. «Conformal field theory approach to the Kondo effect». В: *Acta Phys. Polon. B* 26 (1995). Под ред. Maciej A. Nowak и Pawel Wegrzyn, с. 1869–1932. arXiv: cond-mat/9512099.
- [6] Ian Affleck и Andreas W. W. Ludwig. «Universal noninteger 'ground state degeneracy' in critical quantum systems». В: *Phys. Rev. Lett.* 67 (1991), с. 161–164. DOI: 10.1103/PhysRevLett.67.161.
- [7] E. T. Akhmedov, N. Astrakhantsev и F. K. Popov. «Secularly growing loop corrections in strong electric fields». В: *JHEP* 09 (2014), с. 071. DOI: 10.1007/JHEP09(2014)071. arXiv: 1405.5285 [hep-th].
- [8] E. T. Akhmedov, U. Moschella и F. K. Popov. «Characters of different secular effects in various patches of de Sitter space». В: *Phys. Rev. D* 99.8 (2019), с. 086009. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.086009. arXiv: 1901.07293 [hep-th].

- [9] E. T. Akhmedov и F. K. Popov. «A few more comments on secularly growing loop corrections in strong electric fields». В: *JHEP* 09 (2015), с. 085. DOI: 10.1007/JHEP09(2015)085. arXiv: 1412.1554 [hep-th].
- [10] E. T. Akhmedov, F. K. Popov и V. M. Slepukhin. «Infrared dynamics of the massive  $\phi^4$  theory on de Sitter space». В: *Phys. Rev. D* 88 (2013), с. 024021. DOI: 10.1103/PhysRevD.88.024021. arXiv: 1303.1068 [hep-th].
- [11] E. T. Akhmedov и др. «Propagators and Gaussian effective actions in various patches of de Sitter space». В: *Phys. Rev. D* 100.10 (2019), с. 105011. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.105011. arXiv: 1905.09344 [hep-th].
- [12] E. T. Akhmedov и др. «Quantum fields in the static de Sitter universe». В: *Phys. Rev. D* 102.8 (2020), с. 085003. DOI: 10.1103/PhysRevD.102.085003. arXiv: 2005.13952 [hep-th].
- [13] E.T. Akhmedov. «Lecture notes on interacting quantum fields in de Sitter space». В: *Int. J. Mod. Phys. D* 23 (2014), с. 1430001. DOI: 10.1142/S0218271814300018. arXiv: 1309.2557 [hep-th].
- [14] E.T. Akhmedov и др. «Infrared dynamics of massive scalars from the complementary series in de Sitter space». В: *Phys. Rev. D* 96.2 (2017), с. 025002. DOI: 10.1103/PhysRevD.96.025002. arXiv: 1701.07226 [hep-th].
- [15] Emil T. Akhmedov, Hadi Godazgar и Fedor K. Popov. «Hawking radiation and secularly growing loop corrections». В: *Phys. Rev. D* 93.2 (2016), с. 024029. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.024029. arXiv: 1508.07500 [hep-th].
- [16] Emil T. Akhmedov, Daniil A. Kalinov и Fedor K. Popov. «Method for distinguishing very compact stellar objects from black holes». В: *Phys. Rev. D* 93.6 (2016), с. 064006. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.064006. arXiv: 1601.03894 [gr-qc].
- [17] Emil T. Akhmedov, Ugo Moschella и Fedor K. Popov. «Ultraviolet phenomena in AdS self-interacting quantum field theory». В: *JHEP* 03 (2018), с. 183. DOI: 10.1007/JHEP03(2018)183. arXiv: 1802.02955 [hep-th].
- [18] Ahmed Almheiri и Fedor K. Popov. «Holography on the quantum disk». В: *JHEP* 06 (2024), с. 070. DOI: 10.1007/JHEP06(2024)070. arXiv: 2401.05575 [hep-th].

- [19] Luis Alvarez-Gaume и M. A. Vazquez-Mozo. «General properties of noncommutative field theories». В: *Nucl. Phys. B* 668 (2003), с. 293–321. DOI: 10.1016/S0550-3213(03)00582-0. arXiv: hep-th/0305093.
- [20] Vladimir Igorevich Arnold. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Т. 250. Springer Science & Business Media, 2012.
- [21] Benjamin Assel и Jaume Gomis. «Mirror Symmetry And Loop Operators». В: *JHEP* 11 (2015), с. 055. DOI: 10.1007/JHEP11(2015)055. arXiv: 1506.01718 [hep-th].
- [22] LV Avdeev, GV Grigoryev и DI Kazakov. «Renormalizations in Abelian Chern-Simons field theories with matter». В: *Nuclear Physics B* 382.3 (1992), с. 561–580.
- [23] Tatsuo Azeayanagi и др. «More on the New Large  $D$  Limit of Matrix Models». В: *Annals Phys.* 393 (2017), с. 308–326. DOI: 10.1016/j.aop.2018.04.010. arXiv: 1710.07263 [hep-th].
- [24] I Baldoma, S Ibanez и TM Seara. «Hopf-Zero singularities truly unfold chaos». В: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 84 (2020), с. 105162.
- [25] Matteo Beccaria, Simone Giombi и Arkady A. Tseytlin. «Correlators on non-supersymmetric Wilson line in  $\mathcal{N} = 4$  SYM and  $\text{AdS}_2/\text{CFT}_1$ ». В: *JHEP* 05 (2019), с. 122. DOI: 10.1007/JHEP05(2019)122. arXiv: 1903.04365 [hep-th].
- [26] Matteo Beccaria, Simone Giombi и Arkady A. Tseytlin. «Wilson loop in general representation and RG flow in 1D defect QFT». В: *J. Phys. A* 55.25 (2022), с. 255401. DOI: 10.1088/1751-8121/ac7018. arXiv: 2202.00028 [hep-th].
- [27] Connor Behan и др. «Bootstrapping boundary-localized interactions». В: *JHEP* 12 (2020), с. 182. DOI: 10.1007/JHEP12(2020)182. arXiv: 2009.03336 [hep-th].
- [28] Connor Behan и др. «Bootstrapping boundary-localized interactions II. Minimal models at the boundary». В: *JHEP* 03 (2022), с. 146. DOI: 10.1007/JHEP03(2022)146. arXiv: 2111.04747 [hep-th].
- [29] Dario Benedetti. «Instability of complex CFTs with operators in the principal series». В: *Journal of High Energy Physics* 2021.5 (2021), с. 1–41.

- [30] Dario Benedetti. «Melonic CFTs». В: *PoS CORFU2019* (2020), с. 168. DOI: 10.22323/1.376.0168. arXiv: 2004.08616 [hep-th].
- [31] Dario Benedetti и Razvan Gurau. «2PI effective action for the SYK model and tensor field theories». В: *JHEP* 05 (2018), с. 156. DOI: 10.1007/JHEP05(2018)156. arXiv: 1802.05500 [hep-th].
- [32] Dario Benedetti, Razvan Gurau и Sabine Harribey. «Line of fixed points in a bosonic tensor model». В: *JHEP* 06 (2019), с. 053. DOI: 10.1007/JHEP06(2019)053. arXiv: 1903.03578 [hep-th].
- [33] Dario Benedetti, Razvan Gurau и Sabine Harribey. «Line of fixed points in a bosonic tensor model». В: *Journal of High Energy Physics* 2019.6 (2019), с. 1—46.
- [34] Dario Benedetti, Razvan Gurau и Kenta Suzuki. «Conformal symmetry and composite operators in the  $O(N)$  3 tensor field theory». В: *Journal of High Energy Physics* 2020.6 (2020), с. 1—50.
- [35] Dario Benedetti и др. «The  $1/N$  expansion of the symmetric traceless and the antisymmetric tensor models in rank three». В: *Commun. Math. Phys.* 371.1 (2019), с. 55—97. DOI: 10.1007/s00220-019-03551-z. arXiv: 1712.00249 [hep-th].
- [36] Dario Benedetti и др. «The F-theorem in the melonic limit». В: *Journal of High Energy Physics* 2022.2 (2022), с. 1—58.
- [37] Micha Berkooz, Prithvi Narayan и Joan Simon. «Chord diagrams, exact correlators in spin glasses and black hole bulk reconstruction». В: *JHEP* 08 (2018), с. 192. DOI: 10.1007/JHEP08(2018)192. arXiv: 1806.04380 [hep-th].
- [38] Micha Berkooz и др. «Quantum groups, non-commutative  $AdS_2$ , and chords in the double-scaled SYK model». В: *JHEP* 08 (2023), с. 076. DOI: 10.1007/JHEP08(2023)076. arXiv: 2212.13668 [hep-th].
- [39] Micha Berkooz и др. «Towards a full solution of the large  $N$  double-scaled SYK model». В: *JHEP* 03 (2019), с. 079. DOI: 10.1007/JHEP03(2019)079. arXiv: 1811.02584 [hep-th].

- [40] Denis Bernard и Andre LeClair. « $q$  Deformation of  $SU(1,1)$  Conformal Ward Identities and  $q$  Strings». В: *Phys. Lett. B* 227 (1989), с. 417–423. DOI: 10.1016/0370-2693(89)90953-2.
- [41] Denis Bernard и Andre LeClair. «Strong weak coupling duality in anisotropic current interactions». В: *Phys. Lett. B* 512 (2001), с. 78–84. DOI: 10.1016/S0370-2693(01)00695-5. arXiv: hep-th/0103096.
- [42] Wolf-Jürgen Beyn и др. «Numerical continuation, and computation of normal forms». В: *Handbook of dynamical systems, Vol. 2*. North-Holland, Amsterdam, 2002, с. 149–219. DOI: 10.1016/S1874-575X(02)80025-X. URL: [https://doi.org/10.1016/S1874-575X\(02\)80025-X](https://doi.org/10.1016/S1874-575X(02)80025-X).
- [43] Gyan Bhanot, Kresimir Demeterfi и Igor R. Klebanov. «(1+1)-dimensional large N QCD coupled to adjoint fermions». В: *Phys. Rev. D* 48 (1993), с. 4980–4990. DOI: 10.1103/PhysRevD.48.4980. arXiv: hep-th/9307111.
- [44] Lorenzo Bianchi. «Marginal deformations and defect anomalies». В: *Phys. Rev. D* 100.12 (2019), с. 126018. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.126018. arXiv: 1907.06193 [hep-th].
- [45] Lorenzo Bianchi и др. «Monodromy defects in free field theories». В: *JHEP* 08 (2021), с. 013. DOI: 10.1007/JHEP08(2021)013. arXiv: 2104.01220 [hep-th].
- [46] Marco Billò и др. «Defects in conformal field theory». В: *JHEP* 04 (2016), с. 091. DOI: 10.1007/JHEP04(2016)091. arXiv: 1601.02883 [hep-th].
- [47] Damon J. Binder и Slava Rychkov. «Deligne Categories in Lattice Models and Quantum Field Theory, or Making Sense of  $O(N)$  Symmetry with Non-integer  $N$ ». В: *JHEP* 04 (2020), с. 117. DOI: 10.1007/JHEP04(2020)117. arXiv: 1911.07895 [hep-th].
- [48] R. Bistritzer и A. H. MacDonald. «Moiré bands in twisted double-layer graphene». В: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 108 (июль 2011), с. 12233–12237.
- [49] R. Bistritzer и A. H. MacDonald. «Moiré butterflies in twisted bilayer graphene». В: *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics* 84.3 (2011), с. 1–4.



- [50] Rifkat Bogdanov. «Bifurcations of a Limit Cycle for a Family of Vector Fields on the Plane.» В: *Selecta Math. Soviet* 1 (1981), с. 373–388.
- [51] Valentin Bonzom и др. «Critical behavior of colored tensor models in the large  $N$  limit» . В: *Nucl. Phys. B* 853 (2011), с. 174–195. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2011.07.022. arXiv: 1105.3122 [hep-th].
- [52] Michiel Bos. «An Example of Dimensional Regularization With Antisymmetric Tensors» . В: *Annals Phys.* 181 (1988), с. 177. DOI: 10.1016/0003-4916(88)90164-9.
- [53] Maikel M Bosschaert и Yuri A Kuznetsov. «Interplay between Normal Forms and Center Manifold Reduction for Homoclinic Predictors near Bogdanov–Takens Bifurcation» . В: *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 23.1 (2024), с. 410–439.
- [54] Maikel M. Bosschaert, Christian B. Jepsen и Fedor K. Popov. «Chaotic RG flow in tensor models» . В: *Phys. Rev. D* 105.6 (2022), с. 065021. DOI: 10.1103/PhysRevD.105.065021. arXiv: 2112.09088 [hep-th].
- [55] Eric Braaten и Demian Phillips. «The Renormalization group limit cycle for the  $1/r^{**2}$  potential» . В: *Phys. Rev. A* 70 (2004), с. 052111. DOI: 10.1103/PhysRevA.70.052111. arXiv: hep-th/0403168.
- [56] Isak Buhl-Mortensen и др. «Asymptotic One-Point Functions in Gauge-String Duality with Defects» . В: *Phys. Rev. Lett.* 119.26 (2017), с. 261604. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.261604. arXiv: 1704.07386 [hep-th].
- [57] K. M. Bulycheva и A. S. Gorsky. «Limit cycles in renormalization group dynamics» . В: *Phys. Usp.* 57 (2014), с. 171–182. DOI: 10.3367/UFNe.0184.201402g.0182. arXiv: 1402.2431 [hep-th].
- [58] Ksenia Bulycheva. « $\mathcal{N} = 2$  SYK model in the superspace formalism» . В: *JHEP* 04 (2018), с. 036. DOI: 10.1007/JHEP04(2018)036. arXiv: 1801.09006 [hep-th].
- [59] Y. Cao и др. «Unconventional superconductivity in magic-angle graphene superlattices» . В: *Nature* 556 (март 2018), с. 43–50.
- [60] John L. Cardy. «Conformal Invariance and Surface Critical Behavior» . В: *Nucl. Phys. B* 240 (1984), с. 514–532. DOI: 10.1016/0550-3213(84)90241-4.

- [61] Sylvain Carrozza. «Large  $N$  limit of irreducible tensor models:  $O(N)$  rank-3 tensors with mixed permutation symmetry». В: *JHEP* 06 (2018), с. 039. DOI: 10.1007/JHEP06(2018)039. arXiv: 1803.02496 [hep-th].
- [62] Sylvain Carrozza. «Large  $N$  limit of irreducible tensor models:  $O(N)$  rank-3 tensors with mixed permutation symmetry». В: *Journal of High Energy Physics* 2018.6 (2018), с. 1–21.
- [63] Sylvain Carrozza и Adrian Tanasa. « $O(N)$  Random Tensor Models». В: *Lett. Math. Phys.* 106.11 (2016), с. 1531–1559. DOI: 10.1007/s11005-016-0879-x. arXiv: 1512.06718 [math-ph].
- [64] H. Casini и Marina Huerta. «On the RG running of the entanglement entropy of a circle». В: *Phys. Rev. D* 85 (2012), с. 125016. DOI: 10.1103/PhysRevD.85.125016. arXiv: 1202.5650 [hep-th].
- [65] Horacio Casini, Ignacio Salazar Landea и Gonzalo Torroba. «Irreversibility in quantum field theories with boundaries». В: *JHEP* 04 (2019), с. 166. DOI: 10.1007/JHEP04(2019)166. arXiv: 1812.08183 [hep-th].
- [66] Horacio Casini, Ignacio Salazar Landea и Gonzalo Torroba. «The g-theorem and quantum information theory». В: *JHEP* 10 (2016), с. 140. DOI: 10.1007/JHEP10(2016)140. arXiv: 1607.00390 [hep-th].
- [67] Adam Chalabi и др. «Central charges of 2d superconformal defects». В: *JHEP* 05 (2020), с. 095. DOI: 10.1007/JHEP05(2020)095. arXiv: 2003.02857 [hep-th].
- [68] Chi-Ming Chang, Sean Colin-Ellerin и Mukund Rangamani. «On Melonic Supertensor Models». В: *JHEP* 10 (2018), с. 157. DOI: 10.1007/JHEP10(2018)157. arXiv: 1806.09903 [hep-th].
- [69] Chi-Ming Chang, Sean Colin-Ellerin и Mukund Rangamani. «Supersymmetric Landau-Ginzburg Tensor Models». В: *JHEP* 11 (2019), с. 007. DOI: 10.1007/JHEP11(2019)007. arXiv: 1906.02163 [hep-th].
- [70] Gil Young Cho и др. «Relationship between Symmetry Protected Topological Phases and Boundary Conformal Field Theories via the Entanglement Spectrum». В: *J. Phys. A* 50.30 (2017), с. 304002. DOI: 10.1088/1751-8121/aa7782. arXiv: 1606.06402 [cond-mat.str-el].

- [71] Sayantan Choudhury и др. «Notes on melonic  $O(N)^{q-1}$  tensor models». В: *JHEP* 06 (2018), с. 094. DOI: 10.1007/JHEP06(2018)094. arXiv: 1707.09352 [hep-th].
- [72] Sidney Coleman. «Why there is nothing rather than something: a theory of the cosmological constant». В: *Nuclear Physics B* 310.3-4 (1988), с. 643–668.
- [73] John C. Collins. *Renormalization: An Introduction to Renormalization, The Renormalization Group, and the Operator Product Expansion*. Т. 26. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1986. ISBN: 978-0-521-31177-9, 978-0-511-86739-2. DOI: 10.1017/CB09780511622656.
- [74] Alain Connes, Michael R. Douglas и Albert S. Schwarz. «Noncommutative geometry and matrix theory: Compactification on tori». В: *JHEP* 02 (1998), с. 003. DOI: 10.1088/1126-6708/1998/02/003. arXiv: hep-th/9711162.
- [75] Jordan S. Cotler и др. «Black Holes and Random Matrices». В: *JHEP* 05 (2017), с. 118. DOI: 10.1007/JHEP05(2017)118. arXiv: 1611.04650 [hep-th].
- [76] Gabriel Cuomo, Zohar Komargodski и Mark Mezei. «Localized magnetic field in the  $O(N)$  model». В: *JHEP* 02 (2022), с. 134. DOI: 10.1007/JHEP02(2022)134. arXiv: 2112.10634 [hep-th].
- [77] Gabriel Cuomo, Zohar Komargodski и Avia Raviv-Moshe. «Renormalization Group Flows on Line Defects». В: *Phys. Rev. Lett.* 128.2 (2022), с. 021603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.128.021603. arXiv: 2108.01117 [hep-th].
- [78] Gabriel Cuomo, Mark Mezei и Avia Raviv-Moshe. «Boundary conformal field theory at large charge». В: *JHEP* 10 (2021), с. 143. DOI: 10.1007/JHEP10(2021)143. arXiv: 2108.06579 [hep-th].
- [79] Gabriel Cuomo и др. «Spin impurities, Wilson lines and semiclassics». В: *JHEP* 06 (2022), с. 112. DOI: 10.1007/JHEP06(2022)112. arXiv: 2202.00040 [hep-th].
- [80] Thomas L. Curtright, Xiang Jin и Cosmas K. Zachos. «RG flows, cycles, and c-theorem folklore». В: *Phys. Rev. Lett.* 108 (2012), с. 131601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.131601. arXiv: 1111.2649 [hep-th].
- [81] Predrag Cvitanovic. *Universality in chaos*. Routledge, 2017.

- [82] Sebastian M. Dawid и др. «Renormalization group procedure for potential  $-g/r^2$ ». B: *Phys. Lett. B* 777 (2018), с. 260–264. DOI: 10.1016/j.physletb.2017.12.028. arXiv: 1704.08206 [quant-ph].
- [83] Pierre-Gilles De Gennes и Pierre-Gilles Gennes. *Scaling concepts in polymer physics*. Cornell university press, 1979.
- [84] Diego Delmastro, Jaume Gomis и Matthew Yu. «Infrared phases of 2d QCD». B: *JHEP* 02 (2023), с. 157. DOI: 10.1007/JHEP02(2023)157. arXiv: 2108.02202 [hep-th].
- [85] Nicolas Delporte и Vincent Rivasseau. «The Tensor Track V: Holographic Tensors». B: (2018). arXiv: 1804.11101 [hep-th].
- [86] Ross Dempsey, Igor R. Klebanov и Silviu S. Pufu. «Exact symmetries and threshold states in two-dimensional models for QCD». B: *JHEP* 10 (2021), с. 096. DOI: 10.1007/JHEP10(2021)096. arXiv: 2101.05432 [hep-th].
- [87] SE Derkachev и LD Faddeev. «3j-symbol for the modular double  $SL_q(2, \mathbb{R})$  revisited». B: *Journal of Physics: Conference Series*. T. 532. 1. IOP Publishing. 2014, с. 012005.
- [88] Robert L Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Chapman и Hall/CRC, 1989.
- [89] Lorenzo Di Pietro, Edoardo Lauria и Pierluigi Niro. «3d large  $N$  vector models at the boundary». B: *SciPost Phys.* 11.3 (2021), с. 050. DOI: 10.21468/SciPostPhys.11.3.050. arXiv: 2012.07733 [hep-th].
- [90] Lorenzo Di Pietro и др. «3d Abelian Gauge Theories at the Boundary». B: *JHEP* 05 (2019), с. 091. DOI: 10.1007/JHEP05(2019)091. arXiv: 1902.09567 [hep-th].
- [91] Oleksandr Diatlyk, Fedor K. Popov и Yifan Wang. «Beyond  $N = \infty$  in Large  $N$  Conformal Vector Models at Finite Temperature». B: *JHEP* 08 (2024), с. 219. DOI: 10.1007/JHEP08(2024)219. arXiv: 2309.02347 [hep-th].
- [92] H. W. Diehl. «The Theory of boundary critical phenomena». B: *Int. J. Mod. Phys. B* 11 (1997), с. 3503–3523. DOI: 10.1142/S0217979297001751. arXiv: cond-mat/9610143.

- [93] H. W. Diehl и S. Dietrich. «Field-theoretical approach to static critical phenomena in semi-infinite systems». В: *Z. Phys. B* 42 (1981), с. 65—86. DOI: 10.1007/BF01298293.
- [94] H. W. Diehl, S. Dietrich и E. Eisenriegler. «Universality, irrelevant surface operators, and corrections to scaling in systems with free surfaces and defect planes». В: *Phys. Rev. B* 27 (1983), с. 2937—2954. DOI: 10.1103/PhysRevB.27.2937.
- [95] Tudor Dimofte, Davide Gaiotto и Natalie M. Paquette. «Dual boundary conditions in 3d SCFT's». В: *JHEP* 05 (2018), с. 060. DOI: 10.1007/JHEP05(2018)060. arXiv: 1712.07654 [hep-th].
- [96] Brian P. Dolan. «Chaotic behavior of renormalization flow in a complex magnetic field». В: *Phys. Rev. E* 52 (1995). [Erratum: Phys.Rev.E 53, 6590 (1996)], с. 4512—4515. DOI: 10.1103/PhysRevE.52.4512. arXiv: cond-mat/9412031.
- [97] S. K. Donaldson. «An application of gauge theory to four-dimensional topology». В: *Journal of Differential Geometry* 18.2 (1983), с. 279—315.
- [98] Vladimir Gershonovich Drinfeld. «Quantum groups». В: *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* 155 (1986), с. 18—49.
- [99] Nadav Drukker, Davide Gaiotto и Jaume Gomis. «The Virtue of Defects in 4D Gauge Theories and 2D CFTs». В: *JHEP* 06 (2011), с. 025. DOI: 10.1007/JHEP06(2011)025. arXiv: 1003.1112 [hep-th].
- [100] Nadav Drukker, Takuya Okuda и Filippo Passerini. «Exact results for vortex loop operators in 3d supersymmetric theories». В: *JHEP* 07 (2014), с. 137. DOI: 10.1007/JHEP07(2014)137. arXiv: 1211.3409 [hep-th].
- [101] Nadav Drukker, Malte Probst и Maxime Trepianier. «Surface operators in the 6d  $N = (2, 0)$  theory». В: *J. Phys. A* 53.36 (2020), с. 365401. DOI: 10.1088/1751-8121/aba1b7. arXiv: 2003.12372 [hep-th].
- [102] Nadav Drukker и др. «Defect CFT in the 6d (2,0) theory from M2 brane dynamics in  $AdS_7 \times S^4$ ». В: *JHEP* 07 (2020), с. 101. DOI: 10.1007/JHEP07(2020)101. arXiv: 2004.04562 [hep-th].
- [103] Michael J. Dugan и Benjamin Grinstein. «On the vanishing of evanescent operators». В: *Phys. Lett. B* 256 (1991), с. 239—244. DOI: 10.1016/0370-2693(91)90680-0.

- [104] Erich Eisenriegler. «Universal amplitude ratios for the surface tension of polymer solutions». В: *The Journal of Chemical Physics* 81.10 (1984), с. 4666—4675. DOI: 10.1063/1.447401. eprint: <https://doi.org/10.1063/1.447401>. URL: <https://doi.org/10.1063/1.447401>.
- [105] Julius Engelsoy, Thomas G. Mertens и Herman Verlinde. «An investigation of AdS<sub>2</sub> backreaction and holography». В: *JHEP* 07 (2016), с. 139. DOI: 10.1007/JHEP07(2016)139. arXiv: 1606.03438 [hep-th].
- [106] John Estes и др. «Wilson Surface Central Charge from Holographic Entanglement Entropy». В: *JHEP* 05 (2019), с. 032. DOI: 10.1007/JHEP05(2019)032. arXiv: 1812.00923 [hep-th].
- [107] Ludwig D Faddeev. «Quantum groups». В: *Boletim da Sociedade Brasileira de Matematica-Bulletin/Brazilian Mathematical Society* 20.1 (1989), с. 47—54.
- [108] Anton F Faedo и др. «Multiple Mass Hierarchies from Complex Fixed Point Collisions». В: *arXiv preprint arXiv:2106.01802* (2021).
- [109] Lin Fei и др. «Three loop analysis of the critical O(N) models in 6-  $\epsilon$  dimensions». В: *Physical Review D* 91.4 (2015), с. 045011.
- [110] Mitchell J Feigenbaum. «Quantitative universality for a class of nonlinear transformations». В: *Journal of statistical physics* 19.1 (1978), с. 25—52.
- [111] Daniel Friedan и Anatoly Konechny. «On the boundary entropy of one-dimensional quantum systems at low temperature». В: *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004), с. 030402. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.030402. arXiv: hep-th/0312197.
- [112] Wenbo Fu и др. «Supersymmetric Sachdev-Ye-Kitaev models». В: *Phys. Rev. D* 95.2 (2017). [Addendum: Phys. Rev.D95,no.6,069904(2017)], с. 026009. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.069904, 10.1103/PhysRevD.95.026009. arXiv: 1610.08917 [hep-th].
- [113] Davide Gaiotto. «Boundary F-maximization». В: *arXiv preprint arXiv:1403.8052* (2014).
- [114] Davide Gaiotto, Dalimil Mazac и Miguel F. Paulos. «Bootstrapping the 3d Ising twist defect». В: *JHEP* 03 (2014), с. 100. DOI: 10.1007/JHEP03(2014)100. arXiv: 1310.5078 [hep-th].

- [115] Davide Gaiotto и др. «Generalized Global Symmetries». В: *JHEP* 02 (2015), с. 172. DOI: 10.1007/JHEP02(2015)172. arXiv: 1412.5148 [hep-th].
- [116] Davide Gaiotto и др. «Theta, Time Reversal, and Temperature». В: *JHEP* 05 (2017), с. 091. DOI: 10.1007/JHEP05(2017)091. arXiv: 1703.00501 [hep-th].
- [117] Ping Gao, Daniel Louis Jafferis и Aron Wall. «Traversable Wormholes via a Double Trace Deformation». В: *JHEP* 12 (2017), с. 151. DOI: 10.1007/JHEP12(2017)151. arXiv: 1608.05687 [hep-th].
- [118] S James Gates Jr и др. «Superspace, or one thousand and one lessons in supersymmetry». В: *arXiv preprint hep-th/0108200* (2001).
- [119] Holger Gies и Joerg Jaeckel. «Chiral phase structure of QCD with many flavors». В: *Eur. Phys. J. C* 46 (2006), с. 433–438. DOI: 10.1140/epjc/s2006-02475-0. arXiv: hep-ph/0507171.
- [120] Simone Giombi и Himanshu Khanchandani. «CFT in AdS and boundary RG flows». В: *JHEP* 11 (2020), с. 118. DOI: 10.1007/JHEP11(2020)118. arXiv: 2007.04955 [hep-th].
- [121] Simone Giombi и Vladimir Kirilin. «Anomalous dimensions in CFT with weakly broken higher spin symmetry». В: *JHEP* 11 (2016), с. 068. DOI: 10.1007/JHEP11(2016)068. arXiv: 1601.01310 [hep-th].
- [122] Simone Giombi, Igor R. Klebanov и Grigory Tarnopolsky. «Bosonic tensor models at large  $N$  and small  $\epsilon$ ». В: *Phys. Rev. D* 96.10 (2017), с. 106014. DOI: 10.1103/PhysRevD.96.106014. arXiv: 1707.03866 [hep-th].
- [123] Simone Giombi и Vasily Pestun. «The 1/2 BPS 't Hooft loops in  $N=4$  SYM as instantons in 2d Yang-Mills». В: *J. Phys. A* 46 (2013), с. 095402. DOI: 10.1088/1751-8113/46/9/095402. arXiv: 0909.4272 [hep-th].
- [124] Simone Giombi и др. «Monodromy defects from hyperbolic space». В: *JHEP* 02 (2022), с. 041. DOI: 10.1007/JHEP02(2022)041. arXiv: 2102.11815 [hep-th].
- [125] Simone Giombi и др. «Prismatic Large  $N$  Models for Bosonic Tensors». В: *Phys. Rev. D* 98.10 (2018), с. 105005. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.105005. arXiv: 1808.04344 [hep-th].

- [126] Stanislaw D. Glazek и K. G. Wilson. «Renormalization of overlapping transverse divergences in a model light front Hamiltonian». B: *Phys. Rev. D* 47 (1993), с. 4657–4669. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.4657.
- [127] Stanislaw D. Glazek и Kenneth G. Wilson. «Limit cycles in quantum theories». B: *Phys. Rev. Lett.* 89 (2002). [Erratum: *Phys.Rev.Lett.* 92, 139901 (2004)], с. 230401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.230401. arXiv: hep-th/0203088.
- [128] Ferdinando Gliozzi и др. «Boundary and Interface CFTs from the Conformal Bootstrap». B: *JHEP* 05 (2015). [Erratum: *JHEP* 12, 093 (2021)], с. 036. DOI: 10.1007/JHEP05(2015)036. arXiv: 1502.07217 [hep-th].
- [129] Alexander O Gogolin, Alexander A Nersesyan и Alexei M Tsvetik. *Bosonization and strongly correlated systems*. Cambridge university press, 2004.
- [130] L Golubovic, TC Lubensky и CS O’hern. «Structural properties of the sliding columnar phase in layered liquid crystalline systems». B: *Physical Review E* 62.1 (2000), с. 1069.
- [131] Jaume Gomis, Takuya Okuda и Vasily Pestun. «Exact Results for ’t Hooft Loops in Gauge Theories on  $S^4$ ». B: *JHEP* 05 (2012), с. 141. DOI: 10.1007/JHEP05(2012)141. arXiv: 1105.2568 [hep-th].
- [132] Victor Gorbenko, Slava Rychkov и Bernardo Zan. «Walking, Weak first-order transitions, and Complex CFTs». B: *JHEP* 10 (2018), с. 108. DOI: 10.1007/JHEP10(2018)108. arXiv: 1807.11512 [hep-th].
- [133] Victor Gorbenko, Slava Rychkov и Bernardo Zan. «Walking, Weak first-order transitions, and Complex CFTs». B: *Journal of High Energy Physics* 2018.10 (2018), с. 108.
- [134] Victor Gorbenko, Slava Rychkov и Bernardo Zan. «Walking, Weak first-order transitions, and Complex CFTs II. Two-dimensional Potts model at  $Q > 4$ ». B: *SciPost Phys.* 5.5 (2018), с. 050. DOI: 10.21468/SciPostPhys.5.5.050. arXiv: 1808.04380 [hep-th].
- [135] Alexander Gorsky и Fedor Popov. «Atomic collapse in graphene and cyclic renormalization group flow». B: *Phys. Rev. D* 89.6 (2014), с. 061702. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.061702. arXiv: 1312.7399 [cond-mat.mes-hall].



- [136] David Grabner, Nikolay Gromov и Julius Julius. «Excited States of One-Dimensional Defect CFTs from the Quantum Spectral Curve». В: *JHEP* 07 (2020), с. 042. DOI: 10.1007/JHEP07(2020)042. arXiv: 2001.11039 [hep-th].
- [137] J. A. Gracey. «Four loop  $\overline{MS}$  mass anomalous dimension in the Gross-Neveu model». В: *Nucl. Phys. B* 802 (2008), с. 330–350. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2008.04.002. arXiv: 0804.1241 [hep-th].
- [138] JA Gracey и др. « $a$ -function for  $N=2$  supersymmetric gauge theories in three dimensions». В: *Physical Review D* 95.2 (2017), с. 025005.
- [139] C. Robin Graham и Edward Witten. «Conformal anomaly of submanifold observables in AdS / CFT correspondence». В: *Nucl. Phys. B* 546 (1999), с. 52–64. DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00055-3. arXiv: hep-th/9901021.
- [140] Phillip Griffiths и Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Online Library, 1978.
- [141] David J Gross, Tsvi Piran и Steven Weinberg. *Two Dimensional Quantum Gravity And Random Surfaces-8th Jerusalem Winter School For Theoretical Physics*. Т. 8. World Scientific, 1991.
- [142] David J Gross и Vladimir Rosenhaus. «All point correlation functions in SYK». В: *Journal of High Energy Physics* 2017.12 (2017), с. 1–58.
- [143] David J. Gross, Akikazu Hashimoto и Igor R. Klebanov. «The Spectrum of a large  $N$  gauge theory near transition from confinement to screening». В: *Phys. Rev. D* 57 (1998), с. 6420–6428. DOI: 10.1103/PhysRevD.57.6420. arXiv: hep-th/9710240.
- [144] David J. Gross и Nikita A. Nekrasov. «Dynamics of strings in noncommutative gauge theory». В: *JHEP* 10 (2000), с. 021. DOI: 10.1088/1126-6708/2000/10/021. arXiv: hep-th/0007204.
- [145] David J. Gross и Nikita A. Nekrasov. «Monopoles and strings in noncommutative gauge theory». В: *JHEP* 07 (2000), с. 034. DOI: 10.1088/1126-6708/2000/07/034. arXiv: hep-th/0005204.
- [146] David J. Gross и Nikita A. Nekrasov. «Solitons in noncommutative gauge theory». В: *JHEP* 03 (2001), с. 044. DOI: 10.1088/1126-6708/2001/03/044. arXiv: hep-th/0010090.

- [147] David J. Gross и Vladimir Rosenhaus. «Chaotic scattering of highly excited strings». В: *JHEP* 05 (2021), с. 048. DOI: 10.1007/JHEP05(2021)048. arXiv: 2103.15301 [hep-th].
- [148] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov и Alexander M. Polyakov. «Gauge theory correlators from noncritical string theory». В: *Phys. Lett.* B428 (1998), с. 105—114. DOI: 10.1016/S0370-2693(98)00377-3. arXiv: hep-th/9802109 [hep-th].
- [149] John Guckenheimer и Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Т. 42. Springer Science & Business Media, 2013.
- [150] Sergei Gukov. «RG Flows and Bifurcations». В: *Nucl. Phys. B* 919 (2017), с. 583—638. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2017.03.025. arXiv: 1608.06638 [hep-th].
- [151] R. C. Gunning. *Lectures on Vector Bundles on Riemann surfaces*. Princeton University Press.
- [152] V. Gurarie. «Logarithmic operators in conformal field theory». В: *Nucl. Phys. B* 410 (1993), с. 535—549. DOI: 10.1016/0550-3213(93)90528-W. arXiv: hep-th/9303160.
- [153] Razvan Gurau. «Colored Group Field Theory». В: *Commun. Math. Phys.* 304 (2011), с. 69—93. DOI: 10.1007/s00220-011-1226-9. arXiv: 0907.2582 [hep-th].
- [154] Razvan Gurau. «Invitation to Random Tensors». В: *SIGMA* 12 (2016), с. 094. DOI: 10.3842/SIGMA.2016.094. arXiv: 1609.06439 [hep-th].
- [155] Razvan Gurau и Vincent Rivasseau. «The  $1/N$  expansion of colored tensor models in arbitrary dimension». В: *Europhys. Lett.* 95.5 (2011), с. 50004. DOI: 10.1209/0295-5075/95/50004. arXiv: 1101.4182 [gr-qc].
- [156] F. D. M. Haldane и E. H. Rezayi. «Periodic Laughlin-Jastrow wave functions for the fractional quantized Hall effect». В: *Phys. Rev. B* 31 (февр. 1985), с. 2529—2531.
- [157] Stephen William Hawking. «Do wormholes fix the constants of nature?» В: *Nuclear Physics B* 335.1 (1990), с. 155—165.

- [158] Idse Heemskerk и др. «Holography from Conformal Field Theory». В: *JHEP* 10 (2009), с. 079. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/10/079. arXiv: 0907.0151 [hep-th].
- [159] Mans Henningson и Kostas Skenderis. «Weyl anomaly for Wilson surfaces». В: *JHEP* 06 (1999), с. 012. DOI: 10.1088/1126-6708/1999/06/012. arXiv: hep-th/9905163.
- [160] Christopher P. Herzog и Nozomu Kobayashi. «The  $O(N)$  model with  $\phi^6$  potential in  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ ». В: *JHEP* 09 (2020), с. 126. DOI: 10.1007/JHEP09(2020)126. arXiv: 2005.07863 [hep-th].
- [161] Christopher P. Herzog и Itamar Shamir. «Anomalies from correlation functions in defect conformal field theory». В: *JHEP* 07 (2021), с. 091. DOI: 10.1007/JHEP07(2021)091. arXiv: 2103.06311 [hep-th].
- [162] Christopher P. Herzog и Itamar Shamir. «How a-type anomalies can depend on marginal couplings». В: *Phys. Rev. Lett.* 124.1 (2020), с. 011601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.011601. arXiv: 1907.04952 [hep-th].
- [163] Christopher P. Herzog и Abhay Shrestha. «Two point functions in defect CFTs». В: *JHEP* 04 (2021), с. 226. DOI: 10.1007/JHEP04(2021)226. arXiv: 2010.04995 [hep-th].
- [164] Matthijs Hogervorst, Miguel Paulos и Alessandro Vichi. «The ABC (in any D) of Logarithmic CFT». В: *JHEP* 10 (2017), с. 201. DOI: 10.1007/JHEP10(2017)201. arXiv: 1605.03959 [hep-th].
- [165] Matthijs Hogervorst, Slava Rychkov и Balt C. van Rees. «Truncated conformal space approach in d dimensions: A cheap alternative to lattice field theory?» В: *Phys. Rev. D* 91 (2015), с. 025005. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.025005. arXiv: 1409.1581 [hep-th].
- [166] Matthijs Hogervorst, Slava Rychkov и Balt C. van Rees. «Unitarity violation at the Wilson-Fisher fixed point in  $4-\epsilon$  dimensions». В: *Phys. Rev. D* 93.12 (2016), с. 125025. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.125025. arXiv: 1512.00013 [hep-th].
- [167] E Hopf. «Bifurcation of a periodic solution from a stationary solution of a system of differential equations». В: *Berlin Mathematische Physics Klasse, Sachsischen Akademic der Wissenschaften Leipzig* 94 (1942), с. 3–32.

- [168] Eberhard Hopf. «Ergodentheorie». B: (1937).
- [169] S Ibanez и JA Rodriguez. «Shilnikov Bifurcations in Generic 4-Unfoldings of a Codimension-4 Singularity». B: *Journal of differential equations* 120.2 (1995), с. 411—428.
- [170] S Ibanez и JA Rodriguez. «Shilnikov configurations in any generic unfolding of the nilpotent singularity of codimension three on  $\mathbb{R}^3$ ». B: *Journal of Differential Equations* 208.1 (2005), с. 147—175.
- [171] H. Itoyama, A. Mironov и A. Morozov. «Cut and join operator ring in tensor models». B: *Nucl. Phys.* B932 (2018), с. 52—118. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2018.05.007. arXiv: 1710.10027 [hep-th].
- [172] H. Itoyama, A. Mironov и A. Morozov. «Ward identities and combinatorics of rainbow tensor models». B: *JHEP* 06 (2017), с. 115. DOI: 10.1007/JHEP06(2017)115. arXiv: 1704.08648 [hep-th].
- [173] I. Jack, D.R.T. Jones и C. Poole. «Gradient flows in three dimensions». B: *JHEP* 09 (2015), с. 061. DOI: 10.1007/JHEP09(2015)061. arXiv: 1505.05400 [hep-th].
- [174] Daniel L. Jafferis и др. «Towards the F-Theorem:  $\mathcal{N} = 2$  Field Theories on the Three-Sphere». B: *JHEP* 06 (2011), с. 102. DOI: 10.1007/JHEP06(2011)102. arXiv: 1103.1181 [hep-th].
- [175] Kristan Jensen. «Chaos in AdS<sub>2</sub> Holography». B: *Phys. Rev. Lett.* 117.11 (2016), с. 111601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.111601. arXiv: 1605.06098 [hep-th].
- [176] Kristan Jensen и Andy OBannon. «Constraint on Defect and Boundary Renormalization Group Flows». B: *Phys. Rev. Lett.* 116.9 (2016), с. 091601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.091601. arXiv: 1509.02160 [hep-th].
- [177] Christian B. Jepsen, Igor R. Klebanov и Fedor K. Popov. «RG limit cycles and unconventional fixed points in perturbative QFT». B: *Phys. Rev. D* 103.4 (2021), с. 046015. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.046015. arXiv: 2010.15133 [hep-th].
- [178] Christian B. Jepsen и Fedor K. Popov. «Homoclinic Renormalization Group Flows, or When Relevant Operators Become Irrelevant». B: *Phys. Rev. Lett.* 127.14 (2021), с. 141602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.141602. arXiv: 2105.01625 [hep-th].

- [179] Leo P Kadanoff. «Operator algebra and the determination of critical indices». B: *Physical Review Letters* 23.25 (1969), c. 1430.
- [180] David B Kaplan и др. «Conformality lost». B: *Physical Review D* 80.12 (2009), c. 125005.
- [181] Anton Kapustin, Brian Willett и Itamar Yaakov. «Exact results for supersymmetric abelian vortex loops in 2+1 dimensions». B: *JHEP* 06 (2013), c. 099. DOI: 10.1007/JHEP06(2013)099. arXiv: 1211.2861 [hep-th].
- [182] Anton Kapustin, Brian Willett и Itamar Yaakov. «Exact Results for Wilson Loops in Superconformal Chern-Simons Theories with Matter». B: *JHEP* 03 (2010), c. 089. DOI: 10.1007/JHEP03(2010)089. arXiv: 0909.4559 [hep-th].
- [183] Christian Kassel. *Quantum groups*. Т. 155. Springer Science & Business Media, 2012.
- [184] Yoichi Kazama и Hisao Suzuki. «Characterization of N= 2 superconformal models generated by the coset space method». B: *Physics Letters B* 216.1-2 (1989), c. 112—116.
- [185] Yoichi Kazama и Hisao Suzuki. «New N= 2 superconformal field theories and superstring compactification». B: *Nuclear Physics B* 321.1 (1989), c. 232—268.
- [186] Hee-Cheol Kim. «Line defects and 5d instanton partition functions». B: *JHEP* 03 (2016), c. 199. DOI: 10.1007/JHEP03(2016)199. arXiv: 1601.06841 [hep-th].
- [187] Hee-Cheol Kim, Joonho Kim и Seok Kim. «Instantons on the 5-sphere and M5-branes». B: *arXiv preprint arXiv:1211.0144* (2012).
- [188] Jaewon Kim и др. «Symmetry Breaking in Coupled SYK or Tensor Models». B: *Phys. Rev. X* 9.2 (2019), c. 021043. DOI: 10.1103/PhysRevX.9.021043. arXiv: 1902.02287 [hep-th].
- [189] AN Kirillov и N Yu Reshetikhin. «REPRESENTATIONS OF THE ALGEBRA U(slq(2)), q-ORTHOGONAL POLYNOMIALS AND INVARIANTS OF LINKS». B: *New developments in the theory of knots* 11 (1990), c. 202.
- [190] Alexei Kitaev. «A simple model of quantum holography». B: (). <http://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev/>, <http://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev2/>. Talks at KITP, April 7, 2015 and May 27, 2015.

- [191] Alexei Kitaev. *Notes on  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  representations*. 2018. arXiv: 1711.08169 [hep-th].
- [192] I. R. Klebanov и A. M. Polyakov. «AdS dual of the critical  $O(N)$  vector model». В: *Phys. Lett.* B550 (2002), с. 213—219. DOI: 10.1016/S0370-2693(02)02980-5. arXiv: hep-th/0210114 [hep-th].
- [193] Igor R Klebanov и Grigory Tarnopolsky. «On large  $N$  limit of symmetric traceless tensor models». В: *Journal of High Energy Physics* 2017.10 (2017), с. 1—16.
- [194] Igor R. Klebanov, Preethi N. Pallegar и Fedor K. Popov. «Majorana Fermion Quantum Mechanics for Higher Rank Tensors». В: *Phys. Rev. D* 100.8 (2019), с. 086003. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.086003. arXiv: 1905.06264 [hep-th].
- [195] Igor R. Klebanov, Preethi N. Pallegar и Fedor K. Popov. «Majorana Fermion Quantum Mechanics for Higher Rank Tensors». В: *Phys. Rev. D* 100.8 (2019), с. 086003. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.086003. arXiv: 1905.06264 [hep-th].
- [196] Igor R. Klebanov и Alexander M. Polyakov. «Interaction of discrete states in two-dimensional string theory». В: *Mod. Phys. Lett.* A6 (1991), с. 3273—3281. DOI: 10.1142/S021773239100378X. arXiv: hep-th/9109032 [hep-th].
- [197] Igor R. Klebanov, Fedor Popov и Grigory Tarnopolsky. «TASI Lectures on Large  $N$  Tensor Models». В: *PoS TASI2017* (2018), с. 004. DOI: 10.22323/1.305.0004. arXiv: 1808.09434 [hep-th].
- [198] Igor R. Klebanov, Silviu S. Pufu и Benjamin R. Safdi. «F-Theorem without Supersymmetry». В: *JHEP* 10 (2011), с. 038. DOI: 10.1007/JHEP10(2011)038. arXiv: 1105.4598 [hep-th].
- [199] Igor R. Klebanov и Grigory Tarnopolsky. «Uncolored random tensors, melon diagrams, and the Sachdev-Ye-Kitaev models». В: *Phys. Rev. D* 95.4 (2017), с. 046004. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.046004. arXiv: 1611.08915 [hep-th].
- [200] Igor R. Klebanov и Arkady A. Tseytlin. «A Nonsupersymmetric large  $N$  CFT from type 0 string theory». В: *JHEP* 03 (1999), с. 015. DOI: 10.1088/1126-6708/1999/03/015. arXiv: hep-th/9901101.
- [201] Anatoli Klimyk и Konrad Schmüdgen. *Quantum groups and their representations*. Springer Science & Business Media, 2012.

- [202] Nozomu Kobayashi и др. «Towards a  $C$ -theorem in defect CFT». В: *JHEP* 01 (2019), с. 039. DOI: 10.1007/JHEP01(2019)039. arXiv: 1810.06995 [hep-th].
- [203] Zohar Komargodski и Adam Schwimmer. «On Renormalization Group Flows in Four Dimensions». В: *JHEP* 12 (2011), с. 099. DOI: 10.1007/JHEP12(2011)099. arXiv: 1107.3987 [hep-th].
- [204] Shota Komatsu и Yifan Wang. «Non-perturbative defect one-point functions in planar  $\mathcal{N} = 4$  super-Yang-Mills». В: *Nucl. Phys. B* 958 (2020), с. 115120. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2020.115120. arXiv: 2004.09514 [hep-th].
- [205] J. Kondo. «Resistance Minimum in Dilute Magnetic Alloys». В: *Prog. Theor. Phys.* 32.1 (1964), с. 37—49. DOI: 10.1143/PTP.32.37.
- [206] Folkert Kuipers, Umut Gürsoy и Yu. A. Kuznetsov. «Bifurcations in the RG-flow of QCD». В: *JHEP* 07 (2019), с. 075. DOI: 10.1007/JHEP07(2019)075. arXiv: 1812.05179 [hep-th].
- [207] David Kutasov. «Two-dimensional QCD coupled to adjoint matter and string theory». В: *Nuclear Physics B* 414.1-2 (1994), с. 33—52.
- [208] David Kutasov и Adam Schwimmer. «Universality in two-dimensional gauge theory». В: *Nuclear Physics B* 442.3 (1995), с. 447—460.
- [209] Yu. A. Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*. Т. 112. Springer Science & Business Media, 2013.
- [210] Lev Davidovich Landau и Evgenii Mikhailovich Lifshits. *Statisticheskaya fizika*. Т. 5. Pergamon, 1980.
- [211] Lev Davidovich Landau и др. *Theory of elasticity: volume 7*. Т. 7. Elsevier, 1986.
- [212] K. Lang и W. Ruhl. «The Critical  $O(N)$  sigma model at dimensions  $2 < d < 4$ : Fusion coefficients and anomalous dimensions». В: *Nucl. Phys. B* 400 (1993), с. 597—623. DOI: 10.1016/0550-3213(93)90417-N.
- [213] Al Larkin и SA Pikin. «Zh. ETF 56 (1969) 1664; Soy. Phys». В: *JETP* 29 (1969), с. 891.
- [214] Edoardo Lauria и др. «Line and surface defects for the free scalar field». В: *JHEP* 01 (2021), с. 060. DOI: 10.1007/JHEP01(2021)060. arXiv: 2005.02413 [hep-th].

- [215] Bruce M. Law. «Wetting, adsorption and surface critical phenomena». B: *Progress in Surface Science* 66.6 (2001), с. 159—216. ISSN: 0079-6816. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0079-6816\(00\)00025-3](https://doi.org/10.1016/S0079-6816(00)00025-3). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0079681600000253>.
- [216] Andre LeClair, Jose Maria Roman и German Sierra. «Log periodic behavior of finite size effects in field theories with RG limit cycles». B: *Nucl. Phys. B* 700 (2004), с. 407—435. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2004.08.033. arXiv: hep-th/0312141.
- [217] Andre LeClair, Jose Maria Roman и German Sierra. «Russian doll renormalization group and superconductivity». B: *Phys. Rev. B* 69 (2004), с. 020505. DOI: 10.1103/PhysRevB.69.020505. arXiv: cond-mat/0211338.
- [218] Andre Leclair, Jose Maria Roman и German Sierra. «Russian doll renormalization group, Kosterlitz-Thouless flows, and the cyclic sine-Gordon model». B: *Nucl. Phys. B* 675 (2003), с. 584—606. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2003.09.032. arXiv: hep-th/0301042.
- [219] Pedro Liendo, Leonardo Rastelli и Balt C. van Rees. «The Bootstrap Program for Boundary  $CFT_d$ ». B: *JHEP* 07 (2013), с. 113. DOI: 10.1007/JHEP07(2013)113. arXiv: 1210.4258 [hep-th].
- [220] Henry W. Lin и Douglas Stanford. «A symmetry algebra in double-scaled SYK». B: *SciPost Phys.* 15 (2023), с. 234. DOI: 10.21468/SciPostPhys.15.6.234. arXiv: 2307.15725 [hep-th].
- [221] Nadejda A Liskova и Anatol N Kirillov. «CLEBSCH-GORDAN AND RACAHWIGNER COEFFICIENTS FOR  $U_q(SU(1, 1))$ ». B: *International Journal of Modern Physics A* 7.supp01b (1992), с. 611—621.
- [222] Jianpeng Liu, Junwei Liu и Xi Dai. «Pseudo Landau level representation of twisted bilayer graphene: Band topology and implications on the correlated insulating phase». B: *Phys. Rev. B* 99 (2019), с. 155415.
- [223] Junyu Liu и др. «d-dimensional SYK, AdS Loops, and 6j Symbols». B: *Journal of High Energy Physics* 2019.3 (2019), с. 1—57.
- [224] J. M. B. Lopes dos Santos, N. M. R. Peres и A. H. Castro Neto. «Continuum model of the twisted graphene bilayer». B: *Phys. Rev. B* 86 (окт. 2012), с. 155449.



- [225] Edward N Lorenz. «Deterministic nonperiodic flow». В: *Journal of atmospheric sciences* 20.2 (1963), с. 130—141.
- [226] Markus A. Luty, Joseph Polchinski и Riccardo Rattazzi. «The  $a$ -theorem and the Asymptotics of 4D Quantum Field Theory». В: *JHEP* 01 (2013), с. 152. DOI: 10.1007/JHEP01(2013)152. arXiv: 1204.5221 [hep-th].
- [227] Juan Maldacena и Xiao-Liang Qi. «Eternal traversable wormhole». В: *arXiv preprint arXiv:1804.00491* (2018).
- [228] Juan Maldacena и Douglas Stanford. «Remarks on the Sachdev-Ye-Kitaev model». В: *Physical Review D* 94.10 (нояб. 2016), с. 106002. DOI: 10.1103/physrevd.94.106002.
- [229] Juan Maldacena и Douglas Stanford. «Remarks on the sachdev-ye-kitaev model». В: *Physical Review D* 94.10 (2016), с. 106002.
- [230] Juan Maldacena, Douglas Stanford и Zhenbin Yang. «Conformal symmetry and its breaking in two dimensional Nearly Anti-de-Sitter space». В: *PTEP* 2016.12 (2016), с. 12C104. DOI: 10.1093/ptep/ptw124. arXiv: 1606.01857 [hep-th].
- [231] Juan Maldacena, Douglas Stanford и Zhenbin Yang. «Diving into traversable wormholes». В: *Fortsch. Phys.* 65.5 (2017), с. 1700034. DOI: 10.1002/prop.201700034. arXiv: 1704.05333 [hep-th].
- [232] Juan Maldacena и Alexander Zhiboedov. «Constraining Conformal Field Theories with A Higher Spin Symmetry». В: *J. Phys. A* 46 (2013), с. 214011. DOI: 10.1088/1751-8113/46/21/214011. arXiv: 1112.1016 [hep-th].
- [233] Juan Maldacena и Alexander Zhiboedov. «Constraining conformal field theories with a slightly broken higher spin symmetry». В: *Class. Quant. Grav.* 30 (2013), с. 104003. DOI: 10.1088/0264-9381/30/10/104003. arXiv: 1204.3882 [hep-th].
- [234] Juan Martin Maldacena. «The Large N limit of superconformal field theories and supergravity». В: *Int. J. Theor. Phys.* 38 (1999). [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)], с. 1113—1133. DOI: 10.1023/A:1026654312961;10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a1. arXiv: hep-th/9711200 [hep-th].
- [235] Yuri I Manin, Theo Raedschelders и Michel Van den Bergh. *Quantum groups and non-commutative geometry*. Springer, 1988.

- [236] Max A. Metlitski. «Boundary criticality of the  $O(N)$  model in  $d = 3$  critically revisited». B: *SciPost Phys.* 12.4 (2022), c. 131. DOI: 10.21468/SciPostPhys.12.4.131. arXiv: 2009.05119 [cond-mat.str-el].
- [237] Alexey Milekhin и Jiuci Xu. «Revisiting Brownian SYK and its possible relations to de Sitter». B: *arXiv e-prints* (2023), arXiv—2312.
- [238] A. Mironov и A. Morozov. «Correlators in tensor models from character calculus». B: *Phys. Lett. B* 774 (2017), c. 210—216. DOI: 10.1016/j.physletb.2017.09.063. arXiv: 1706.03667 [hep-th].
- [239] Alexei Morozov и Antti J Niemi. «Can renormalization group flow end in a big mess?» B: *Nuclear Physics B* 666.3 (2003), c. 311—336.
- [240] Jeff Murugan, Douglas Stanford и Edward Witten. «More on Supersymmetric and 2d Analogs of the SYK Model». B: *JHEP* 08 (2017), c. 146. DOI: 10.1007/JHEP08(2017)146. arXiv: 1706.05362 [hep-th].
- [241] Stefano Negro, Fedor K. Popov и Jacob Sonnenschein. «Deterministic chaos vs integrable models». B: *Phys. Rev. D* 108.10 (2023), c. 105024. DOI: 10.1103/PhysRevD.108.105024. arXiv: 2211.14150 [hep-th].
- [242] Francesco Parisen Toldin, Fakhher F. Assaad и Stefan Wessel. «Critical behavior in the presence of an order-parameter pinning field». B: *Phys. Rev. B* 95.1 (2017), c. 014401. DOI: 10.1103/PhysRevB.95.014401. arXiv: 1607.04270 [cond-mat.stat-mech].
- [243] Alexander Z. Patashinskii и Valery L. Pokrovskii. «Second Order Phase Transitions in a Bose Fluid». B: *JETP* 19 (1964), c. 677.
- [244] AZ Patashinskii и VL Pokrovskii. «Second order phase transitions in a Bose fluid». B: *Soviet physics JETP* 19.3 (1964), c. 677—691.
- [245] Cheng Peng, Marcus Spradlin и Anastasia Volovich. «A Supersymmetric SYK-like Tensor Model». B: *JHEP* 05 (2017), c. 062. DOI: 10.1007/JHEP05(2017)062. arXiv: 1612.03851 [hep-th].
- [246] Cheng Peng, Marcus Spradlin и Anastasia Volovich. «Correlators in the  $\mathcal{N} = 2$  Supersymmetric SYK Model». B: *JHEP* 10 (2017), c. 202. DOI: 10.1007/JHEP10(2017)202. arXiv: 1706.06078 [hep-th].

- [247] Vasily Pestun. «Localization of gauge theory on a four-sphere and supersymmetric Wilson loops». B: *Commun. Math. Phys.* 313 (2012), c. 71–129. DOI: 10.1007/s00220-012-1485-0. arXiv: 0712.2824 [hep-th].
- [248] Vasily Pestun. «Localization of the four-dimensional N=4 SYM to a two-sphere and 1/8 BPS Wilson loops». B: *JHEP* 12 (2012), c. 067. DOI: 10.1007/JHEP12(2012)067. arXiv: 0906.0638 [hep-th].
- [249] SA Pikin. «Weak first-order phase transitions». B: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 194.1-4 (1993), c. 352–363.
- [250] Joseph Gerard Polchinski. *String theory, volume I: An introduction to the bosonic string*. Cambridge university press Cambridge, 1998.
- [251] Alexander M Polyakov. «Self-tuning fields and resonant correlations in 2d-gravity». B: *Modern Physics Letters A* 6.07 (1991), c. 635–644.
- [252] Alexander M Polyakov и Fedor K Popov. «Kronecker anomalies and gravitational striction». B: *Dialogues Between Physics and Mathematics: CN Yang at 100*. Springer, 2022, c. 191–214.
- [253] Alexander M. Polyakov. «Self-tuning fields and resonant correlations in 2-d gravity». B: т. 6. 1991, c. 635–644. DOI: 10.1142/S0217732391000658.
- [254] AM Polyakov. «Infrared instability of the de Sitter space». B: *arXiv preprint arXiv:1209.4135* (2012).
- [255] AM Polyakov. «Properties of long and short range correlations in the critical region». B: *Zh. Eksp. Teor. Fiz* 57 (1969), c. 271–283.
- [256] Fedor K Popov и Alexey Milekhin. «Hidden wave function of twisted bilayer graphene: The flat band as a landau level». B: *Physical Review B* 103.15 (2021), c. 155150.
- [257] Fedor K. Popov. «Debye mass in de Sitter space». B: *JHEP* 06 (2018), c. 033. DOI: 10.1007/JHEP06(2018)033. arXiv: 1711.11010 [hep-th].
- [258] Fedor K. Popov. «Supersymmetric tensor model at large  $N$  and small  $\epsilon$ ». B: *Phys. Rev. D* 101.2 (2020), c. 026020. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.026020. arXiv: 1907.02440 [hep-th].

- [259] Fedor K. Popov. «Supersymmetry in QCD2 coupled to fermions». В: *Phys. Rev. D* 105.7 (2022), с. 074005. DOI: 10.1103/PhysRevD.105.074005. arXiv: 2202.04017 [hep-th].
- [260] Fedor K. Popov и Yifan Wang. «Non-perturbative defects in tensor models from melonic trees». В: *JHEP* 11 (2022), с. 057. DOI: 10.1007/JHEP11(2022)057. arXiv: 2206.14206 [hep-th].
- [261] Shiroman Prakash и Ritam Sinha. «A Complex Fermionic Tensor Model in  $d$  Dimensions». В: *JHEP* 02 (2018), с. 086. DOI: 10.1007/JHEP02(2018)086. arXiv: 1710.09357 [hep-th].
- [262] *PyDSTool homepage*. <https://pydstool.github.io/PyDSTool/ProjectOverview.html>.
- [263] S Ramanujan. «Notebooks (2 volumes), Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957». В: *MR* 20 (2011), с. 6340.
- [264] Alfred Renyi. «Representations for real numbers and their ergodic properties». В: *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica* 8.3-4 (1957), с. 477—493.
- [265] Daniel A Roberts, Douglas Stanford и Alexandre Streicher. «Operator growth in the SYK model». В: *Journal of High Energy Physics* 2018.6 (2018), с. 1—20.
- [266] Diego Rodriguez-Gomez. «A scaling limit for line and surface defects». В: *JHEP* 06 (2022), с. 071. DOI: 10.1007/JHEP06(2022)071. arXiv: 2202.03471 [hep-th].
- [267] David Ruelle и Floris Takens. «On the nature of turbulence». В: *Les rencontres physiciens-mathematiciens de Strasbourg-RCP25* 12 (1971), с. 1—44.
- [268] Subir Sachdev и Jinwu Ye. «Gapless spin fluid ground state in a random, quantum Heisenberg magnet». В: *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993), с. 3339. DOI: 10.1103/PhysRevLett.70.3339. arXiv: cond-mat/9212030 [cond-mat].
- [269] Ivo Sachs и Andreas Wipf. «Finite temperature Schwinger model». В: *Helv. Phys. Acta* 65 (1992), с. 652—678. arXiv: 1005.1822 [hep-th].
- [270] P. San-Jose, J. González и F. Guinea. «Non-abelian gauge potentials in graphene bilayers». В: *Phys. Rev. Lett.* 108 (май 2012), с. 216802.

- [271] A. Schwimmer и S. Theisen. «Entanglement Entropy, Trace Anomalies and Holography». B: *Nucl. Phys. B* 801 (2008), с. 1–24. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2008.04.015. arXiv: 0802.1017 [hep-th].
- [272] Nathan Seiberg и Edward Witten. «String theory and noncommutative geometry». B: *JHEP* 09 (1999), с. 032. DOI: 10.1088/1126-6708/1999/09/032. arXiv: hep-th/9908142.
- [273] Leonid Pavlovich Shilnikov. «A case of the existence of a denumerable set of periodic motions». B: *Doklady Akademii Nauk*. T. 160. 3. Russian Academy of Sciences. 1965, с. 558–561.
- [274] D. Shklyarov, S. Sinel'shchikov и L. Vaksman. *On Function Theory in Quantum Disc: q-Differential Equations and Fourier Transform*. 1999. arXiv: math/9809002 [math.QA].
- [275] D. Shklyarov, S. Sinel'shchikov и L. Vaksman. *On Function Theory in Quantum Disc: A q-Analogue of Berezin Transform*. 1998. arXiv: math/9809018 [math.QA].
- [276] D. Shklyarov, S. Sinel'shchikov и L. Vaksman. *On Function Theory in Quantum Disc: Covariance*. 1998. arXiv: math/9808037 [math.QA].
- [277] D. Shklyarov, S. Sinel'shchikov и L. Vaksman. *On Function Theory in Quantum Disc: Integral Representations*. 1999. arXiv: math/9808015 [math.QA].
- [278] D. Shklyarov, S. Sinel'shchikov и L. Vaksman. *On Function Theory in Quantum Disc: Invariant Kernels*. 1998. arXiv: math/9808047 [math.QA].
- [279] Sheer El-Showk и Kyriakos Papadodimas. «Emergent Spacetime and Holographic CFTs». B: *JHEP* 10 (2012), с. 106. DOI: 10.1007/JHEP10(2012)106. arXiv: 1101.4163 [hep-th].
- [280] Stephen Smale. «Differentiable dynamical systems». B: *Bulletin of the American mathematical Society* 73.6 (1967), с. 747–817.
- [281] Floris Takens. «Forced oscillations and bifurcations». B: *Applications of Global Analysis I, Comm 3* (2001), с. 1–62.
- [282] Floris Takens. «Singularities of vector fields». B: *Publications Mathematiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques* 43.1 (1974), с. 47–100.

- [283] Grigory Tarnopolsky, Alex Jura Kruchkov и Ashvin Vishwanath. «Origin of Magic Angles in Twisted Bilayer Graphene». В: *Physical Review Letters* 122.10 (март 2019).
- [284] L. L. Vaksman. «Quantum Bounded Symmetric Domains». В: *arXiv e-prints*, arXiv:0803.3769 (март 2008), arXiv:0803.3769. DOI: 10.48550/arXiv.0803.3769. arXiv: 0803.3769 [math.QA].
- [285] Leonid L'vovych Vaksman. *Quantum Bounded symmetric domains*. Т. 238. American Mathematical Soc., 2010.
- [286] Yifan Wang. «Defect a-theorem and a-maximization». В: *JHEP* 02 (2022), с. 061. DOI: 10.1007/JHEP02(2022)061. arXiv: 2101.12648 [hep-th].
- [287] Yifan Wang. «Surface defect, anomalies and b-extremization». В: *JHEP* 11 (2021), с. 122. DOI: 10.1007/JHEP11(2021)122. arXiv: 2012.06574 [hep-th].
- [288] Yifan Wang. «Taming defects in  $\mathcal{N} = 4$  super-Yang-Mills». В: *JHEP* 08.08 (2020), с. 021. DOI: 10.1007/JHEP08(2020)021. arXiv: 2003.11016 [hep-th].
- [289] K.G. Wilson и John B. Kogut. «The Renormalization group and the epsilon expansion». В: *Phys. Rept.* 12 (1974), с. 75—199. DOI: 10.1016/0370-1573(74)90023-4.
- [290] Kenneth G Wilson. «Non-Lagrangian models of current algebra». В: *Physical Review* 179.5 (1969), с. 1499.
- [291] Kenneth G. Wilson. «Confinement of Quarks». В: *Phys. Rev. D* 10 (1974). Под ред. J. C. Taylor, с. 2445—2459. DOI: 10.1103/PhysRevD.10.2445.
- [292] Virginie De Witte и др. «Interactive Initialization and Continuation of Homoclinic and Heteroclinic Orbits in MATLAB». В: *ACM Transactions on Mathematical Software* 38.3 (апр. 2012), с. 1—34. DOI: 10.1145/2168773.2168776.
- [293] Edward Witten. «An SYK-Like Model Without Disorder». В: *J. Phys. A* 52.47 (2019), с. 474002. DOI: 10.1088/1751-8121/ab3752. arXiv: 1610.09758 [hep-th].
- [294] Edward Witten. «An SYK-like model without disorder». В: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 52.47 (2019), с. 474002.

- [295] Edward Witten. «Anti-de Sitter space and holography». B: *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998), с. 253–291. DOI: 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2. arXiv: hep-th/9802150.
- [296] Edward Witten. «Ground ring of two-dimensional string theory». B: *Nuclear physics B* 373.1 (1992), с. 187–213.
- [297] Edward Witten. «The N matrix model and gauged WZW models». B: *Nucl. Phys. B* 371 (1992), с. 191–245. DOI: 10.1016/0550-3213(92)90235-4.
- [298] T. M. R. Wolf и др. «Electrically Tunable Flat Bands and Magnetism in Twisted Bilayer Graphene». B: *Phys. Rev. Lett.* 123 (2019), с. 096802.
- [299] Stanisław L Woronowicz. «Compact quantum groups». B: *Symetries quantiques (Les Houches, 1995)* 845.884 (1998), с. 98.
- [300] Satoshi Yamaguchi. «Holographic RG flow on the defect and g theorem». B: *JHEP* 10 (2002), с. 002. DOI: 10.1088/1126-6708/2002/10/002. arXiv: hep-th/0207171.
- [301] Vladimir E Zakharov, Victor S L'vov и Gregory Falkovich. *Kolmogorov spectra of turbulence I: Wave turbulence*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [302] Alexander B Zamolodchikov. «Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory». B: *JETP lett* 43.12 (1986), с. 730–732.
- [303] Zhao Zheng, Baidyanath Misra и Harald Atmanspacher. «Observer-dependence of chaos under Lorentz and Rindler transformations». B: *International Journal of Theoretical Physics* 42.4 (2003), с. 869–879.