

На правах рукописи

Попов Федор Калинович

Современные подходы в квантовых теориях поля: от конформных
дефектов до квантовых симметрий

Специальность 1.3.3 — теоретическая физика

Автореферат

Диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва, 2024

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Официальные оппоненты:

Арефьева Ирина Ярославна, доктор физико-математических наук, профессор, член - корреспондент РАН, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Отдел теоретической физики, главный научный сотрудник

Арсеев Петр Иварович, доктор физико-математических наук, профессор, член - корреспондент РАН, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук, Отделение теоретической физики им. И.Е. Тамма, Лаборатория теории твердого тела, главный научный сотрудник, заведующий лабораторией теории твердого тела

Захаров Валентин Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение «Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт"», Лаборатория решеточных калибровочных теорий, ведущий научный сотрудник

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук (ИППИ РАН)

Защита состоится _____ на заседании диссертационного совета 24.1.163.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте ядерных исследований Российской академии наук (ИЯИ РАН), расположенном по адресу: 117312 Москва, проспект 60-летия Октября, д. 7а.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИЯИ РАН и на сайте: <https://www.inr.ru>.

Автореферат разослан _____ 2025 года.

Ученый секретарь диссертационного совета 24.1.163.01

кандидат физико-математических наук

Демидов Сергей Владимирович

Актуальность темы исследования

Квантовая теория поля (КТП) является одной из самых важных и глубоких теорией или структурой в современной теоретической физике, которое предоставляет не только существенные знания о фундаментальных силах и частицах, составляющих Вселенную, но также имеет применение и физике конденсированного состояния, теории машинного обучения и искусственного интеллекта. Поэтому изучение свойств и методов решения квантовых теорий поля является одной из важной задачей современной науки. Данная диссертация посвящена изучению и развитию различных методов в КТП, которое включает в себя изучение теорий с большим числом степеней свободы, разложение вблизи критических размерностей теорий поля, изучение КТП во внешних сильных или гравитационных полях.

Одним из важных методов который изучается и развивается в этой диссертации является обобщение метода большого N предела в КТП. Такие теории были ограничены только векторными или матричными моделями, в которых фундаментальные поля преобразуются в векторных или матричных представлениях группы $O(N)$. В таких теориях, где число степеней свободы становится очень большим, динамика квантовых теорий поля может быть значительно упрощена, что делает теорию точно решаемой (а иногда даже свободной) в ведущем порядке. Это упрощение позволяет упростить анализ и понимание поведения теории. Однако реальные физические системы, конечно не описываются идеализированным пределом большого числа степеней свободы, что требует включения поправок в параметр разложения по этому параметру. Систематическое изучение создание новых пределов большого числа степеней свободы и поправок к этим пределам, как это сделано в этой диссертации, имеет решающее значение. Оно не только повышает точность теоретических предсказаний, но и устраняет разрыв между идеализированными моделями и реальными явлениями. Например, в векторной модели изучение $1/N$ поправок позволяет вычислять различные корреляторы в рамках взаимодействующей теории, тем самым предлагая более глубокое понимание фундаментальных моделей современной теоретической физики, которое может быть

даже практическое применение.

Другим краеугольным камнем этой диссертации является исследование свойств ренормализационной группы (РГ). РГ является фундаментальным инструментом в КТП, предоставляя основу для изучения поведения физических систем в различных энергетических масштабах. Изучая общие свойства потоки РГ, мы можем сделать предсказания о том как себя ведет себя система в различных пределах. К сожалению, мы только понимаем как ведет себя РГ поток только в унитарных моделях, но современные задачи требует понимание когда система может быть и неунитарной. Поэтому возникает очень много открытых вопросов об исследовании и изучению сложных траекторий РГ потока, такие сложные траектории включает себя предельные циклы, когда траектория зацикливается на себе и теория становится самоподобной, гомоклинические орбиты, когда теория в УФ и ИК совпадают, и хаотическая динамика, когда теория не может быть описана в ИК. Понимание этих поведений представляет не только теоретический интерес, но и имеет значительные последствия для физики конденсированного состояния, статистической механики, космологии и теории машинного обучения. Например, появление предельных циклов РГ может дать представление о структуре спектров атомных ядер, где как раз и наблюдается периодическая РГ.

Кроме того, одним из важных вопросов в современной физике является изучение КТП в присутствии внешних гравитационных или электромагнитных полей. Так как КТП обычно понимается как ИК предел какой-то конечной системы или как возмущение Конформной теории поля релевантным оператором, то остается открытым вопрос, как определить КТП на фоне внешних полей. К примеру, если мы введем УФ обрезание в де Ситтере, то не понятно, что делать с этим обрезанием в далеком будущем. А так как реальный мир как раз описывается КТП во внешнем гравитационном поле, то этот вопрос становится очень релевантным. Также это направление исследований особенно важно не только с теоретической и математической точки зрения, но имеет важное применение в физике высоких энергий и в космологии. Изучая квантовые теории поля на таком фоне, мы должны понять как устроена структура гильбертовых пространств этих теорий

и поведение корреляторов в далеком будущем. Эти идеи имеют решающее значение для понимания таких явлений, как излучение Хокинга, поведение полей в искривленном пространстве-времени и динамика ранней Вселенной. Например, поведение квантовых полей в сильных гравитационных полях может дать подсказки о природе черных дыр и информационном парадоксе, давней проблеме теоретической физики.

Практические приложения этого исследования глубоки. Например, понимание поведения Вселенной в ее ранние эпохи может привести к более точным космологическим моделям, потенциально предлагающим объяснения наблюдаемого распределения галактик, природы темной материи и темной энергии, а также начальных условий, которые привели к образованию крупномасштабных структур во Вселенной. Кроме того, достижения в изучении КТП во внешних полях могут проложить путь для новых технологий в квантовых вычислениях и материаловедении, где квантовые эффекты играют значительную роль.

В заключение, обобщение методов в квантовых теориях поля, как это преследуется в этой диссертации, решает несколько фундаментальных проблем с далеко идущими последствиями. Упрощая динамику посредством большого предела N , исследуя сложное поведение группы перенормировки и изучая КТП во внешних полях, это исследование не только продвигает наше теоретическое понимание, но и имеет потенциал для новаторских практических приложений. Полученные в этой работе знания могут привести к значительным достижениям как в фундаментальной физике, так и в прикладных науках, подчеркивая важность постоянного изучения и обобщения методов в квантовых теориях поля.

Общая цель и конкретные задачи работы

Целью данного диссертационного исследования было изучение и обобщение стандартных методов работы с квантовыми теориями поля. Так одной из проблем было обобщение метода предела большого N в квантовых теориях поля, где квантовая динамика теории значительно упрощается в пределе когда число

степеней свободы становится очень большим. А также изучение первых поправок по параметру разложение $1/N$ в таких теориях. В частности, векторная модель представляет собой такой простейший системы, где в пределе большого числа степеней свободы теория эффективно свободная, но поправки по $1/N$ могут быть систематически изучены и можно посчитать различные корреляторы уже во взаимодействующей теории. Другая проблема состояла в изучение общих свойств ренормализационной группы, стандартного метода, который помогает изучить динамику квантовой теории в различных пределах (большой или малых энергий). К примеру, для общей статистической или квантовой теории поля стоял открытый вопрос о возникновении интересных поведений ренормализационной группы (возникновение предельных циклов, гомоклинических орбит или даже хаотического поведения). Наконец, изучение поведения квантовых теорий поля на фоне внешних гравитационных или электромагнитных полей может дать ответы на вопросы о структуре гильбертовых пространств данных теорий и поведения корреляторов. Такой вопрос также имеет и практическое применение, так как может дать предсказания о поведении вселенной в ранних эпохах ее существования.

Так для решения данной цели были поставлены следующие задачи:

- Изучение свойств квантовых теорий поля на фоне внешних гравитационных и электромагнитных полей. Уметь формулировать и изучать такие теории. Научиться вычислять различные корреляторы как функции времени и развитие методов для пересуммирования лидирующих инфракрасно больших вкладов.
- Также разработать методы для изучения квантовых теорий поля на фоне квантовых пространств, где само пространство описывается не классической геометрией. Применить данные методы для изучения квантовой теории поля на фоне квантового пространства анти-де-Ситтера, и показать связь с теорией Садчева-Йе-Китаева.
- Развитие методов большого числа степеней свободы. Разработать новые пре-

дела большого числа степеней свободы. Изучить их поведение при большом числе степеней свободы, разработать методы для пертурбативного вычисления поправок к этим пределам. Изучить, как ведут себя протяженные объекты и устроено гильбертово пространство в данных теориях.

- Изучение динамики ренормгрупповых потоков в неунитарных теориях. Разработать метод для систематического изучения данных теорий и привести явные примеры, где возникают предельные циклы, гомоклинические траектории и хаотическая динамика.
- Разработать численные методы для решения теорий с большим числом степеней свободы.
- Объяснить возникновение суперсимметричной точки в теории квантовой хромодинамики взаимодействующей с массивными фермионами в присоединенном представлении и безмассовыми фермионами в произвольном представлении.
- Развитие методов квантовой теории поля в применении физики конденсированного состояния. Объяснить возникновение плоских зон в двухлистном скрученном графене, используя макроскопическую квантовую теорию поля для описания данного материала.

Положения, выносимые на защиту диссертации

- Была изучена инфракрасная динамика квантовых полей на фоне внешних гравитационных и электромагнитных полей. Были вычислены и просуммированы лидирующие секулярно растущие петлевые вклады в теории скалярного поля на фоне пространства де-Ситтера, черных дыр и постоянного электромагнитного поля. Было показано, что эти вклады могут кардинальным образом поменять динамику систему, и переводить систему с наивным состоянием близким к вакуумному к сильно измененному состоянию.

- Был предложен метод исследования компактных объектов. Так были изучены скалярные теории поля на фоне коллапсирующих и компактных звезд. Было показано, что спектр таких теорий кардинальным образом отличается, что может стать критерием для того чтобы различать эти две ситуации.
- Было изучены ультрафиолетовые расходимости в пространстве Анти Де Ситтера. Из-за наличия "границы" данная система введет себя как "коробка" что приводит к возникновению дополнительных сингулярностей в пропагаторах скалярного поля, а следовательно к нетривиальным УФ расходимостям (в случае настоящего АдС) или ИК расходимостям (в случае изучения накрывающего пространства АдС).
- Был изучен вопрос о наличии ненулевой дебаевской массы фотона. Из-за наличия "термального" спектра в статическом патче дС связанного с рождением частиц, возникает вопрос если такая температура может быть задетектирована фотоном (в случае пространства Минковского происходит возникновение ненулевой массы Дебая). Было показано, что фотон не получает массы.
- Был выведена непрерывная теория поля для изучения скрученного двулистного графена. Это теория оказывается эквивалентна теории дираковского фермиона во внешнем неабелевом поле. Было показано, что в такой модели возникают абсолютно плоские зоны. Было показано что в такой теории можно ввести инвариант Ферми, который дает необходимое и достаточное условия для возникновения плоских зон в хиральной модели. Изучено поведение скрученного двулистного графена во внешнем магнитном поле.
- Были обобщены векторные и матричные модели. Так были изучены тензорные модели, был дан простой комбинаторный критерий когда данная теория дает мелонный предел. Было выведено уравнение Дайсона-Швингера которая дает точную двухточечную функцию в такой теории. Был рассмотрен конформный предел такой теории и изучен спектр операторов, и ϵ разложе-

ние таких теорий.

- Был изучен суперсимметричный аналог тензорной теории. Вычислены аномальные размерности операторов в пределе большого числа полей. Было решено уравнение Дайсона-Швингегра для данной теории и показано что теория унитарная и стабильная. Также была предложена новая стабильная и унитарная сильно-взаимодействующая конформная теория в трех измерениях.
- Была предложена тензорная модель конформных дефектов. Было показано как возникает уравнение Дайсона-Швингера. Была вычислена энтропия дефекта.
- Был изучен квантовый диск, в котором изометрии образуют квантовую группы а не классические группы. Были посчитаны соответствующие пропагаторы и диаграммы Виттена. Также была показано как работает голографическая дуальность для таких симметрий.
- Было изучено аналитическое продолжение различных теорий поля из евклидовой сигнатуры в минковскую. Было введено понятие Кронекеровской аномалии и были показаны, когда они возникают в различных теориях и как они влияют на динамику квантовых теорий поля. Был предложено объяснение возникновения таких "аномалий" в различных теориях поля.
- Была изучена двумерная модель КХД с фермионами в присоединенном представлении. Было показано что в теории возникает суперсимметрия при определенных значениях масс фермиона. Было представлено простое доказательство данного факта на основе изучения суперсимметричных моделей ВЗВ.
- Были изучены различные нестандартные поведения РГ-потокков. Было показано что возникает нетривиальные траектории. Такие как предельные циклы, гомоклинические траектории и даже хаотическое поведение. Бы-

ла предложена модель комплексной цепочки Изинга, в которой возникает такая хаотическая ренормгруппа. Была показана причина возникновения такой хаотической ренормгруппы через точное решение такой модели. В случае графена с критическим зарядом, было показано возникновение циклической ренормгруппы.

- Была предложена простая модель на основе тензорной модели для изучения конформных линейных дефектов в непертурбативных теориях поля. Был посчитан спектр аномальных размерностей для данного дефекта и была вычислена энтропия дефекта.

Научная новизна и практическая значимость

Результаты, представленные в диссертационной работе, являются оригинальными и новаторскими разработками автора. Они были опубликованы в ведущих российских и зарубежных журналах, а также представлены на международных конференциях. Эти исследования получили широкое признание в научном сообществе и цитируются другими авторами.

Результаты работы имеют значительное теоретическое значение для исследований в таких областях, как квантовая теория поля в различных числах измерений с большим числом степеней свободы, теория двумерной квантовой хромодинамики, теории двухлистного скрученного графена, теории ренормализационной группы, и теории q -деформированных квантовых пространств. Полученные результаты открывают новые перспективы для изучения различных физических явлений и математических объектов с использованием вышеописанных теорий.

Существенный прогресс в установлении тесных связей между современными подходами теоретической физики и фундаментальной математики, достигнутый исследовательскими группами по всему миру, оказался исключительно плодотворным для обеих дисциплин. Разработанные автором методы и полученные результаты активно применяются как отечественными, так и зарубежными научными коллективами.

Степень достоверности

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается обоснованностью применяемых методов исследования и их сравнением с другими подходами, а также публикациями в престижных международных журналах со строгой политикой рецензирования. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы

Основные результаты, полученные в диссертации, были доложены на научных семинарах в университетах Принстона, Санта-Барбары, Миннесоты, Чикаго, Стони Брука, ФИАН, МИАН, МФТИ, ИЯИ РАН, ВШЭ.

- Loop corrections to Hawking radiation, Conference on Quantum fields and IR issues in de Sitter space-time, Natal, Brazil 2015
- $3 - \epsilon$ expansion in tensor models, NYU, New York 2019
- $3 - \epsilon$ expansion for supersymmetric tensor models, Quantum Gravity, Paris, France 2019
- Quantum Fields in static patch of de Sitter, Quantum Field Theory in de Sitter space-time, Mainz, Germany 2019
- Kronecker Anomalies and Gravitational Strictions, LMU, Munich 2022
- Non-Perturbative Defects in Tensor Models from Melonic Trees, Tensor Club, Lyon 2022
- Kronecker Anomalies and Gravitational Strictions, UCSB, Santa Barbara 2022
- Chaotic RG flow, University of Chicago, Chicago 2022
- Chaotic RG flow, SCGP, Stony Brook 2022

- Two dimensional models of QCD, Carnegie Mellon University, Pittsburgh 2023
- Supersymmetry in QCD2 coupled to fermions, William I. Fine Theoretical Physics Institute, Minnesota 2023
- Non-Perturbative Defects in Tensor Models from Melonic Trees, SCGP, Stony Brook 2023
- Magic Angles in Twisted Trilayer Graphene, Flatiron Institute, New York 2023

Личный вклад

Все результаты, включенные в диссертацию, получены лично соискателем или при его прямом участии. Соискатель принимал непо средственное участие в выполнении всех работ и написании текстов всех пуб ликаций. Имена соавторов указаны в соответствующих публикациях.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения (Глава 1), три главы основного текста (Главы 2-8), заключения (Глава 9) и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 236 страниц, включая 28 рисунков. Список литературы содержит 288 ссылок.

Содержание диссертации

В **главе 2** рассматривается поведение мелонной суперсимметричной теории в различных размерностях. Здесь представлен вывод лагранжиана модели с использованием метода суперполей, а также доказывается, что в пределе большого числа степеней свободы эта теория становится мелонной. Объясняется значимость этой теории для изучения конформных теорий поля. В **разделе 2.1** вводятся основные понятия и проводится обзор литературы по данной тематике. В **разделе 2.2** выводится точное уравнение Дайсона-Швингера в пределе большого

числа степеней свободы. Показано, что в инфракрасном пределе это уравнение обладает конформной симметрией, что позволяет его решить, найти аномальную размерность фундаментальных полей в данной теории и определить спектр аномальных размерностей билинейных операторов. В **разделе 2.3** рассматривается частный случай модели в трех измерениях. Доказывается, что эта модель является стабильной и унитарной, что делает её интересной сильновзаимодействующей конформной теорией поля в трех измерениях, которая еще точно решается. В **разделе 2.4** исследуется теория с использованием ϵ -разложения, что позволяет получить точные результаты на всех порядках по N , но только в размерностях, близких к 3. В **разделе 2.5** обсуждается обобщение полученных результатов для $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии. Однако ограничения, накладываемые суперсимметрией, оказываются очень жесткими, что полностью определяет динамику этой теории. В **разделе 2.6** приводятся основные формулы и методы работы с суперсимметричными теориями в трех измерениях.

В **главе 3** исследуется конформный линейный дефект в тензорных моделях. Вводятся основные понятия тензорной модели и демонстрируется, как эта модель решается в пределе большого числа степеней свободы. Обсуждается, почему мелонные модели и протяженные операторы играют важную роль в изучении пространства конформных теорий поля. В **разделе 3.1** проводится обзор литературы по теме конформных дефектов, обсуждаются механизмы их возникновения в общей конформной теории поля и анализируется, какие генераторы конформной группы сохраняются при введении таких дефектов. Рассматривается поведение общей скалярной квантовой теории поля в присутствии локализованного магнитного поля. Показано, что в общем случае дефект должен экранироваться, не влияя на динамику конформной теории поля. Однако в особых случаях такой дефект может стать конформным, что изменяет вид корреляционных функций локальных операторов. В **разделе 3.2** вводятся понятия тензорных моделей и мелонного предела, а также обсуждается введение локализованного магнитного поля в контексте тензорных моделей. При помощи предела большого числа степеней свободы показывается, что тензорная модель с дефектом может быть точно реше-

на. В теории с локализованным магнитным полем доминируют диаграммы типа арбузных деревьев, что позволяет получить точное решение данной модели. В **разделе 3.3** выводится точное уравнение Дайсона-Швингера для одноточечных функций в тензорной модели и анализируются решения данного уравнения. Уравнение удается решить точно в инфракрасном пределе, что позволяет определить одноточечные функции примарных полей в присутствии дефектов. Также вычисляются пертурбативные бета-функции для констант связи дефекта, и показано, что уравнения указывают на существование нетривиальной сильно взаимодействующей фиксированной точки, что свидетельствует о конформности дефекта. В **разделе 3.4** с использованием уравнения Дайсона-Швингера и приближения большого числа степеней свободы вычисляется энтропия дефекта, являющаяся аналогом центрального заряда для конформных дефектов. Показано, как эта энтропия может быть получена пересуммированием арбузных диаграмм, а затем проверяется правильность вычислений при помощи ϵ -разложения. В **разделе 3.5** рассматриваются двухточечные функции примарных операторов в присутствии конформного дефекта в тензорных моделях. Показано, что эти корреляторы можно вычислить путем пересуммирования арбузных диаграмм. В качестве примера вычисляется одноточечная функция тензора энергии-импульса.

В **главе 4** рассматриваются нестандартные поведения ренормгруппового потока в неунитарных теориях поля. В отличие от унитарных конформных теорий, где ренормгрупповой поток обычно приводит к фиксированной точке, описываемой конформной теорией поля, в неунитарных теориях это поведение может изменяться, открывая возможность для более сложных и интересных сценариев поведения ренормализационного потока. В **разделе 4.1** вводится неунитарная тензорная модель, в которой будет исследоваться нестандартное поведение РГ-потока. Методы динамических систем позволяют рассматривать эти потоки как функции параметра N , который в данном контексте представляет число степеней свободы. В **разделе 4.2** вводится понятие бифуркации Богданова-Тakensа как функции числа степеней свободы N и демонстрируется, как эта бифуркация приводит к появлению гомоклинических орбит в тензорных моделях. Это дает первый

нетривиальный пример нестандартного поведения ренормализационной группы. Затем в **разделе 4.4** обсуждаются общие соображения о природе хаотического поведения в различных моделях, описываемых детерминистическими уравнениями. На основании этих рассуждений, в **разделе 4.5** рассматривается модель Изинга с комплексной константой взаимодействия и демонстрируется, как хаотическая динамика возникает из детерминистических уравнений. Это приводит к интересному примеру хаотического РГ-потока. Также обсуждается, как такая хаотическая динамика влияет на поведение теории в инфракрасном пределе. В **разделе 4.6** вводятся понятия преобразования Пекаря, подковы Смейла и гомоклинических орбит Шильникова, которые приводят к возникновению хаотической динамики при изучении автономных обыкновенных дифференциальных уравнений. В **разделе 4.7** представлена би-антисимметрическая тензорная модель, где демонстрируется, как в этой теории возникает гомоклиническая орбита Шильникова посредством бифуркации ноль-Хопфа, что дает второй интересный пример хаотического РГ-потока. Далее показывается, что именно благодаря хаотической динамике в этой теории возникают сложные, но красивые траектории.

В **главе 5** обсуждаются общие свойства и поведение теорий поля в кривом пространстве-времени. Отмечается, что в случае наличия компактного подпространства в пространстве, корреляционные функции в импульсном пространстве могут становиться неаналитическими. На основе этого наблюдения вводится понятие кронекееровских аномалий. Также подчеркивается, что иногда такие аномалии могут возникать и в других контекстах. В **разделе 5.1** рассматривается пример возникновения кронекееровских аномалий из-за флуктуаций решеток в классическом магните. Эта аномалия приводит к появлению нелокальных взаимодействий, что изменяет поведение системы вблизи точки фазового перехода, превращая фазовый переход в переход первого рода. В **разделе 5.2** приводится простой пример возникновения кронекееровских аномалий в гармоническом осцилляторе при конечной температуре. Аномалия объясняется тем, что восприимчивость при постоянной температуре и при постоянной энтропии в общем случае различаются. Восприимчивость при постоянной энтропии является аналитической функцией,

что и приводит к появлению аномалии. В **разделе 5.3** рассматривается пример кронекееровских аномалий в теории Максвелла, возникающих за счет постоянных электромагнитных полей. Обобщая предыдущие примеры, в **разделе 5.4** создается математическая теория кронекееровских аномалий. В **разделе 5.6** на основе этой теории обсуждается возникновение кронекееровских аномалий в теории скалярного поля в нечетномерных пространствах де Ситтера, а также доказывается отсутствие таких аномалий в четномерных пространствах де Ситтера. В **разделе 5.7** вводится понятие лакуны для квантовых теорий поля в пространстве де Ситтера, когда пропагаторы перестают быть аналитическими функциями координат пространства-времени.

В **главе 6** рассматриваются теории поля с квантовыми симметриями. Эти теории ожидаются быть дуальными к дважды скалированной теории Садчева-Йе-Китаева. В частности, вместо обычной конформной симметрии в такой теории появляется квантовая конформная симметрия. Поэтому предполагается, что дуальным пространством для этой "конформной теории поля" должно быть квантовое пространство. В **разделе 6.1** представлен обзор литературы по теме и вывод квантовой конформной симметрии для дважды скалированной теории Садчева-Йе-Китаева. Далее, в **разделе 6.2** дается педагогический обзор квантовых симметрий и групп, вводится понятие квантового диска, который является квантовым аналогом диска Пуанкаре. В **разделе 6.2.1** рассматривается квантовая группа симметрий квантового диска, показывается структура алгебры функций на этом пространстве. Затем, в **разделе 6.2.2** вводится дуальная алгебра Хопфа для квантовой группы симметрий, которая описывает алгебру векторных полей на квантовом диске и задает инфинитезимальное действие квантовой группы. С помощью этих понятий в **разделе 6.2.3** обсуждается алгебра функций на квантовом диске с точки зрения действия квантовой симметрии, приводится разложение этой алгебры на прямую сумму неприводимых представлений квантовой группы. В **разделе 6.3** рассматривается пример q -деформированной голографии. Вводится лагранжиан и действие для теории скалярного поля на квантовом диске. Методом интегралов по траекториям вычисляется пропагатор для этой теории по-

ля. В **разделе 6.3.1** обсуждается поведение пропагатора и полей вблизи границы квантового диска, что позволяет в **разделе 6.3.3** получить пропагатор на границе квантового диска, который должен соответствовать дуальной теории на границе данного пространства. Для проверки этого утверждения, в **разделе 6.4** вводится и подробно обсуждается q -деформированная одномерная конформная теория поля, которая должна обладать симметрией под действием квантовой группы. Показано, что теория скалярного поля на квантовом диске действительно определяет q -деформированную конформную теорию поля. В **разделе 6.5** дается педагогическое введение в теорию квантовых групп, излагается общая философия квантовых групп и вводится определение алгебры Хопфа. Также вводится понятие инвариантного элемента, который необходим для обсуждения свойств квантовых теорий поля на этих пространствах. Обсуждается алгебра таких инвариантных элементов. В **разделе 6.6** вводится и обсуждается R -матричный подход к изучению квантовых групп и квантового диска. В **разделе 6.7** рассматривается квантовый элемент Казимира в терминах производных и показывается, что уравнения скалярного поля можно лаконично переписать, используя оператор Казимира. С помощью этого наблюдения выводится волновое уравнение для теории скалярного поля на квантовом диске.

В **главе 7** рассматриваются двумерные модели КХД (квантовой хромодинамики) с акцентом на исследование спектра этих моделей. Основным методом изучения — численный метод в калибровке светового конуса, который позволяет предсказать существование суперсимметричной точки, возникающей при взаимодействии теории Янга-Миллса с фермионами в присоединенном представлении при определенной массе. В главе исследуется механизм, ведущий к появлению этой суперсимметрии, и обсуждаются возможные обобщения. В **разделе 7.1** представлен обзор по данной теме, демонстрирующий, как двумерная КХД значительно упрощается в калибровке светового конуса. В этом случае модель описывается набором большого числа фермионов Дирака, которые взаимодействуют нелокально. В **разделе 7.2** подробно выводится гамильтониан двумерной КХД в калибровке светового конуса. Далее, в **разделе 7.3** проводится анализ спектра гамильтони-

ана, и показано, что при определенной массе фермионов спектр становится суперсимметричным. В этом разделе также представлен оператор суперсимметрии, который является нечетным (содержит нечетное число фермионных операторов). Этот оператор суперсимметрии аналогичен оператору в суперсимметричной модели Весса-Зумина-Виттена (ВЗВ). Исходя из этого сходства, показано, что данную теорию можно интерпретировать как суперсимметричную модель ВЗВ с нелокальным возмущением. В **разделе 7.4** результаты предыдущего раздела воспроизводятся с использованием метода интегралов по путям. Наконец, в **разделе 7.5** обсуждаются возможные обобщения полученных результатов. В частности, показано, что добавление безмассовых фермионов в эту теорию также приводит к суперсимметричной теории, но масса присоединенного фермиона должна быть другой.

В **главе 8** рассматривается скрученный двулистный графен, в котором при определенном угле скручивания возникает абсолютная плоская зона в спектре, то есть энергия квазиэлектрона перестаёт зависеть от квазиимпульса. Основное внимание в главе уделяется объяснению и исследованию этого явления в так называемом киральном пределе. В **разделе 8.1** представлен обзор литературы и результатов по данной теме. Далее, в **разделе 8.2** выводится гамильтониан, описывающий поведение электронов в скрученном графене. Показано, что эта эффективная модель эквивалентна теории двумерного фермиона на фоне неабелевого магнитного поля. Уравнения этой модели анализируются с использованием методов обыкновенных дифференциальных уравнений, вводится Вронскиан (или интеграл Ферми), который зануляется при возникновении плоской зоны. В **разделе 8.3** обсуждается, что при возникновении плоской зоны в данной модели, наряду с голоморфной волновой функцией, появляется также плоская зона с сингулярной волновой функцией. Хотя такое решение не является физически реалистичным, оно проявляет себя во внешнем магнитном поле. В **разделе 8.4** показано, что, комбинируя сингулярное и голоморфное решения, можно провести унитарное преобразование, которое позволяет переписать уравнения как систему уравнений для электрона во внешнем магнитном поле. Таким образом, доказывается, что задача

эквивалентна изучению уровней Ландау на торе. Наконец, в **разделе 8.6** демонстрируется, как эти результаты можно элегантно вывести, исследуя расщепление короткой точной последовательности расслоений.

В **заключении** приведены основные результаты диссертации.

Публикации по теме диссертации

1. E. T. Akhmedov, F. K. Popov, V. M. Slepukhin. Infrared dynamics of the massive ϕ^4 theory on de Sitter space. *Phys. Rev. D*, 88, 024021 (2013).
2. E.T.Akhmedov, N.Astrakhantsev, F.K.Popov. Secularly growing loop corrections in strong electric fields. *JHEP* 09 (2014) 071.
3. E.T. Akhmedov, F.K. Popov. A few more comments on secularly growing loop corrections in strong electric fields. *JHEP* 1509 (2015) 085
4. Emil T. Akhmedov, Hadi Godazgar, Fedor K. Popov. Hawking radiation and secularly growing loop corrections. *Phys. Rev. D* 93, 024029 (2016)
5. Emil T.Akhmedov, Daniil A.Kalinov, Fedor K.Popov. A way to distinguish very compact stellar objects from black holes. *Phys. Rev. D* 93, 064006 (2016)
6. E.T.Akhmedov, U. Moschella, Fedor K. Popov. Characters of different secular effects in various patches of de Sitter space. *Phys.Rev.D* 99 (2019) 8, 086009
7. E.T.Akhmedov, U.Moschella, Fedor K. Popov. Ultraviolet phenomena in AdS self-interacting quantum field theory. *JHEP* 03 (2018) 183
8. Fedor K. Popov, Yifan Wang. Non-perturbative defects in tensor models from melonic trees. *JHEP* 11 (2022) 057
9. Fedor K. Popov. Debye mass in de Sitter space. *JHEP* 06 (2018) 033
10. Fedor K. Popov. Supersymmetric tensor model at large N and small ϵ . *Phys.Rev.D* 101 (2020) 2, 026020

11. Alexander Gorsky, Fedor Popov. Atomic collapse in graphene and cyclic renormalization group flow. *Phys.Rev.D* 89 (2014) 6, 061702
12. Fedor K. Popov, Christian Jepsen. Homoclinic Renormalization Group Flows, or When Relevant Operators Become Irrelevant. *Phys.Rev.Lett.* 127 (2021) 14, 141602
13. Maikel M. Bosschaert, Christian Jepsen, Fedor K. Popov. Chaotic RG flow in tensor models. *Phys.Rev.D* 105 (2022) 6, 065021
14. Stefano Negro, Fedor K. Popov, Jacob Sonnenschein. Deterministic chaos vs integrable models. *Phys.Rev.D* 108 (2023) 10, 105024
15. Fedor K. Popov. Supersymmetry in QCD2 coupled to fermions. *Phys.Rev.D* 105 (2022) 7, 074005
16. Alexander M. Polyakov, Fedor K. Popov. Kronecker anomalies and gravitational striction. *Dialogues Between Physics and Mathematics: CN Yang at 100*, 2022.
17. Oleksandr Diatlyk, Fedor K. Popov, Yifan Wang. Beyond $N = \infty$ in Large N Conformal Vector Models at Finite Temperature *JHEP* 08 (2024) 219
18. Ahmed Almheiri, Fedor K. Popov. Holography on the Quantum Disk. *JHEP* 06 (2024) 070
19. Igor R. Klebanov, Preethi N. Pallegar, Fedor K. Popov. Majorana Fermion Quantum Mechanics for Higher Rank Tensors. *Phys.Rev.D* 100 (2019) 8, 086003
20. Fedor K. Popov, Alexey Milekhin. Hidden wave function of twisted bilayer graphene. *Phys.Rev.B* 103 (2021) 15, 155150